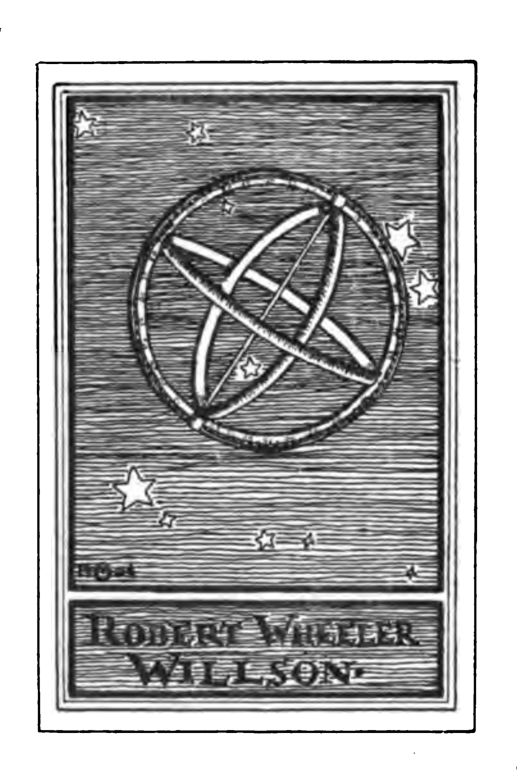



ROBERT WHEELER
WILLSON



Abriss

der

Praktischen Astronomie

vorzüglich in ihrer

Anwendung auf geographische Ortsbestimmung

von

DR. A. SAWITSCH,

Professor der Astronomie an der Kaiserlichen Universität
in St. Petersburg.

Nach der zweiten russischen Original-Ausgabe. unter Mitwirkung des Verfassers

neu herausgegeben von

Dr. C. F. W. Peters,

Observator der Sternwarte und Privatdocenten an der Universität
in Kiel.

Mit 6 lithographirten Tafeln.

Leipzig.

Wilhelm Mauke.

1879.

Vorrede.

Bei der Herausgabe einer neuen Auflage von Sawitsch's „Abriss der praktischen Astronomie", einem Buche, welches fast durch drei Decennien jüngeren Astronomen und Reisenden, die es unternahmen, geographische Ortsbestimmungen auszuführen, von grösstem Nutzen gewesen war, kam es hauptsächlich darauf an, einzelne Capitel umzuarbeiten, welche sich auf jetzt weniger gebräuchliche Instrumente und Rechnungsarten beziehen. Die deshalb nothwendigen Umarbeitungen sind grösstentheils von Herrn Staatsrath Sawitsch ausgeführt, von mir einzeln mit Zusätzen versehen und in sprachlicher Hinsicht einer Revision unterworfen. Statt des in der ersten Ausgabe behandelten astronomischen Theodoliten ist der in Russland sehr verbreitete Repsold'sche Verticalkreis aufgenommen. Einem von mir ausgesprochenen Wunsche entsprechend wurde auch das Ertel'sche Universal-Instru-

ment beseitigt und durch das von Pistor und Martins verfertigte ersetzt. In Folge dessen fand es sich nothwendig, die Theorie der mikroskopischen Ablesungen, Bestimmung der Ungleichheiten von Mikrometerschrauben u. dergl. aufzunehmen, die bei Anwendung der in neuerer Zeit mehr gebräuchlichen Instrumente nicht zu entbehren ist.

In der zweiten Hälfte des Buches (dem früheren zweiten Bande), welche die Methoden der geographischen Längenbestimmungen behandelt, musste die telegraphische Methode, wenn sie auch von Reisenden nicht gerade häufig wird angewandt werden können, einen kleinen Platz finden. Auf die Ermittelung des Chronometerganges bei verschiedenen Temperaturen, und die Ableitung der von der ersten und höheren Potenzen der Temperatur abhängigen Coefficienten des Ganges, welche nach neueren Erfahrungen von grösserer Wichtigkeit ist, als früher angenommen wurde, ist in dem Capitel über Chronometer und Pendeluhren, sowie bei der Behandlung der Längenbestimmung durch Chronometerübertragungen Rücksicht genommen.

Eine besonders grosse Umarbeitung hat die Theorie der Sonnenfinsternisse erfahren. Die Hansen'sche Theorie zur Vorausberechnung einer Sonnenfinsterniss für einen gegebenen Ort und Berechnung der geographischen Länge aus der Beobachtung einer Sonnenfinsterniss wurde aufgenommen, und für die Gauss-

Ursin'sche Methode zur Berechnung des Verlaufs einer Sonnenfinsterniss auf der Erde, welche aus der Dissertation von G. F. Ursin: „De eclipsi solari die 7 Septembris 1820 apparitura", Hafniae 1820, entnommen war und in welche sich bei der Ursin'schen Bearbeitung Fehler eingeschlichen hatten, wurde die Zech'sche Methode (erschienen 1853 in der Abhandlung: „Astronomische Untersuchungen über die wichtigsten Finsternisse, welche von den Schriftstellern des classischen Alterthums erwähnt werden") substituirt, mit zahlreichen Zusätzen des Verfassers und einem Beispiele: „Vorausberechnung der Sonnenfinsterniss am 18. August 1887."

Die Anhänge enthalten wie früher die Beschreibung und den Gebrauch der Reflexions-Instrumente, sowie ein Capitel über die Interpolation. Hinzugefügt ist in dem letzteren die Methode der Interpolation bei zwei Argumenten, sowie bei ungleichen Intervallen des Arguments. Am Schlusse des Buches findet sich ein Verzeichniss von 48 nördlichen Circumpolarsternen für das Jahr 1880 nebst Vorschriften zur Reduction auf den mittleren und scheinbaren Ort zu irgend einer andern Zeitepoche.

Kiel, den 10. Oktober 1878.

C. F. W. Peters.

Berichtigungen.

S. 75 im 2. Absatze ist hinzuzufügen, dass häufig bei Messinstrumenten die Mikroskope beweglich und der Kreis fest ist. Auf die gleich darauf folgende Erläuterung der Ablesungsart hat dies natürlich keinen Einfluss.

S. 137 in der Figur ist der bei *b* stehende Punkt um einen Millimeter weiter nach links zu versetzen.

S. 138, Z. 3 v. o. statt „$33'',4$“ lies „$33^s,4$“.

S. 291, Z. 1 v. o. statt „welche“ lies „wenn“.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt: Beschreibung und Gebrauch der Instrumente.

Seite

Sechster Abschnitt: Von der Reduction der Länge, Breite und des Azimuths eines Orts auf der Erde auf einen andern, und von der Bestimmung der Entfernung von Punkten, deren geographische Lage gegeben ist.

Erster Anhang: Beschreibung und Gebrauch der Reflexions-Instrumente.

Zweiter Anhang: Von der Interpolation.

Einleitung.

1. Die Erde hat eine sphäroidische, beinahe kugelförmige Gestalt, so ungefähr, wie sie aus der Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entstehen würde. Auf welche Weise man nun die Lage eines jeden Punktes auf der Erdoberfläche bestimmen kann, wird uns die Betrachtung der täglichen Bewegung der Gestirne zeigen; der Vollständigkeit wegen wollen wir erst aber einige allgemeine Erklärungen vorausschicken.

Wenn wir uns auf einem freien Platze befinden, so stellt die Ebene, welche dort die Oberfläche der Erde berührt, unseren scheinbaren Horizont dar; er ist parallel mit der Oberfläche des stillestehenden Wassers, oder senkrecht auf der Richtung der Schwere, welche durch einen, mit einem Gewichte beschwerten, ruhig und freihängenden Faden gegeben wird. Diese Richtung wird lothrecht oder vertical genannt; verlängert man die Lothlinie nach oben, so trifft sie den höchsten Punkt des Himmels, welcher gerade über uns steht und unseren Scheitel oder das Zenith bezeichnet; der entgegengesetzte, unter dem Horizonte liegende Punkt ist das Nadir. Alle durch die Lothlinie gehenden Ebenen stehen senkrecht auf dem Horizonte und werden Vertical-Ebenen genannt.

Es ist bekannt, dass sich die Erde täglich mit gleich-

förmiger Geschwindigkeit um ihre eigene Achse, in der Richtung von Westen nach Osten dreht; in Folge dieser Umwälzung scheint der ganze Himmel mit allen Gestirnen sich um eine gerade Linie zu bewegen, die mit der Verlängerung der Erdachse zusammenfällt und gewöhnlich Weltachse genannt wird. Die Sterne werden also tägliche Bewegungen von Osten nach Westen zu machen scheinen und Kreise beschreiben, welche alle senkrecht auf der Weltachse stehen. Je kleiner der Winkel zwischen dieser Achse und der Gesichtslinie, welche vom Beobachter zum Sterne geht, ist, desto kleiner erscheint der Kreis, in welchem dieser Stern seinen täglichen Umlauf vollendet, und desto geringer erscheint seine Geschwindigkeit. Die zwei Punkte des Himmels, welche von der Weltachse getroffen werden, sind dadurch bezeichnet, dass sie bei der allgemeinen Umdrehung des Himmels ganz unbeweglich bleiben; diese beiden Punkte sind die Weltpole. Der uns in Europa sichtbare Pol heisst der nördliche, der entgegengesetzte der südliche. Denken wir uns eine durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht zur Weltachse gehende Ebene, so durchschneidet sie die Erdoberfläche in einem Kreise, welcher die Erdoberfläche in zwei gleiche Theile, die nördliche und die südliche, theilt; diese Ebene heisst der Aequator und ist mit der täglichen Bahn eines jeden Sternes parallel.

Es sei o (Fig. 1) der Ort des Beobachters auf der Erdoberfläche, $p\,p'$ die Erdachse, P und P' die beiden Weltpole; $o\,Z$ die Lothlinie, und Z das Zenith des Beobachters. Zieht man nun eine Ebene durch die beiden Weltpole P, P' und durch das Zenith Z, so bekommt man den Meridian; diese Ebene trifft den Aequator und den Horizont unter einem rechten Winkel, weil sie sowohl durch die Erdachse $p\,p'$, als auch durch die Verticallinie $o\,Z$ geht. Der Durchschnitt des Horizonts mit der Ebene des Meridians bildet die sogenannte Mittagslinie; das nach der Gegend des Nordpols gekehrte Ende derselben bezeichnet den Nordpunkt des Horizonts, das ent-

gegengesetzte den Südpunkt. Wenn man sich eine in der Ebene des Horizontes liegende gerade Linie denkt, die senkrecht zur Mittagslinie steht, so ist für einen nach Norden gewandten Beobachter die rechte Seite dieser Linie nach dem Ostpunkte, die linke aber nach dem Westpunkte des Horizonts gerichtet; in der diese beiden Punkte verbindenden geraden Linie wird der Horizont durch die Ebene geschnitten, welche mit dem Aequator parallel durch den Ort des Beobachters geht. Die Verticalebene, welche senkrecht zum Meridian ist, oder von Osten nach Westen geht, heisst der erste Vertical.

Unter der Höhe eines Sterns versteht man denjenigen Winkel, welchen unsere nach dem Sterne gerichtete Gesichtslinie, mit der Ebene des Horizonts bildet; diese Höhe ist offenbar am grössten, wenn der Stern den Meridian im höchsten Theile seines täglichen Umlaufs erreicht, am kleinsten, wenn er ihn im tiefsten Theile trifft; im ersten Falle sagt man: der Stern befinde sich in seiner oberen, im zweiten, in seiner unteren Culmination.

2. Der scheinbare Ort eines Sternes am Himmel ist die Richtung seiner in unser Auge gelangenden Lichtstrahlen oder der Gesichtslinie, und wird am einfachsten durch zwei Winkel bestimmt. Von diesen ist der eine der Winkel der Gesichtslinie mit einer bekannten Ebene, z. B. der Ebene des Horizonts, und der andere der Winkel zwischen der Projection der Gesichtslinie auf jener Ebene und einer auf dieser Ebene festgestellten geraden Linie, z. B. der Mittagslinie auf dem Horizont. Es ist klar, dass es hier nur auf die gegenseitigen Winkel der verschiedenen Ebenen und Linien, nicht auf die absolute Lage des Sterns oder des Beobachters im Raume ankommt; man kann sich also eine Kugel mit willkürlichem Halbmesser denken und sich auf derselben sowohl grösste Kreise, welche parallel mit den Ebenen des Horizonts, Meridians u. s. w., als auch Radien, welche parallel mit der nach dem Sterne gerichteten Gesichtslinie, mit der Erdachse, mit der Verticallinie u. s. w. sind, vorstellen. Offenbar bilden diese

Kreise und Radien unter einander ganz dieselben Winkel, wie jene Ebenen und Linien im Raume; die Winkel werden alsdann durch gewisse Kreisbögen an der Oberfläche der Kugel gemessen, und alle hierher gehörigen Aufgaben über die Bestimmung gesuchter Winkel durch andere bekannte, können mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie gelöst werden. Der Ort des Mittelpunkts der Kugel kann an jedem beliebigen Punkte des Raumes vorausgesetzt werden; wir können z. B. annehmen, dass dieser Mittelpunkt da sei, wo der Beobachter sich befindet, oder dass er im Mittelpunkte der Erde liege, wo der Aequator durch die Erdachse getroffen wird u. s. w. Die Grösse des Radius der Kugel kommt auch gar nicht in Betracht und wir können ihn beliebig annehmen, z. B. = 1 setzen. Diese Kugel werden wir, der Kürze halber, Himmelskugel oder Himmelssphäre nennen; die Ebenen des Aequators, des Meridians u. s. w. werden dann durch die ihnen parallelen grössten Kreise dieser Kugel dargestellt. Wenn wir uns den Mittelpunkt der Himmelssphäre im Mittelpunkte der Erde denken und uns durch diesen Punkt eine Ebene, parallel mit dem scheinbaren Horizonte, denken, so bekommen wir den sogenannten wahren Horizont des Beobachters. Die Lage des Zeniths, des Weltpols und irgend eines Sterns wird durch die Durchschnittspunkte der Oberfläche der Kugel mit den Radien bezeichnet, von welchen einer die Lothlinie, der andere die Weltachse, der dritte die Gesichtslinie nach dem Sterne zu vorstellt.

Der Halbmesser der Erde ist so ausserordentlich klein im Vergleich mit der Entfernung der Fixsterne, dass es bei der Berechnung von Sternbeobachtungen ganz einerlei ist, ob man den Beobachter im Mittelpunkte der Erde voraussetzt, oder ihn in demjenigen Punkte annimmt, wo er sich wirklich auf der Erde befindet. Die erste Annahme ist desshalb gemacht, weil in unseren Mond-, Sonnen- und Planeten-Tafeln die Lage dieser Gestirne gewöhnlich so gegeben ist, als sähe man sie aus dem Mittelpunkte der Erde; weiterhin werden wir auch zeigen,

wie man die Beobachtungen der Sonne, des Mondes, der Planeten u. s. w. verändern muss, um sie auf den Mittelpunkt der Erde zu reduciren, damit die Resultate der in verschiedenen Gegenden angestellten Beobachtungen mit einander verglichen werden können.

3. Jedem Punkte auf der Erde entspricht ein einziges Zenith, man wird also diesen Punkt bestimmen können, wenn der Ort des Zeniths auf der Himmelskugel gegeben ist; dazu ist es nöthig: 1) die Lage des Zeniths gegen den Weltpol, und 2) die Lage des Meridians, der durch das Zenith geht, zu kennen.

Es sei in der Figur 1 C der Mittelpunkt der Himmelssphäre; ANQ der Aequator an der Himmelssphäre, HMR der dem gegebenen Punkte o auf der Erde entsprechende wahre Horizont, CZ der Radius, welcher nach dem Zenith, und CP der Radius, welcher, parallel mit der Weltachse, nach dem dem Zenith zunächst liegenden Weltpole gerichtet ist. Alsdann misst der Bogen AZ den Winkel, welcher an dem gegebenen Orte von der Lothlinie mit der Ebene des Aequators gebildet wird; dieser Winkel heisst die geographische Breite des Orts, und bestimmt in der Ebene des Meridians $HAZP$ die Lage des gegebenen Punktes auf der Erde zum Aequator. Die Breite ist nördlich, wenn der Ort nördlich vom Aequator liegt, und südlich, wenn er südlich von demselben liegt. Da nun die Lothlinie senkrecht auf dem Horizonte, die Erdachse aber senkrecht auf dem Aequator steht, so wird $AZ + ZP = PZ + PR = 90°$, und folglich $AZ = PR$, d. h. die Breite eines Ortes ist gleich der Höhe des Pols über dem Horizonte.

Um die Lage der Ebene des Meridians zu bestimmen, ist es nur nöthig den Winkel zu messen, welcher von diesem Meridiane mit dem Meridiane eines beliebigen andern, bereits bekannten Ortes gebildet wird. Unter dem ersten Meridiane wird derjenige verstanden, von welchem ab alle anderen gezählt

werden; die Engländer legen ihn durch die Sternwarte zu Greenwich, die Franzosen durch die Pariser Sternwarte, und überhaupt kann man den ersten Meridian willkürlich wählen.

Da alle Meridiane sich in der Umdrehungsachse der Erde durchschneiden und senkrecht auf dem Aequator stehen, so wird der Winkel, den die Ebenen zweier Meridiane mit einander bilden, durch die Anzahl von Graden gemessen, welche in dem, zwischen den beiden Meridianen sich befindenden Bogen des Aequators enthalten sind. Wenn einer dieser Meridiane der erste Meridian ist, so heisst der erwähnte Winkel die geographische Länge des Orts; wenn jedoch keiner von ihnen der erste ist, so wird jener Winkel der Längen-Unterschied genannt.

Wegen der Umdrehung der Erde um ihre Achse tritt jedes Gestirn nach und nach in die Ebene der verschiedenen Meridiane, und zwar erfolgen diese Eintritte früher in die östlicheren als in die westlicheren Meridiane. Daraus erhellt, dass Beobachter, welche sich unter verschiedenen Meridianen befinden, in einem und demselben Augenblicke die Zeit, welche seit dem Eintritte der Sonne oder irgend eines Sterns in ihren Meridian verflossen ist, ganz verschieden zählen müssen. Aber in 24 Stunden vollendet ein Gestirn seine tägliche scheinbare Bahn, und nachdem es auf diese Weise 360° durchlaufen hat, gelangt es wieder in denselben Meridian, in welchem es sich vor 24 Stunden befand. Wenn wir also diese Bewegung als gleichförmig annehmen, so muss ein Gestirn von einem Meridiane zum andern, in jeder Stunde von Osten nach Westen einen Bogen von 15° beschreiben. Will man daher den geographischen Längen-Unterschied zweier Orte bestimmen, so muss man eine Erscheinung beobachten, welche an beiden Orten der Erde in demselben Augenblicke wahrgenommen werden kann, wie z. B. die Verfinsterung eines Jupitertrabanten, und dann die Anzahl der Stunden, Minuten und Secunden genau angeben, die seit dem Mittag oder dem Durchgange eines bestimmten Sterns durch

den Meridian bis zum Eintritt des Phänomens verflossen sind. Der Unterschied der an beiden Beobachtungsorten angegebenen Zeit, in Graden ausgedrückt, 15° auf 1 Stunde gerechnet, giebt den gesuchten Längenunterschied. Uebrigens wird häufig der Längenunterschied unmittelbar in Zeit und nicht in Graden angegeben. Man zählt die Länge vom ersten Meridian aus, sowohl nach Osten, als nach Westen, von 0° oder 0^h bis 180° oder 12^h, wo das Zeichen *h* Stunden bedeutet.

4. Auf ähnliche Weise, wie wir die Lage eines Punkts auf der Erdoberfläche bestimmt haben, kann man nun auch die Lage eines Sterns an der Himmelskugel bestimmen. Man denke sich die Ebene desjenigen grössten Kreises an der Himmelskugel, welcher durch den Stern *E* (Fig. 1) und die beiden Pole des Aequators *P* und *P'* hindurchgeht, und es sei *PEN* der Quadrant, welcher vom sichtbaren Weltpol *P* durch den Stern *E* nach dem Aequator *ANQ* geht; vorausgesetzt, dass *C* der Mittelpunkt der Himmelskugel ist, so wird der Bogen *NE* durch den Winkel *NCE* ausgedrückt, welchen die nach dem Stern gerichtete Gesichtslinie mit der Ebene des Aequators bildet; dieser Winkel heisst die Abweichung oder Declination und der Kreis *PEN* selbst, der Declinationskreis. Alle solche Kreise stehen senkrecht zum Aequator, und wenn ein Stern an den Meridian tritt, so fällt sein Declinationskreis mit dem Meridiane zusammen. Es ist offenbar, dass die Declination des Zeniths, oder der Bogen *AZ* nichts anderes ist, als die geographische Breite des Orts selbst.

Die Declination wird von 0° bis 90° gezählt, und heisst nördlich, wenn das Gestirn sich nördlich vom Aequator befindet; dagegen ist sie südlich, wenn das Gestirn südlich vom Aequator liegt; bei Berechnungen nimmt man die Declination positiv an, wenn sie mit der Breite des Orts gleichnamig ist, im entgegengesetzten Falle aber negativ; auf diese Weise werden die nördlichen Declinationen auf der nördlichen Hälfte der Erde positiv, auf der südlichen aber negativ werden.

Alle Sterne, welche auf der Sphäre in einem und demselben mit dem Aequator parallelen Kreise liegen, haben gleiche Declinationen; will man daher die Richtung einer nach dem Sterne führenden Gesichtslinie vollständig haben, so muss man noch die Lage des Declinationskreises dieses Sternes wissen. Die Astronomen bestimmen nun diese Lage durch den Bogen des Aequators, welcher zwischen dem Declinationskreise und dem Punkt der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche eingeschlossen ist; der letztgenannte Punkt ist derjenige, in welchem der Aequator von der Ekliptik, d. h. von der Ebene der jährlichen Bahn der Erde um die Sonne durchschnitten wird, wenn die Sonne aus dem südlichen in den nördlichen Theil der Ekliptik tritt. Dieser Bogen des Aequators heisst die gerade Aufsteigung, oder die Rectascension des Sterns, und wird vom Frühlingspunkt an, in der Richtung der jährlichen Bewegung der Erde, von Westen durch Süden gegen Osten, und so weiter, gezählt, bis 360° herum. Man findet die gerade Aufsteigung eines Sterns, indem man zu verschiedenen Jahreszeiten, besonders um die Zeit der Tag- und Nachtgleichen, Beobachtungen der Sonne mit denen des Sterns verbindet. Das Nähere hierüber wird in jedem Handbuche der Astronomie erklärt. Meistens drückt man die gerade Aufsteigung, eben so wie die geographische Länge in Zeit aus, wobei man für 15° eine Stunde annimmt, und sie wird gewöhnlich mit den Buchstaben AR (Ascensio recta) bezeichnet.

5. Die Durchgänge der Sterne durch den Meridian, die Beobachtung ihrer Höhe und andere Erscheinungen, welche von der täglichen Bewegung abhängen, können zur Zeitbestimmung benutzt werden. Die gebräuchlichsten Zeitarten sind: die Sternzeit und die Sonnenzeit; wir wollen hier ganz kurz ihre Bedeutung erklären. Der Sterntag ist derjenige Zeitraum, welcher während zweier aufeinanderfolgenden Durchgänge des Frühlingspunkts durch den höheren Theil des Meridians verstreicht, und fängt im Augenblicke des Durchgangs an. Der Sterntag

wird in 24 Stunden, jede Stunde in 60 Minuten u. s. w. getheilt; die Anzahl der seit dem Durchgange des Frühlingspunkts verflossenen Stunden, Minuten u. s. w. heisst die Sternzeit des Tages und wird ununterbrochen bis 24 Stunden oder bis zum Beginn eines neuen Sterntages fortgezählt.

Obgleich der Frühlingspunkt durch nichts Sichtbares am Himmel bezeichnet ist, so wird man doch die Zeit seines Eintritts in den Meridian bestimmen können, sobald man die gerade Aufsteigung eines Sterns kennt. Denn es ist klar, dass der Frühlingspunkt um so viel früher als irgend ein Stern durch den Meridian geht, als die in Zeit ausgedrückte gerade Aufsteigung des Sterns beträgt; wenn aber dieser Stern im Meridian erscheint, so muss sein Declinationskreis mit dem Meridian zusammenfallen, folglich misst dann die gerade Aufsteigung des Sterns den Abstand vom Frühlingspunkt nach Osten bis zum Meridiane; wird nun dieser Abstand in Zeit ausgedrückt, zu 15° auf 1 Stunde gerechnet, so bekommen wir die sogenannte Sternzeit. Wir sehen, dass auf diese Weise während der oberen Culmination irgend eines Gestirns, die Sternzeit der geraden Aufsteigung desselben immer gleich ist. Mit dem weiteren Fortrücken des Gestirns E' (Fig. 2) entfernt sich sein Declinationskreis $PE'M'$ vom Meridian PZM, und bildet mit ihm den Winkel $M'PM = t$, welcher durch den entsprechenden Bogen MM' des Himmelsäquators gemessen wird; verwandelt man diesen Winkel in Zeit, indem man 15° auf jede Stunde rechnet, so erhält man dadurch die Zeit, welche seit dem Durchgange des Sterns durch den Meridian verflossen ist; daher heisst der Winkel selbst der Stundenwinkel und wird von der oberen Culmination nach Westen bis 24 Stunden in der Richtung der scheinbaren täglichen Bewegung der Gestirne gerechnet; so dass also jetzt:

die Sternzeit $=$ AR des Gestirns $+$ Stundenwinkel t in Zeit;

hier bedeutet das Zeichen AR die gerade Aufsteigung des Ge-

stirns, welche für die gesuchte Sternzeit gilt; ist die Summe grösser als 24 Stunden, so muss man 24 Stunden davon abziehen. Man kann auch bei den Stundenwinkeln zwischen westlichen und östlichen unterscheiden, die ersten sind den zweiten entgegengesetzt, da vor der oberen Culmination der Stern im Osten und nach der oberen Culmination im Westen vom Meridian steht. Wenn also zur Sternzeit s ein Gestirn östlich vom Meridian gesehen wird, so ist s kleiner als AR, oder als die Sternzeit der oberen Culmination, und $AR - s$ bezeichnet den östlichen Stundenwinkel t. Man hat also

$s = AR - t$, wenn t ein östlicher Stundenwinkel ist,

$s = AR + t$, wenn t ein westlicher Stundenwinkel ist.

Die scheinbare Umdrehung des Himmels ist so gleichförmig und regelmässig, dass sie uns bequem gleiche Zeitabtheilungen giebt, die zur Berichtigung unserer Uhren dienen und unmittelbar aus Sternbeobachtungen abgeleitet werden können. Man kann die Zeit aber, wenn auch nicht auf so einfache Art, durch die Beobachtung der Sonne messen; der dabei zu Grunde gelegte Zeitraum ist der Sonnentag, welcher mit dem wahren Mittage, oder mit dem Augenblicke des Durchgangs des Mittelpunkts der Sonne durch den Meridian anfängt und bis zum nächsten Mittage fortdauert. Dieser Tag ist ebenfalls in 24 Stunden getheilt, doch sind die Sonnenstunden den Sternstunden nicht gleich. Denn in Folge der jährlichen Bewegung der Erde scheint uns die Sonne täglich bald um etwas mehr, bald um etwas weniger als einen Grad nach Osten fortzurücken; auf die uns sichtbaren Orte der Sterne aber hat diese Bewegung der Erde keinen merklichen Einfluss, weil die Sterne, in Vergleich mit dem Durchmesser der Erdbahn, von uns ausserordentlich weit entfernt sind, so dass die von einem Sterne nach verschiedenen Punkten der Erdbahn gezogenen geraden Linien als parallel unter einander angesehen werden können. Daher gelangt nach jeder Umdrehung der Erde um ihre Achse ein Stern wieder in den Meridian des Beobachters, die Sonne

dagegen gelangt später in den Meridian, zuweilen um mehr, zuweilen um weniger als $3^m\ 56^s$. Während also die Dauer eines wahren Sonnentages überhaupt grösser ist als die Dauer eines Sterntages und zu verschiedenen Jahreszeiten etwas verschieden ausfällt, ist der Sterntag sich immer gleich, da er nur von der Umdrehung der Erde und von dem täglichen, so gut wie gleichmässigen Rückgehen des Frühlingspunkts nach Westen abhängt. Nimmt man an, dass r die tägliche Verspätung der Sonne gegen die Sterne bedeutet, oder genauer, dass r die im Laufe von 24 Sonnenstunden stattfindende Zunahme der in Zeit ausgedrückten geraden Aufsteigung der Sonne ist, so werden die 24 wahren Sonnenstunden um r mehr als die 24 Sternstunden betragen und überhaupt hat man:

$$N \text{ Sonnenstunden} = \left\{ N \text{ Sternstunden} \times \frac{24^h + r}{24^h} \right\}$$

Die tägliche Zunahme der AR der Sonne ist nicht immer gleich, weil erstens die Bewegung der Erde um die Sonne nicht gleichförmig ist, und zweitens, weil die Bewegung nicht parallel der Umdrehung der Erde um ihre Achse erfolgt, sondern in der Ebene der Ecliptik geschieht, welche gegen den Aequator um einen Winkel von $23^\circ\ 27\frac{1}{2}'$ geneigt ist. Wenn man durch die Endpunkte der ungleichen Bögen der Ekliptik, welche die Sonne täglich scheinbar beschreibt, grösste Kreise legt, welche senkrecht auf dem Aequator stehen, so werden die zwischen diesen Kreisen enthaltenen Bögen des Aequators auch mehr oder weniger ungleich sein und die täglichen Zunahmen der AR der Sonne, oder die verschiedenen Verspätungen der Sonne gegen die Sterne während 24 Stunden bezeichnen.

Um nun die Zeit nach gleichförmiger Bewegung so messen zu können, dass sie nicht allzu sehr von der wahren Sonnenzeit abweicht, nehmen die Astronomen eine sogenannte mittlere Sonne an, welche genau in einem Jahre mit gleichförmiger Bewegung den Umfang des Aequators durchläuft, und setzen dabei voraus, dass, wenn die wahre Sonne sich in

der Erdnähe (Perigäum) befindet, alsdann die gerade Aufsteigung der angenommenen Sonne dem Abstande der wahren Sonne in der Ekliptik vom Frühlingspunkte von Westen nach Osten gerechnet, gleich ist. Hierdurch wird man stets leicht den Ort der angenommenen Sonne an der Himmelskugel berechnen können; die Zeit, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen derselben durch einen Meridian verfliesst, heisst ein mittlerer Tag, und der Augenblick des Durchganges durch den Meridian selbst, der mittlere Mittag. Der Unterschied zwischen den geraden Aufsteigungen der wahren und angenommenen Sonne, oder der Zeitunterschied zwischen dem wahren und mittleren Mittage heisst die Zeitgleichung; sie dient zur Verwandlung der wahren Sonnenzeit in mittlere, und umgekehrt, indem man unter wahrer Zeit diejenige versteht, welche durch die scheinbare Bewegung der wahren Sonne gemessen wird. Die Zeitgleichung ändert sich beständig; man findet sie für den Mittag eines jeden Tages im Jahre, in allen astronomischen Jahrbüchern vorausberechnet; für eine andere Zeit erhält man sie durch Interpolation.

Ein mittlerer Tag wird in 24 Stunden getheilt; seine Dauer ist sich immer gleich und übersteigt die des Sterntages um $3^m\ 55^s{,}91$ mittlere, oder $3^m\ 56^s{,}55$ Sternzeit; bezeichnet man daher durch m die Zahl von mittleren Stunden, und durch m_* die Zahl von Sternstunden, welche auf einen und denselben Zeitraum gehen, so ist überhaupt

$$m = m_* \cdot \frac{24^h}{24^h + 3^m\ 56^s{,}55} = m_* \cdot \frac{24^h - 3^m\ 55^s{,}91}{24^h}$$

$$m_* = m \cdot \frac{24^h + 3^m\ 56^s{,}55}{24^h} = m \cdot \frac{24^h}{24^h - 3^m\ 55^s{,}91}$$

oder

$$m = 0{,}997270 \,.\, m_*$$

$$m_* = 1{,}002738 \,.\, m$$

$$1^h \text{ mittl. Zt.} = 1^h + 9^s{,}8565 \text{ Sternzeit.}$$

$$1^h \text{ Sternzeit} = 1^h - 9^s{,}8296 \text{ mittl. Zt.}$$

u. s. w.

Um diese Reduction zu erleichtern, hat man Tafeln berechnet, mit Hülfe deren man bequem jedes Sternzeit-Intervall in das entsprechende in mittlerer Zeit Ausgedrückte verwandeln kann, und umgekehrt.

Aus dem oben Erwähnten lässt sich nun leicht erklären, wie man aus der mittleren oder wahren Sonnenzeit die Sternzeit, oder umgekehrt aus der Sternzeit die anderen Zeitarten ableiten kann.

Es sei L die in Zeit ausgedrückte geographische Länge des Orts, für welche n die gegebene mittlere und s die gesuchte Sternzeit bedeuten; L sei vom Meridian des angewandten Jahrbuches an gezählt, z. B. von Greenwich, wenn man den englischen Nautical Almanac benutzt.

Es ist zuerst nöthig, die Sternzeit M im mittleren Mittage des gegebenen Orts zu finden, oder die Sternzeit für den Augenblick kennen zu lernen, in welchem man dort die mittlere Zeit als Null rechnet. Das astronomische Jahrbuch giebt für das gegebene Datum die Sternzeit M° im mittleren Mittag für den Meridian dieses Jahrbuches; in 24 Stunden mittlerer Zeit vergrössert sich M° von Tag zu Tag um $3^m\ 56^s{,}55$; auf eine Stunde kommt also $9^s{,}8565$, und wenn man L in Stunden ausdrückt, so ist

$$M = M^\circ \pm 9^s{,}8565\ L,$$

wo $+$ für die westliche und $-$ für die östliche Länge zu nehmen ist; nun ist $9^s{,}8565 \,.\, L$ gleich der Anzahl von Secunden, welche man zum Intervall von L Stunden mittlerer Zeit addiren muss, um dasselbe Intervall in Einheiten der Sternzeit auszudrücken; diese Anzahl wird gewöhnlich die Reduction der mittleren Zeit auf Sternzeit genannt und ist in manchen Hülfstafeln gegeben. Man hat also

$$M = M^\circ \pm \text{(Reduction für das Intervall } L \text{ mittl. Z.)}.$$

Da das Intervall n mittlere Zeit gleich ist dem Intervall $n + 0{,}002738 \,.\, n$ in Sternzeit, und $0{,}002738 \,.\, n$ die Reduction bedeutet, welche man aus Tafeln nehmen kann, so wird

die gesuchte Sternzeit s nach der folgenden Gleichung gefunden:

$s = M + n +$ Reduction des Intervalls n auf Sternzeit.

Beispiele: 1) Die Sternzeit zu finden, welche man den 3. Juni 1859 um 7 ^{Uhr} 20^m 32^s,43 mittlere Zeit in der östlichen Länge 2st 30^m 16^s,9 von Greenwich rechnet. Der Nautical Almanac für 1859 giebt

den 3. Juni, Sternzeit im mittleren Greenwicher Mittag = ...	M^0 =	4 ^{Uhr}	45^m	38^s,91
Reduction für die östliche Länge von 2st 30^m 16^s,9				— 24,62
	M =	4	45	14,29
gegebene mittlere Zeit	n =	7	20	32,43
entsprechende Reduction von 7 ^{Uhr} 20^m 32^{s}43, mittlere Zeit		+ 1		12,37
die gesuchte Sternzeit	s =	12 ^{Uhr}	6^m	59^s,09.

2) Es werde unter der östlichen Länge 2st 30^m 16^s,9 die mittlere Zeit gesucht, welche der Sternzeit 12 ^{Uhr} 6^m 59^s,09 am 3. Juni 1859 entspricht. Hier ist

die gegebene Sternzeit	s =	12 ^{Uhr}	6^m	59^s,09
man hat, ebenso wie oben	M =	4	45	14,29
Intervall in St.-Z.	=	7	21	44,80
Reduction dieses Intervalls auf mittl. Zeit		—	1	12,37
verlangte mittlere Zeit	n =	7 ^{Uhr}	20^m	32^s,43.

Um die wahre und die mittlere Zeit gegenseitig zu verwandeln, ist es nur nöthig, die Zeitgleichung für den gegebenen Augenblick aus dem Jahrbuche zu berechnen. Ist w die wahre, n die mittlere Ortszeit, L die geographische Länge des Orts, vom Meridian des Jahrbuches an gezählt, so ist $w \mp L$ die wahre und $n \mp L$ die mittlere Zeit unter dem Meridian des Jahrbuches, wo das Zeichen — für die östliche und das Zeichen + für die westliche Länge zu nehmen ist. Man hat also für $w \mp L$ *w. Z.* oder für $n \mp L$ *m. Z.* die Zeitgleichung aus dem astronomischen Jahrbuch für einen gegebenen Tag des

Monats und Jahres durch Interpolation zu bestimmen. In dem Nautical Almanac ist die Zeitgleichung (Equation of time) gegeben für jeden wahren Greenwicher Mittag (apparent Noon) und für jeden mittleren Greenwicher Mittag auf der linken und rechten Seite der ersten Tafel des Monats. Die Bezeichnungen: „to be added to“ und „to be substracted from apparent time“ deuten an, dass die Zeitgleichung im ersten Fall zur wahren Zeit zu addiren und im anderen Fall davon abzuziehen ist, um die mittlere Zeit zu bekommen. Aehnliche Bezeichnungen bei den Angaben der Zeitgleichungen für die mittleren Greenwicher Mittage, nebst den stündlichen Veränderungen der Zeitgleichung, dienen zur Verwandlung der mittleren Zeit in wahre Zeit. — In dem Berliner astronomischen Jahrbuche ist die Zeitgleichung für jeden mittleren Berliner Mittag gegeben, unter der Benennung: „Mittlere Zeit — wahre Zeit“.

Wenn man die wahre Ortszeit kennt und die Sternzeit zu bestimmen sucht, so wird es am einfachsten sein, die Zeitgleichung zu berechnen, die wahre Zeit in mittlere Zeit zu verwandeln und dann die Sternzeit zu bestimmen, wie oben gezeigt ist. Man kann auch anders verfahren: man sucht zuerst die wahre AR der Sonne (oder die gerade Aufsteigung) für die wahre Zeit des astronomischen Jahrbuches:

$$\text{wahre Ortszeit} \mp L,$$

wo L die geographische Länge des Orts bedeutet, in Zeit ausgedrückt, und vom Meridian des astronomischen Jahrbuches gezählt; das Zeichen — gilt für die östliche und $+$ für die westliche Länge. Alsdann hat man:

$$\text{Sternzeit} = AR \text{ der Sonne} + \text{wahre Zeit},$$

da die wahre Zeit nichts anderes ist als der in Zeit ausgedrückte Stundenwinkel der Sonne, und die AR die ebenfalls in Zeit ausgedrückte gerade Aufsteigung der Sonne; folglich muss die Summe AR der Sonne $+$ wahre Zeit dem in Zeitmass gegebenen Stundenwinkel des Frühlingspunkts gleich sein, oder gleich der Sternzeit.

6. Die Lage eines Gestirns kann unmittelbar aus Beobachtungen gefunden werden, wenn man zu einer bekannten Zeit die beiden folgenden Winkel bestimmt: 1) die Höhe des Gestirns und 2) den Winkel, welchen der durch den Stern gehende Verticalkreis mit dem Meridiane bildet, und welcher das Azimuth genannt wird; dabei muss angedeutet werden, nach welcher Richtung es vom Meridiane ab gerechnet wird. Ist aber der Ort eines Gestirns bereits durch seine gerade Aufsteigung und Abweichung gegeben, so wird der Zweck der Beobachtung nur darin bestehen, entweder den Beobachtungspunkt auf der Erdoberfläche zu bestimmen, oder die Zeit zur Regulirung der Uhren zu messen, oder auch das Azimuth zu finden, welches die Richtung irgend einer Linie auf der Erde zeigen muss.

Diese Bestimmungen bilden den Gegenstand dieses Buches, und wir bemerken vorläufig, dass die meisten der hierher gehörigen Fragen durch die Betrachtung des sphärischen Dreiecks aufgelöst werden können, welches vom sichtbaren Pol P des Aequators, vom Zenith Z und vom Gestirn E (Fig. 1) gebildet wird. Es ist also zweckmässig, hier die bekannten Formeln mitzutheilen, welche das Verhalten der einzelnen Theile dieses Dreiecks zu einander ausdrücken; zugleich wollen wir auch, um unnöthige Wiederholungen zu vermeiden, die Bezeichnungen erwähnen, welche wir in Zukunft beibehalten wollen. Die geographische Breite wird als nördlich angenommen.

Die Seite PZ ist die Ergänzung der Polhöhe; die Seite PE die Ergänzung der Abweichung; und die Seite EZ die Ergänzung der Höhe des Gestirns zu 90°; EZ ist also die Zenithdistanz des Gestirns, d. h. der Winkel zwischen der Lothlinie und der vom Beobachter nach dem Stern gerichteten Gesichtslinie. Bezeichnet man nun die Polhöhe oder die geographische Breite des Orts durch φ, die Abweichung des Gestirns durch δ, seine Zenithdistanz durch z, seine Höhe durch h, den Stundenwinkel des Gestirns durch t, von der oberen Culmination von Süden

durch Westen bis 360° gezählt; das von Norden nach Osten bis 360° gezählte Azimuth durch A; das von Süden nach Westen, nach der Richtung der täglichen Bewegung der Sterne gezählte Azimuth durch a, und setzt man endlich den Winkel PEZ welcher in dem Dreiecke von den beiden Seiten PE und EZ gebildet wird und parallactischer Winkel heisst, gleich q (der aber stets kleiner als 180° angenommen werden, soll) so erhält man in dem sphärischen Dreiecke PEZ:

die Seiten: $PZ = 90° - \varphi$; $PE = 90° - \delta$; $EZ = z = 90° - h$.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Abweichung δ positiv ist, oder gleichnamig mit der geographischen Breite φ; ist δ negativ, z. B. südlich bei nördlicher Breite, so wird $PE = 90° + \delta$.

Ferner erhält man die Winkel:

$PEZ = q$; $ZPE = t$; $PZE = 360° - A = 180° - a$ — wenn das Gestirn im Westen ist,

$PEZ = q$; $ZPE = 360° - t$; $PZE = A = a + 180°$ — wenn das Gestirn im Osten ist.

(Wenn α und s resp. die in Bogen ausgedrückte gerade Aufsteigung des Gestirns und die Sternzeit bezeichnen, so ist $t = s - \alpha$. Für die Sonne wird $t =$ der wahren Zeit, in Bogen ausgedrückt.)

Folglich wird man überhaupt haben:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \quad \ldots \quad (1)$$

$$-\sin z \sin A = \sin z \sin a = \cos\delta \sin t \quad \ldots \quad (2)$$

$$-\sin z \cos A = \sin z \cos a$$

$$= -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t \quad \ldots \quad (3)$$

$$\sin z \sin q = \cos\varphi \sin t \quad \ldots \quad (4)$$

$$\sin z \cos q = \sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos t \quad \ldots \quad (5)$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)\, tg \tfrac{1}{2}(a - q) = tg \tfrac{1}{2} t \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta) \quad \ldots \quad (6)$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \delta)\, tg \tfrac{1}{2}(a + q) = tg \tfrac{1}{2} t \cos \tfrac{1}{2}(\varphi + \delta) \quad \ldots \quad (7)$$

$$\cos q = \sin\varphi \sin a \sin t + \cos a \cos t \quad \ldots \quad (8)$$

$$\sin\varphi = \cos\delta \sin z \cos q + \sin\delta \cos z \quad \ldots \quad (9)$$

$$\sin\delta = \cos z \sin\varphi - \sin z \cos\varphi \cos a \quad \ldots \quad (10)$$

Wenn wir den Stundenwinkel t' von der oberen Culmination des Gestirns nach Osten und nach Westen vom Meridian be-

sonders zählen und das Azimuth A' vom sichtbaren Westpol ebenfalls nach Osten und Westen bis 180° rechnen, so hat man:

$$Sin\ A' = \frac{sin\ t'\ cos\ \delta}{sin\ z};\ tg\ A' = \frac{sin\ t'}{tg\ \delta\ cos\ \varphi - sin\ \varphi\ cos\ t'};$$

die erste von diesen Gleichungen wird gebraucht, wenn A' sehr von 90° abweicht. Ist δ negativ (südlich bei nördlicher geographischer Breite, oder nördlich bei südlicher Breite), so ist A' ein stumpfer Winkel; wenn δ positiv ist (gleichnamig mit der geographischen Breite) und grösser als φ, so bedeutet A' einen spitzen Winkel; ist aber δ positiv und kleiner als φ, so wird A' ein spitzer Winkel sein so lange $cos\ t' > \frac{tg\ \delta}{tg\ \varphi}$; er ist stumpf, wenn $cos\ t' < \frac{tg\ \delta}{tg\ \varphi}$ wird.

Es sei .... $tg\ y = cotg\ \delta\ cos\ t'$;
alsdann wird

$$cos\ z = \frac{sin\ \delta\ sin\ (\varphi + y)}{cos\ y};\ tg\ A' = \frac{tg\ t'\ sin\ y}{cos\ (\varphi + y)}.$$

Häufig ist es nöthig die Höhe des Polarsterns (α Ursae min.) zu kennen; am bequemsten findet man diese Höhe mit Hülfe der Tafeln, welche in jedem Jahrgange des englischen Nautical Almanac gegeben sind, um die Polhöhe φ aus der Höhe des Polarsterns zu berechnen. Die Construction dieser Tafeln werden wir später erklären; hier ist hinreichend zu bemerken, dass, wenn wir durch (I), (II) und (III) die Zahlen bezeichnen, welche aus der ersten, aus der zweiten und aus der dritten dieser Tafeln zu entnehmen sind, so wird:

$$\varphi = h - (1' \text{ oder } 2')^{*}) + (I) + (II) + (III);$$

in der Einleitung der Nautical Almanac's ist immer angegeben, ob man 1′ oder 2′ zu nehmen hat. Das Argument für die erste Tafel ist die gegebene Sternzeit, für welche die Höhe h des Polarsterns verlangt wird; die zweite Tafel ist für zwei Argumente construirt: die Sternzeit und die Höhe des Polarsterns;

*) Das Abziehen dieser Grösse von h dient dazu, die Correctionen (I), (II) und (III) positiv zu machen.

statt dieser Höhe kann man aber die Polhöhe annehmen. Die dritte Tafel hat ebenfalls zwei Argumente: die Sternzeit und das Datum des Monats und Jahres, für welches man die Höhe sucht. Hat man (I), (II), (III) für die gegebene Sternzeit und Polhöhe aus den Tafeln entnommen, so ist die gesuchte Höhe

$$h = \varphi + (1' \text{ oder } 2') - \{(I) + (II) + (III)\}.$$

Das Azimuth A' des Polarsterns wird leicht aus der Gleichung

$$\sin A' = \frac{\sin t' \cos \delta}{\cos h}$$

gefunden; wenn s und α die in Bogen ausgedrückte Sternzeit und gerade Aufsteigung des Sterns bedeuten, so ist

$t = s - \alpha$, wenn der Stern im Osten steht,

$t = \alpha - s$, wenn der Stern im Westen steht.

7. Die geraden Aufsteigungen und Abweichungen der Sonne, des Mondes und der Planeten werden für die verschiedenen Tage des Jahres in allen guten astronomischen Jahrbüchern gegeben, unter welchen der Nautical Almanac sich durch seine grosse Vollständigkeit ganz besonders auszeichnet. Man kann aber die Orte der erwähnten Gestirne unmittelbar aus den astronomischen Tafeln berechnen; die Tafeln der Sonne von Leverrier und die des Mondes von Hansen sind jetzt die gebräuchlichsten.

Die scheinbaren Orte von vielen sogenannten Fundamental-Sternen werden jährlich für verschiedene Tage des Jahres im Nautical Almanac, im Berliner astronomischen Jahrbuch und in der Connaissance des temps gegeben. Die Positionen anderer Sterne kann man in den vortrefflichen Sternverzeichnissen der Sternwarten von Greenwich und Pulkowa und anderen von Argelander, Bessel, Struve u. a. m. finden, wo die mittleren Orte der Sterne für eine gewisse Zeitepoche gegeben werden. Argelanders Verzeichniss von 560 Sternen enthält auch in der grössten Vollständigkeit alle Hülfsmittel, die zur bequemen Berechnung der scheinbaren Orte dieser Sterne dienen können. Was die nördlichen Circumpolar-Sterne anbelangt, so sind die

Oxfordschen Cataloge von M. S. Johnson und H. Main besonders bemerkenswerth. Man kann sich auch mit Vortheil des grossen Cataloges der British Association for Advancement of Science bedienen, welcher von Baily ausgearbeitet wurde und die mittleren Orte von 8377 Sternen für das Jahr 1850, nebst Hülfsmitteln für die Berechnung ihrer scheinbaren Positionen enthält; übrigens ist die Lage mancher Sterne in diesem Cataloge etwas ungenau angegeben.

Die scheinbaren Orte der Fixsterne erleiden nach und nach kleine Veränderungen, welche abhängig sind vom Vorrücken der Tag- und Nachtgleichen, oder von der Präcession, von der eigenen Bewegung der Sterne, von der Aberration und von der Nutation. Die Bestimmung dieser Aenderungen geschieht nach sehr bequemen Formeln von Bessel und Gauss, welche im Nautical Almanac und im Berliner astronomischen Jahrbuch immer angeführt werden; man findet sie auch am Ende dieses Buches. Die Resultate der Berechnung hängen aber von gewissen numerischen Coefficienten ab, welche bis jetzt noch nicht ganz übereinstimmend in den astronomischen Ephemeriden angenommen werden. Die bedeutendsten Unterschiede beziehen sich auf die Constanten der Aberration und der Nutation; in dem Berliner astronomischen Jahrbuche, im Nautical Almanac und der Connaissance des temps (übereinstimmend mit Struve und Peters) ist die Aberrations-Constante $= 20'',4451$ und die Nutations-Constante $= 9'',2235$ angenommen.

8. Es ist bekannt, dass, wenn ein Lichtstrahl in unsere Atmosphäre tritt, er in den verschiedenen Luftschichten eine Brechung erleidet, wodurch die Höhe jedes Gestirns grösser erscheint, als es sonst der Fall sein würde; diese Zunahme der Höhe wird die astronomische Strahlenbrechung oder Refraction genannt. Das schwierige Problem der Berechnung der Refraction ist zuerst mit Genauigkeit von Kramp in seiner „Analyse des refractions astronomiques et terrestres“ und noch befriedigender von Laplace in der „Mécanique celeste“, T. IV gelöst

worden. Später haben Ivory, Bessel, Gyldén und andere berühmte Forscher die Theorie der Refraction theils vereinfacht, theils durch neue Entwickelungen bereichert. Die Bessel'schen Refractions-Tafeln sind jetzt die gebräuchlichsten; sie sind in den Tabulis Regiomontanis, S. 538ff. und in der Sammlung allgemeiner Hülfstafeln von C. F. W. Peters gegeben, wo man auch die Strahlenbrechungen in der Nähe des Horizonts nach Argelanders Beobachtungen findet. Hoch geschätzt wegen ihrer Genauigkeit sind die Tafeln von W. Struve (Observ. Dorpat., Vol. VI) und von H. Gyldén, welche sich auf die Beobachtungen der Pulkowaer Sternwarte gründen.

In den Refractionstafeln sind vollständige Anweisungen gegeben, wie man für jede bestimmte Höhe oder Zenithdistanz die entsprechende Refraction zu finden hat. Wir bemerken nur, dass es sehr wichtig ist, bei den Beobachtungen den Zustand der Luft genau anzugeben, d. h. die Temperatur der Luft, durch die Angabe des äusseren oder im Freien sich befindenden Thermometers zu bemerken, ebenso den Luftdruck durch die Höhe des Quecksilbers im Barometer zu messen, und den Wärmezustand dieses Instruments durch das mit ihm verbundene, sogenannte innere Thermometer aufzuzeichnen. Sowohl Thermometer als Barometer müssen stets im Schatten aufgehängt sein und dürfen nicht dem directen Einflusse der Sonnenstrahlen ausgesetzt werden, denn im entgegengesetzten Falle würden ihre Angaben unbrauchbar sein.

9. In den astronomischen Tafeln und Ephemeriden werden die Oerter der Sonne, des Mondes und der Planeten etc. so gegeben, als sähe man diese Gestirne aus dem Mittelpunkte der Erde. Um daher diese Angaben benutzen zu können, ist es nöthig, den Winkel zu kennen, welcher von den zwei Linien gebildet wird, die aus dem Mittelpunkte des Gestirns nach dem Beobachtungsorte und nach dem Centrum der Erde gehen. Ein solcher Winkel wird gewöhnlich die Parallaxe genannt.

Es sei C der Mittelpunkt der Erde (Fig. 3), O der Ort des

Beobachters auf der Erdoberfläche, S der Mittelpunkt des Gestirns und Z' der Punkt, wo die Verlängerung der Linie, welche vom Centrum der Erde nach dem Beobachter in O geht, die Himmelssphäre trifft; dieser Punkt ist in der Astronomie unter dem Namen des geocentrischen Zeniths bekannt. Nehmen wir nun an, dass die Beobachtung bereits von Strahlenbrechung befreit sei, so wird alsdann das Gestirn S, von O aus nach der Richtung der Linie OS, von C aus aber nach der Richtung der Linie CS wahrgenommen werden. Den Winkel $Z'OS$, oder die sogenannte scheinbare Entfernung des Gestirns vom geocentrischen Zenithe setze man $= z'$, den Winkel $Z'CS$ dagegen, welcher die wahre Distanz des Gestirns vom geocentrischen Zenith heisst, bezeichne man mit z; alsdann wird der Winkel $OSC = Z'OS - Z'CS = z' - z$ werden; setzt man nun der Kürze wegen $OSC = p$, so drückt p aus, um wie viel Minuten und Secunden das Gestirn dem Beobachter weiter vom Zenith ab erscheint, als wenn es vom Mittelpunkte der Erde aus gesehen würde. Setzt man nun die liniäre Entfernung des Centrums des Gestirns vom Centrum der Erde $= CS = d$; die Entfernung des Beobachters vom Centrum der Erde $= CO = r$, so erhält man aus dem ebenen Dreiecke OSC, dessen Seiten $CS = d$, $CO = r$, und Winkel $SOC = 180° - z'$, $OSC = p$ sind:

$$\sin p = \frac{r}{d} \sin z'.$$

Wenn $z' = 90°$ wird, so erlangt $OSC = p$ seinen grössten Werth und wird die Horizontal-Parallaxe genannt; setzt man sie gleich π, so hat man:

$$\sin \pi = \frac{r}{d} \text{ und } \sin p = \sin \pi \sin z'; \; z = z' - p.$$

Kennt man daher π und z', so wird man p und z leicht berechnen können; wenn dagegen π und z gegeben sind, und man wünscht p und z' zu finden, so hat man zur Bestimmung von

p folgende Gleichung: $\sin p = \sin \pi \sin (z + p)$, woraus alsdann folgt:

$$tg\, p = \frac{\sin \pi \sin z}{1 - \sin \pi \cos z}$$

oder vermittelst einer bekannten Umformung findet man*):

$$p = \frac{\sin \pi \sin z}{\sin 1''} + \frac{\sin^2 \pi \sin 2z}{2 \sin 1''} + \frac{\sin^3 \pi \sin 3z}{3 \sin 1''} + \dots\dots$$

p ist hier in Secunden ausgedrückt, und diese drei Glieder reichen stets aus, sogar noch beim Monde, dessen Horizontal-Parallaxe π stets kleiner als 62′ ist.

Wenn die Erde genau kugelförmig wäre, so würde jeder Erdhalbmesser senkrecht auf der Erdoberfläche stehen, und das geocentrische Zenith, welches in der Richtung des Erdradius liegt, würde genau zusammenfallen mit dem scheinbaren Zenithe, welches durch die Lothlinie bestimmt wird. Nimmt man nun an, dass Oh' (Fig. 3) der scheinbare Horizont ist; Ch aber der wahre, so wird $SOh' = 90° - z'$ die scheinbare Höhe, und $SCh = 90° - z$, die wahre Höhe des Gestirns sein; der Winkel $OSC = p$ ist alsdann gleich dem Unter-

*) Ueberhaupt hat man, wenn $tg\, q = \frac{x \sin z}{1 - x \cos z}$, und q und x so klein sind, dass man sich auf Glieder der 3. Ordnung von q und x beschränken kann:

$tg\, q = x \sin z + x^2 \sin z \cos z + x^3 \sin z \cos^2 z$ und $q = tg\, q - \frac{1}{3} tg^3 q$;
folglich:

$$q = x \sin z + \frac{x^2}{2} \sin 2z + x^3 \sin z \cos^2 z - \tfrac{1}{3}(x \sin z + \dots)^3,$$

oder:

$$q = x \sin z + \frac{x^2}{2} \sin 2z + \frac{x^3}{3} \sin z (3 \cos^2 z - \sin^2 z) + \dots\dots$$

$$q = x \sin z + \frac{x^2}{2} \sin 2z + \frac{x^3}{3} \sin 3z + \dots\dots$$

Hier drückt q die Länge des Bogens in Theilen des Radius aus; um daher q in Secunden auszudrücken, muss man die vorhergehende Gleichung noch durch $\sin 1''$ dividiren, und alsdann erhält man:

$$q = \frac{x \sin z}{\sin 1''} + \frac{x^2 \sin 2z}{2 \sin 1''} + \frac{x^3 \sin 3z}{3 \sin 1''} + \dots\dots$$

schiede der wahren und scheinbaren Höhe des Gestirns, und zeigt uns, um wie viel die erstere grösser als die zweite ist: der Winkel p selbst wird die Höhen-Parallaxe genannt.

10. Durch die Parallaxe ändert sich auch der scheinbare Halbmesser des Gestirns. Nimmt man an, dass das Gestirn S (Fig. 3) kugelförmig ist, und zieht alsdann von O und C aus die beiden Tangenten $O\,i'$ und $C\,i$; so wird, wenn man $i'\,O\,S = R'$ und $i\,C\,S = R$ setzt, R' der scheinbare und R der wahre Winkelhalbmesser des Gestirns sein, und daher

$$\sin R' : \sin R = C\,S : O\,S, \text{ oder:}$$
$$\sin R' : \sin R = \sin z' : \sin z.$$

11. Die Ebene des Meridians geht durch die Erdachse $p\,C\,p'$ (Fig. 4) und durch den Ort des Beobachters in O; daher liegt das geocentrische Zenith stets in der Ebene des Meridians. Der Durchschnitt der Meridian-Ebene mit der Oberfläche der Erde ist eine Ellipse $a'p\,a\,p'$, deren kleine Achse $p\,p'$ die Erdachse, und deren grosse Achse $a\,a'$ gleich dem Durchmesser des Erd-Aequators ist. Die Ebene, welche das Erd-Sphäroid in O berührt, ist der scheinbare Horizont, auf welchem die Richtung der Lothlinie $Z\,O\,N$, die am Himmel den Ort des scheinbaren Zeniths bestimmt, senkrecht steht. Da die Linie $a'\,a$ der Durchschnitt des Meridians mit dem Aequator ist, so ist offenbar der Winkel $O\,N\,a = \varphi$ die geographische Breite des Orts. Die Verlängerung des Radius $O\,C$ bestimmt am Himmel den Ort des geocentrischen Zeniths Z' und der Winkel $O\,C\,a = \varphi'$, welcher die Neigung des Radius $O\,C$ gegen den Aequator ausdrückt, heisst die geocentrische Breite des Orts O. Die Lothlinie $N\,O$ ist die Normale an die Ellipse für den Punkt O; und wenn man von O aus das Perpendikel $O\,U$ auf $C\,a$ fällt, so wird der Ort des Punktes O im Meridian, durch die Abscisse $C\,U = x$ und Ordinate $O\,U = y$ bestimmt. Es sei ferner die grosse Halbachse $C\,a = a$, die kleine Halbachse $C\,p = b$; so ist bekanntlich in der Ellipse die Subnormale $N\,U = \frac{b^2}{a^2} \cdot x$, aber:

$$OU = NU\, tg\, ONU = CU\, tg\, OCU$$ oder:

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot x\ tg\,\varphi = x\ tg\,\varphi'$$; folglich:

$tg\,\varphi' = \frac{b^2}{a^2} \cdot tg\,\varphi$; setzt man nun $a^2\, e^2 = a^2 - b^2$, so wird:

$$tg\,(\varphi - \varphi') = \frac{tg\,\varphi - tg\,\varphi'}{1 + tg\,\varphi\, tg\,\varphi'} = \frac{e^2 \sin\varphi \cos\varphi}{1 - e^2 \sin^2\varphi}$$

$$= \frac{\dfrac{\frac{1}{2} e^2 \sin 2\varphi}{1 - \frac{1}{2} e^2}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2} e^2 \cos 2\varphi}{1 - \frac{1}{2} e^2}}$$

Da bekanntlich e^2 ein sehr kleiner Werth ist, so kann man folglich ohne merklichen Fehler annehmen, dass:

$$\varphi - \varphi' = \frac{\frac{1}{2} e^2}{1 - \frac{1}{2} e^2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\sin 1''} - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2} e^2}{1 - \frac{1}{2} e^2}\right)^2 \cdot \frac{\sin 4\varphi}{\sin 1''} \ \ldots\ldots$$

Aus A. R. Clarkes Untersuchung über die Gestalt der Erde findet man:

$$e^2 = 0{,}006785.$$

Man kann auch $\varphi - \varphi'$ vermittelst der Abplattung der Erde $\frac{a - b}{a} = \mu$ ausdrücken; alsdann ist: $\mu = \frac{1}{294{,}5}$

$$\varphi - \varphi' = \frac{\mu}{2} (2 + \mu) \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\sin 1''} - \frac{\mu^2}{2} \cdot \frac{\sin 4\varphi}{\sin 1''} + \ldots\ldots$$

$$= 701'',6 \,.\, \sin 2\varphi - 1'',19 \,.\, \sin 4\varphi \ \ldots\ldots$$

Alle parallactischen Berechnungen beziehen sich auf das geocentrische Zenith, und daher muss man bei diesen Berechnungen stets die geocentrische und nicht die geographische Breite brauchen.

12. Aus den Beobachtungen findet man unmittelbar die Zenithdistanz $ZS' = \zeta'$, oder den Abstand des scheinbaren Orts des Gestirnes S' (Fig. 5) vom scheinbaren Zenithe Z; dagegen bestimmt man die Zenithdistanz $Z'S' = z'$ in Beziehung auf das geocentrische Zenith Z' durch Berechnung. Beide Zenithe Z' und Z liegen im Meridiane, und immer steht Z' weiter vom Pol des Aequators P ab als Z; es wird folglich bei nördlicher Breite der Winkel $Z'ZS' = a$, das scheinbare Azimuth des Gestirns von Süden aus gezählt, wie es unmittelbar aus den Be-

obachtungen folgt, ausdrücken. Fällt man nun aus Z' den Bogen $Z'X$ senkrecht auf ZS', so wird man alsdann das kleine sphärische Dreieck $Z'XZ$, dessen Seite ZZ' niemals grösser als 12′ sein wird, als geradlinigt annehmen können, ohne einen merklichen Fehler zu begehen; dann ist aber $ZX = \zeta' - z'$; ferner $ZX = ZZ' \cos Z'ZS'$ und $ZZ' = \varphi - \varphi'$, folglich:

$$\zeta' - z' = (\varphi - \varphi') \cos a.$$

13. Es ist leicht einzusehen, dass die Parallaxe ein Gestirn nicht aus der Ebene desjenigen grössten Kreises herausbringt, welcher durch das Gestirn S' und das geocentrisehe Zenith Z' geht; wenn daher S' der scheinbare Ort des Gestirns (Fig. 5) ist, so liegt der wahre Ort S, oder derjenige, an welchem das Gestirn vom Centrum der Erde aus erscheint, in dem grössten Kreise $Z'S'$.

Legt man durch das scheinbare Zenith Z die Bögen ZS' und ZS, so wird der von ihnen eingeschlossene Winkel $SZS' = \triangle a$ die Parallaxe in Azimuth ausdrücken. Aus den sphärischen Dreiecken $SS'Z$ und $ZZ'S'$ findet man:

$$\frac{\sin SS'}{\sin ZS} = \frac{\sin \triangle a}{\sin SS'Z} \text{ und } \frac{\sin ZZ'}{\sin Z'S'} = \frac{\sin SS'Z}{\sin a}.$$

Aber es ist $ZS = \zeta$, $Z'S' = z'$, $ZZ' = \varphi - \varphi'$, $\sin SS' = \sin \pi \sin z'$, wo π die Horizontal-Parallaxe bezeichnet, folglich:

$$\sin \triangle a = \frac{\sin \pi \sin a \sin (\varphi - \varphi')}{\sin \zeta}.$$

Hierfür kann man mit hinlänglicher Genauigkeit in den meisten Fällen annehmen:

$$\triangle a = (\varphi - \varphi') \cdot \frac{\sin \pi \sin a}{\sin \zeta}.$$

14. Der Sinus der Horizontal-Parallaxe π ist dem zugehörigen Halbmesser der Erde r proportional; unter dem Aequator nimmt π seinen allergrössten Werth an, welcher die Aequatorial-Horizontal-Parallaxe genannt wird; sie sei $= \Pi$,

so folgt alsdann aus den Gleichungen $\sin \pi = \frac{r}{d}$ und $\sin \Pi = \frac{a}{d}$, die folgende:

$$\sin \pi = \sin \Pi \cdot \frac{r}{a},$$

wo a der Halbmesser der Erde am Aequator oder die halbe grosse Achse der Erde ist, und r den Halbmesser der Erde am Beobachtungsorte bezeichnet. Wird dieses angenommen, und dieselbe Bezeichnung wie in § 11 beibehalten, so findet man aus (Fig. 4), dass $r^2 = x^2 + y^2$, wo $y = NU\, tg\, \varphi = \frac{b^2}{a^2} x\, tg \varphi$; aber aus der Gleichung der Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, folgt alsdann:

$$r^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2\ tg^2\ \varphi};\ y^2 = \frac{b^4\ tg^2\ \varphi}{a^2 + b^2\ tg^2\ \varphi};\ r^2 = \frac{a^4 + b^4\, tg^2\, \varphi.}{a^2 + b^2\, tg^2\, \varphi}$$

Nimmt man nun $a^2\ e^2 = a^2 - b^2$ an, und vernachlässigt wegen der Kleinheit von e^2 die Glieder, welche mit e^4, e^6 u. s. w. multiplicirt sind, so findet man:

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi = 1 - \mu \sin^2 \varphi;\ \Pi - \pi = \Pi\, \mu \sin^2 \varphi.$$

Bemerkt man ferner, dass $x = r \cos \varphi'$ und $y = r \sin \varphi'$, so erhält man aus den vorhergehenden Ausdrücken für x^2 und y^2 die strengen Gleichungen:

$$r \cos \varphi' = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}};\ r \sin \varphi' = \frac{a\ (1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Setzt man:

$$\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \cos \varphi'',\ \frac{\sqrt{1 - e^2}\ \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \sin \varphi'';$$

so wird:

$$r \cos \varphi' = a \cos \varphi'',\ r \sin \varphi' = \sqrt{1 - e^2} \sin \varphi''.$$

$tg\, \varphi'' = \sqrt{1 - e^2}\, tg\, \varphi;\ \log \sqrt{1 - e^2} = 9{,}99852 - 10.$ Es sei

$$e = \sin u,$$

so erhält man:

$$\varphi - \varphi'' = \frac{tg^2 \frac{1}{2} u}{\sin 1''} \cdot \sin 2\varphi - \frac{tg^4 \frac{1}{2} u}{2 \sin 1''} \cdot \sin 4\varphi + \frac{tg^6 \frac{1}{2} u}{3 \sin 1''} \cdot \sin 6\varphi \ldots.$$

$$= 351'',07 . \sin 2\varphi - 0'',299 . \sin 4\varphi + \ldots..$$

15. Wir wollen nunmehr untersuchen, wie man bei Gestirnen die Parallaxe in gerader Aufsteigung und Abweichung berechnet; bezeichnen wir hierzu die wahre gerade Aufsteigung und Abweichung des Gestirns, wie sie von einem Beobachter vom Centrum der Erde aus erblickt würden, und wie sie in den astronomischen Ephemeriden gegeben werden, durch α und δ, die scheinbare gerade Aufsteigung und Abweichung dagegen, wie sie vom Beobachtungsorte auf der Erdoberfläche aus gesehen werden, durch α' und δ', so wird man die Parallaxen $\alpha' - \alpha$ und $\delta' - \delta$ bequem nach der folgenden, von Olbers herrührenden Methode bestimmen können.

Man denke sich in der Ebene des Aequators XCY (Fig. 6) eine gerade Linie CX durch den Mittelpunkt der Erde C so gelegt, dass sie an der Himmelskugel einen Punkt X treffe, dessen gerade Aufsteigung einer willkürlichen Grösse k gleich sei; diese gerade Linie wollen wir nun zur Coordinatenaxe der positiven x wählen; die Achse der positiven Ordinaten y sei eine auf ihr senkrechte gerade Linie CY, die ebenfalls in der Ebene des Aequators liege, und die an der Himmelskugel einen Punkt treffe, dessen gerade Aufsteigung $90° + k$ sei; endlich sei die Achse der positiven Ordinaten z, die auf beiden senkrechtstehende Linie CP, welche durch den Mittelpunkt der Erde C und den sichtbaren Pol des Aequators P gehe. Aus dem Mittelpunkte des Gestirns S fälle man auf die Ebene XCY das Perpendikel $SN = z$, und alsdann aus seinem Endpunkte N auf die Linie CX ein Perpendikel $Nn = y$, endlich sei $Cn = x$. Wir werden x positiv von C aus gegen die gerade Aufsteigung k hin zählen, y sei positiv von C aus gegen $90° + k$ und endlich z positiv von C aus gegen den sichtbaren, das heisst für uns den Nordpol. Nun werden diese drei Senkrechten x, y, z, welche Coordinaten genannt werden, die Lage des Centrums des Gestirns in Bezug auf das Centrum der Erde bestimmen. Bezeichnet man daher die Entfernung dieser beiden Mittelpunkte CS durch d, so hat man in dem bei N rechtwinklichten Drei-

ecke CNS die Seite $CS = d$, $NS = z$ und Winkel SCN, welcher die Neigung der Linie CS gegen den Aequator bestimmt $= \delta$; folglich ist $CN = d \cos \delta$, $z = d \sin \delta$. Im Dreiecke CnN, welches bei n rechtwinklicht ist, ist der Winkel $nCN = \alpha - k$, folglich $Nn = y = CN \sin (\alpha - k) = d \cos \delta \sin (\alpha - k)$ und $Cn = x = d \cos \delta \cos (\alpha - k)$.

Es sei O der Ort des Beobachters auf der Erdoberfläche, so wird die Verlängerung des Erdhalbmessers $CO = r$ die Himmelskugel in einem Punkte Z' treffen, welcher das geocentrische Zenith sein wird; PCZ' wird alsdann der Meridian des Beobachters sein, welcher senkrecht auf dem Aequator steht, und ihn in einer Linie CM durchschneidet, die durch einen Punkt des Himmelsäquators geht, dessen gerade Aufsteigung der geraden Aufsteigung des Zeniths, oder der Sternzeit s gleich ist, wobei diese gerade Aufsteigung in Graden, deren 15 auf 1 Stunde gehen, ausgedrückt wird. Fällt man von O aus auf die Ebene YCX die Senkrechte OM, und von ihrem Endpunkte M aus die Linie Mm senkrecht auf CX, so werden die Coordinaten $OM = \zeta$, $Mm = \eta$ und $Cm = \xi$ die Lage des Beobachtungsortes O gegen den Mittelpunkt der Erde bestimmen. Die Dreiecke COM und CMm sind bei M und m rechtwinklicht; der Winkel OCM ist die geocentrische Breite des Orts $= \varphi'$, der Winkel mCM ist gleich dem Unterschiede der geraden Aufsteigung des Zeniths und der Linie CX, oder $= s - k$, die Seite CO endlich $= r$; folglich haben wir:

$$\zeta = r \sin \varphi', \eta = r \cos \varphi' \sin (s - k), \xi = r \cos \varphi' \cos (s - k).$$

Verlegt man jetzt den Ursprung der Coordinaten von C nach dem Punkte O, und legt durch diesen Punkt die neuen Coordinaten-Achsen OX', OY', OP' den früheren CX, CY und CP parallel, so werden die neuen Coordinaten $SN' = z'$, $N'n' = y'$ und $On' = x'$ die Lage des Centrums des Gestirns S in Bezug auf den Ort des Beobachters festsetzen. Setzt man nun die Entfernung des Gestirns vom Beobachtungsorte $SO = d'$, und bezeichnet die scheinbare beobachtete gerade

Aufsteigung seines Centrums durch α', seine scheinbare Abweichung aber durch δ', so wird der Winkel $S\,O\,N' = \delta'$, der Winkel $X'\,O\,N' = \alpha' - k$ werden, und daher:

$$z' = d' \sin\delta', y' = d' \cos\delta' \sin(\alpha' - k), x' = d' \cos\delta' \cos(\alpha' - k).$$

Da diese neuen Coordinaten, den entsprechenden früheren parallel sind, und ferner nach unserer Figur $x' < x, y' < y$ und $z' < z$, so wird offenbar $z' = z - \zeta, y' = y - \eta$ und $x' = x - \xi$, oder:

$$d' \sin\delta' = d \sin\delta - r \sin\varphi' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a),$$
$$d' \cos\delta' \sin(\alpha' - k) = d \cos\delta \sin(\alpha - k) - r \cos\varphi' \sin(s - k) \, (b),$$
$$d' \cos\delta' \cos(\alpha' - k) = d \cos\delta \cos(\alpha - k) - r \cos\varphi' \cos(s - k) \, (c).$$

Es sei $k = \alpha$, und $\frac{r}{d} = \sin\pi$, so wird π die Horizontal-Parallaxe des Gestirns am Beobachtungsorte ausdrücken; dividirt man darauf die Gleichung (b) durch (c) und alsdann (a) durch (c), so erhält man:

$$tg\,(\alpha' - \alpha) = \frac{-\sin\pi \cos\varphi' \sin(s - \alpha)}{\cos\delta - \sin\pi \cos\varphi' \cos(s - \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (a')$$

$$tg\,\delta' = \frac{(\sin\delta - \sin\pi \sin\varphi') \cos(\alpha' - \alpha)}{\cos\delta - \sin\pi \cos\varphi' \cos(s - \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (b')$$

Bezeichnet man durch R den Winkel, unter welchem der Halbmesser des Gestirns vom Centrum der Erde aus erscheinen würde, und durch R' den Winkel, unter welchem er vom Beobachter erblickt wird, so folgt aus § 10, S. 24, dass $\sin R' : \sin R = d : d'$; setzt man alsdann anstatt $d : d'$ seinen Werth aus Gleichung (c), so erhält man für $k = \alpha$, und da $\frac{r}{d} = \sin\pi$;

$$\sin R' = \frac{\sin R \cos\delta' \cos(\alpha' - \alpha)}{\cos\delta - \sin\pi \cos\varphi' \cos(s - \alpha)} \quad \ldots\ldots \quad (c')$$

16. Die Parallaxen $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ und $R' - R$ lassen sich bequem mit Hülfe von Reihen ausdrücken. Setzt man $\frac{\sin\pi \cos\varphi'}{\cos\delta} = \frac{\sin\Pi \cos\varphi''}{\cos\delta} = P$, so hat man:

$$tg\,(\alpha' - \alpha) = \frac{P \sin(\alpha - s)}{1 - P \cos(\alpha - s)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

woraus nach § 9, S. 23 folgt:

$$\alpha' = \alpha + \frac{P}{\sin 1''} \sin(\alpha - s) + \frac{P^2}{2 \sin 1''} \sin 2(\alpha - s) +$$
$$+ \frac{P^3}{3 \sin 1''} \sin 3(\alpha - s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

17. Die Formel für die Parallaxe in der Declination werden wir etwas einfacher als Olbers ableiten; man setze nämlich hierzu $k = \alpha'$, und $\alpha - \alpha' = \Theta$, so erhält man aus den Gleichungen (b), (a) und (c) die folgenden entsprechenden:

$$\sin \Theta = \frac{\sin \pi \cos \varphi'}{\cos \delta} \sin(s - \alpha') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b'');$$

$$\frac{d'}{d} \sin \delta' = \sin \delta - \sin \pi \sin \varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a'');$$

$$\frac{d'}{d} \cos \delta' = \cos \delta \cos \Theta - \sin \pi \cos \varphi' \cos(s - \alpha') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c'');$$

wo $\sin \pi = \frac{r}{d}$; multiplicirt man alsdann die Gleichung (a'') mit $\cos \delta'$, die Gleichung (c'') aber mit $\sin \delta'$, und nimmt ihre Differenz, so erhält man:

$$0 = \sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos \Theta - \sin \pi \sin \varphi' \cos \delta'$$
$$+ \sin \pi \cos \varphi' \cos(\alpha' - s) \sin \delta'$$

Nun ist aber $\cos \Theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \Theta$, folglich erhalten wir:

$$\sin(\delta - \delta') = \sin \pi \sin \varphi' \cos \delta' - 2 \cos \delta \sin \delta' \sin^2 \tfrac{1}{2} \Theta$$
$$- \sin \pi \cos \varphi' \sin \delta' \cos(\alpha' - s).$$

Die beiden letzten Glieder im zweiten Theile dieser Gleichung lassen sich sehr vereinfachen; es sei $s - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = N$ und $\sin \pi \cos \varphi' = M$; so wird:

$$s - \alpha' = s - \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha') + \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha') = N + \tfrac{1}{2} \Theta, \text{ und}$$

$$\sin \pi \cos \varphi' \cos(\alpha' - s) = M \cos(N + \frac{\Theta}{2})$$

$$= M \cos N \cos \frac{\Theta}{2} - M \sin N \sin \frac{\Theta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d'').$$

Aus der Gleichung (b'') findet man, dass

$$\cos \delta \sin \Theta = M \sin(N + \tfrac{1}{2} \Theta), \text{ oder:}$$

$$2 \cos \delta \sin \tfrac{1}{2} \Theta \cos \tfrac{1}{2} \Theta = M (\sin N \cos \tfrac{1}{2} \Theta + \cos N \sin \tfrac{1}{2} \Theta);$$

$$2 \cos \delta \sin^2 \tfrac{1}{2} \Theta = M \sin N \sin \tfrac{1}{2} \Theta + M \cos N \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \Theta}{\cos \frac{1}{2} \Theta} \quad . \quad (e'')$$

Verbindet man die Gleichungen (d'') und (e'') mit einander, so erhält man:

$$2\cos\delta\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta + \sin\pi\cos\varphi'\cos(\alpha'-s) =$$

$$= M\cos N\left\{\frac{\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta}{\cos\tfrac{1}{2}\Theta} + \cos\tfrac{1}{2}\Theta\right\} =$$

$$= \frac{M\cos N}{\cos\tfrac{1}{2}\Theta} = \frac{\sin\pi\cos\varphi'\cos[s-\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')]}{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}$$

Hieraus folgt nun:

$$\sin(\delta-\delta') = \sin\pi\cos\delta'\sin\varphi' - \frac{\sin\pi\cos\varphi'\cos[s-\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')]\sin\delta'}{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}$$

Es sei nun:

$$\frac{tg\,\varphi'\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}{\cos(s-\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')} = \frac{\sqrt{1-e^2}\,tg\,\varphi\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')}{\cos[s-\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha')]} = tg\,\eta \quad . \qquad (f)$$

so wird: $\sin(\delta-\delta') = \dfrac{\sin\pi\sin\varphi'\sin(\eta-\delta')}{\sin\eta}$ . . . . (b''')

Setzt man darauf:

$$\frac{\sin\pi\sin\varphi'}{\sin\eta} = \frac{\sin\Pi\sqrt{1-e^2}}{\sin\eta}\cdot\sin\varphi'' = Q \quad . \; . \; . \qquad (g),$$

so wird: $\sin(\delta-\delta') = Q\sin(\eta-\delta')$, oder:

$$\sin(\delta-\delta') = Q[\sin(\eta-\delta)\cos(\delta-\delta') + \cos(\eta-\delta)\sin(\delta-\delta')],$$

also endlich:

$$tg(\delta-\delta') = \frac{Q\sin(\eta-\delta)}{1-Q\cos(\eta-\delta)}; \text{ oder:}$$

$$\delta' = \delta + \frac{Q}{\sin 1''}\sin(\delta-\eta) + \frac{Q^2}{2\sin 1''}\sin 2(\delta-\eta)$$

$$+ \frac{Q^3}{3\sin 1''}\sin 3(\delta-\eta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (h)$$

Die Gleichungen (b'') und (b''') werden gebraucht, wenn die scheinbare gerade Aufsteigung und Abweichung gegeben sind, und man ihre Parallaxen berechnen will.

18. Um nun $R'-R$ zu berechnen, kehren wir zur Proportion $\sin R' : \sin R = \sin z' : \sin z$ zurück, wo z' die scheinbare Zenithdistanz, und z die wahre Zenithdistanz des Gestirns vom geocentrischen Zenithe Z' bezeichnet. Es sei P der Pol des Aequators, B der scheinbare und A der wahre Ort des Gestirns (Fig. 7); halbirt man alsdann den Winkel APB durch

den Bogen eines grössten Kreises PM und fällt von Z' aus den Bogen eines grössten Kreises $Z'm$ senkrecht auf PM, so wird der Bogen $Z'm$ die beiden Bögen PA und PB in zwei Punkten a und b schneiden, die gleichweit von P entfernt sind. Aber es ist $mPa = \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$ und $Z'Pm = \alpha - s + \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha) = \frac{\alpha' + \alpha}{2} - s$; folglich haben wir aus den Dreiecken amP und $Z'mP$, wo $Z'P = 90° - \varphi'$:

$$tg\,Pa = \frac{tg\,Pm}{cos\,mPa} = \frac{cotg\,\varphi' cos\left(\frac{\alpha' + \alpha}{2} - s\right)}{cos\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)} = cogt\,\eta$$

d. h. $Pb = Pa = 90° - \eta$; $Aa = PA - Pa = 90° - \delta - (90° - \eta) = \eta - \delta$ und $Bb = \eta - \delta'$. Aber es ist der Winkel $Z'aA = Pab = Pba = 180° - ZbB$ und aus den Dreiecken $Z'Aa$ und $Z'Bb$ wird $sin\,Z'A : sin\,Z'B = sin\,Aa : sin\,Bb$; folglich $sin\,R' : sin\,R = sin\,z' : sin\,z = sin(\eta - \delta') : sin(\eta - \delta)$, da $Z'A = z$ und $Z'B = z'$. Hieraus folgt nun mit genügender Annäherung:

$$R' - R = R\left\{\frac{sin(\eta - \delta') - sin(\eta - \delta)}{sin(\eta - \delta)}\right\},\ \text{oder}$$

$$R' - R = R\,[(\delta' - \delta)\,sin\,1''.\,cotg(\delta - \eta) - \tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)^2.sin^2 1''] \quad (i)$$

19. Diese Formeln wendet man bei Finsternissen an. Zu Anfang und Ende einer Verfinsterung scheinen sich die scheinbaren Ränder beider Gestirne zu berühren; folglich werden dann die Orte beider Gestirne einander sehr nahe sein; und ausserdem wird noch die Parallaxe des einen Gestirns, weit grösser als die des anderen sein. Um zu erläutern, wie in solchen Fällen der Unterschied der Wirkung der Parallaxen beider Gestirne am kürzesten berechnet werden kann, wollen wir z. B. die Rechnung auf die Sonne und den Mond anwenden; es sei daher die wahre:

AR des Mondcentrums . . . $= \alpha$; des Sonnencentrums $= A$
Declination des Mondcentrums $= \delta$; des Sonnencentrums $= D$

Horizont. Parallaxe des Mondes $= \pi$; der Sonne . . . $= \Pi$
Winkelhalbmesser des Mondes . $= R$; der Sonne . . . $= \varrho$

Die Differenzen $A - \alpha$ und $D - \delta$ werden in diesem Falle nur wenige Minuten in Bogen betragen; der mittlere Werth von π ist ungefähr $= 58' \; 0''$, für Π hingegen $= 8'',8$. Bei der ausserordentlichen Kleinheit von Π, werden wir keinen merklichen Fehler begehen, wenn wir bei der Berechnung der Glieder 2. Ordnung in den Ausdrücken für $A' - A$, $D' - D$ und $\varrho' - \varrho$, wo A', D' und ϱ' die scheinbare AR, Declination und Halbmesser der Sonne bedeuten, statt A und D die von ihnen wenig verschiedenen Werthe α und δ nehmen. Es bleibt daher nur noch übrig zu zeigen, welche Veränderung man mit den Gliedern der 1. Ordnung vornehmen muss, damit man sogleich den Unterschied dieser Glieder in Beziehung auf beide Gestirne erhalten kann.

Es sei $A = \alpha + x$, $D = \delta + y$, und $\pi : \Pi = m : 1$; setzt man nun anstatt $\sin \pi$ seinen Werth $\pi \sin 1''$, so findet man für den Unterschied der Glieder 1. Ordnung in dem Ausdruck $\alpha' - \alpha - (A' - A)$, wenn dieser Unterschied $= n$ gesetzt wird, sogleich den Werth:

$$n = \pi . \frac{\cos \varphi'}{\cos \delta} . \sin (\alpha - s) - \frac{\pi}{m} \cos \varphi' . \frac{\sin (\alpha + x - s)}{\cos (\delta + y)},$$

vernachlässigt man alsdann die Glieder, in welchen $\frac{\pi}{m}$ mit x^2, y^2, $x\,y$ und mit höheren Potenzen von x und y multiplicirt ist, so erhält man:

$$n = \pi \cos \varphi' . \left\{ \frac{\sin (\alpha - s)}{\cos \delta} \left(1 - \frac{1}{m}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\sin (\alpha - s)}{m \cos \delta} tg\, \delta \sin y + \frac{\cos (\alpha - s)}{m \cos \delta} \sin x \right) \right\}.$$

Nimmt man jetzt an, dass $n = (\pi - \Pi) \cos \varphi' . \frac{\sin (\alpha - s + t)}{\cos (\delta + u)}$, wo $\pi - \Pi = \pi \left(1 - \frac{1}{m}\right)$; so kann man wegen der Kleinheit von t und u annehmen, dass $\cos t = 1$ und $\cos u = 1$; und alsdann

wird man t und u aus der Vergleichung entsprechender Glieder in den folgenden identischen Gleichungen bestimmen können:

$$(\pi-\Pi)\cos\varphi'.\left\{\frac{\sin(\alpha-s)}{\cos\delta}+\frac{\sin(\alpha-s)}{\cos\delta}\,tg\,\delta\sin u+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos(\alpha-s)}{\cos\delta}\sin t+\ldots\ldots\right\}$$
$$=\pi\cos\varphi'\left\{\frac{\sin(\alpha-s)}{\cos\delta}\left(1-\frac{1}{m}\right)-\frac{\sin(\alpha-s)}{m\cos\delta}\,tg\,\delta\sin y-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos(\alpha-s)}{m\cos\delta}\sin x+\ldots\ldots\right\};$$

folglich $-\sin y=(m-1)\sin u$; $-\sin x=(m-1)\sin t$ oder sehr nahe: $\frac{-y}{m-1}=u$ und $\frac{-x}{m-1}=t$.

Untersucht man auf ähnliche Weise nur die Glieder der 1. Ordnung in dem Ausdrucke $\delta'-\delta-(D'-D)$, so erhält man ganz genau dasselbe Resultat; folglich kann man überhaupt folgende Regel annehmen: „Wenn es sich bei einer Finsterniss darum handelt den Unterschied des Einflusses der Parallaxe auf beide Gestirne genau zu bestimmen, so kann man die Parallaxe in AR und Declination, mit dem Unterschiede der Horizontal-Parallaxen beider Gestirne $=\pi-\Pi$ berechnen, indem man hierbei die gerade Aufsteigung $=\alpha+\frac{\alpha-A}{m-1}$ und die Abweichung $=\delta+\frac{\delta-D}{m-1}$ annimmt."

20. Es seien p und q die Parallaxen in den Declinationen des Mondes und der Sonne; alsdann kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass $p-q=p\left(1-\frac{1}{m}\right)$ und $q=\frac{p}{m}$, setzt man dann $p-q=\Delta\delta$, so wird $p=\frac{m.\Delta\delta}{m-1}$. Nimmt man jetzt noch an, dass $\varrho=\mu R$; so wird der mittlere Werth von μ für Mond und Sonne sehr nahe $=1$ werden, der mittlere Werth von m ist bei diesen beiden Himmelskörper dagegen nahezu $=\frac{58'}{8''.8}=395$; man kann daher unter dieser Voraus-

setzung die Grösse $\frac{m^2 \pm \mu}{(m \pm \mu)(m-1)}$ mit grosser Annäherung $= 1$ setzen, und dann folgt unter Zuziehung der Gleichung (*i*) § 18, S. 33 der folgende sehr genäherte Ausdruck für $\varrho' \pm R'$, nämlich:

$$\varrho' \pm R' = \varrho \pm R + \left(\frac{\mu \pm m}{m-1}\right) R \left[\Delta\,\delta \sin 1'' \operatorname{cotg}(\delta - \eta) - \tfrac{1}{2} \sin^2 1'' \,\Delta\,\delta^2\right],$$

wo $\Delta\,\delta = p - q = \delta' - \delta - (D' - D)$ gesetzt ist.

21. Man kann auch noch die Lage eines Gestirnes in Beziehung auf die Ecliptik bestimmen. Das, was wir beim Aequator die gerade Aufsteigung und Abweichung nannten, entspricht in Beziehung auf die Ecliptik der Länge und Breite eines Gestirns; die Parallaxe in Länge und Breite wird nach ganz ähnlichen Formeln, wie die früher entwickelten, berechnet. Man hat dann nur nöthig zu bemerken, dass sich die gerade Aufsteigung in die Länge, und die Declination in die Breite des Gestirns verwandelt, anstatt der Declination des geocentrischen Zeniths, oder der geocentrischen Breite des Beobachtungsorts φ' braucht man nur die Breite β dieses Zeniths zu nehmen und anstatt der geraden Aufsteigung des Zeniths oder der Sternzeit s muss man die Länge λ des Zeniths setzen. Um β und b zu bestimmen, denke man sich das sphärische Dreieck, welches vom Pole des Aequators, vom Pole der Ecliptik und vom geocentrischen Zenithe gebildet wird, dessen Zeiten sein werden: ω oder die Neigung der Ecliptik gegen den Aequator, $90° - \varphi'$ und $90° - \beta$, der Winkel aber am Pole des Aequators wird $= 90 + s$ und am Pole der Ecliptik $= 90 - \lambda$; alsdann hat man:

$$tg\,\psi = \operatorname{cotg}\varphi' \sin s,$$

und endlich:

$$tg\,\lambda = tg\,s \cdot \frac{\sin(\psi + \omega)}{\sin\psi}, \quad \sin\beta = \sin\varphi' \cdot \frac{\cos(\psi + \omega)}{\cos\psi},$$

$$\cos\beta = \cos\varphi' \cos s \sec\lambda.$$

Der Punkt der Ecliptik, dessen Länge $= \lambda$ ist, heisst der Nonagesimus.

Ueber die hauptsächlichsten Bestandtheile der Winkelmessinstrumente.

1) Von den Winkelmessinstrumenten im Allgemeinen.

22. Um im Allgemeinen die Einrichtung der Winkelmessinstrumente zu erläutern, wollen wir zuerst der Einfachheit wegen annehmen, dass man zwischen irgend zwei beliebigen irdischen Objecten, die in einer horizontalen Ebene liegen, den Winkel zu bestimmen wünscht, welcher von den Gesichtslinien eingeschlossen wird, die vom Beobachtungsorte aus nach diesen beiden Objecten gehen.

Man denke sich nun hierzu einen messingnen, kreisförmigen Streifen *A B* (Fig. 8), in Grade eingetheilt, und horizontal aufgestellt; vom Umfange dieses Kreises aus laufen die messingnen Stücke *r*, *r*, *r*, *r*, wie Speichen eines Rades dem Centrum zu, und verbinden den Kreis mit einem festen Untergestell. Man kann sich nun vorstellen, dass im Mittelpunkte des Kreises sich eine cylindrische Oeffnung befindet, in der sich eine cylindrische Achse dreht, und dass an dieser Achse ein messingner Arm *a a'* befestigt ist, welcher wiederum fest mit einem Fernrohr *F f* verbunden ist. In eines der beiden auf dem Kreis aufliegenden Enden dieses Arms *a a'* sei nach der Richtung des Halbmessers ein kurzer Strich oder kleines Abzeichen eingeschnitten. Sobald man nun das Fernrohr *F f* bewegt, wird sich der Arm *a a'* ebenfalls, um eben so viel bewegen; richtet man daher das Fernrohr auf irgend einen gegebenen Gegenstand, so wird man auf dem u n b e w e g l i c h e n Kreise *A B D* den Theilstrich, welcher mit dem kleinen Abzeichen am Ende der Stange *a a'* zusammentrifft, ablesen können; wenn man alsdann das Fernrohr fortrückt und es auf einen zweiten Gegenstand richtet, so kann man wiederum die Anzahl der Grade und Minuten ablesen, welche auf dem unbeweglichen Kreise *A B D*, dem Abzeichen auf dem Arme *a a'*, bei dieser

neuen Lage entsprechen. Nimmt man alsdann die Differenz zwischen den in diesen beiden Fällen bemerkten Graden und Minuten, so erhält man dadurch den gesuchten Winkel, welcher zwischen beiden Gegenständen eingeschlossen ist. Es ist leicht einzusehen, dass, wenn die Achse des Fernrohrs, oder der Punkt, um welchen es sich bewegt, nicht ganz genau im Centrum des in Grade eingetheilten, unbeweglichen Kreises *A B D* liegt, alsdann auch der gemessene Winkel unrichtig sein wird, und zwar wird er grösser als sein wahrer Werth werden, wenn der Bogen, welcher den beiden Lagen des Abzeichens auf dem beweglichen Arme entspricht, näher am Centrum der Umdrehung, als am Centrum des eingetheilten Kreises liegt; im entgegengesetzten Falle wird er kleiner werden. Um diesen Fehler zu vernichten, macht man an beiden sich diametral gegenüberstehenden Enden des Armes (in *a* und *a'* Fig. 8) kleine Striche oder Abzeichen, und beim Beobachten liest man alsdann die Grade der Kreistheilung ab, welche jedem dieser beiden Abzeichen entsprechen. Auf diese Weise wird man zwei Bögen erhalten, von denen der eine grösser, der andere kleiner als der gesuchte Winkel sein wird, und nach einem sehr bekannten Lehrsatze der Geometrie weiss man dann, dass die halbe Summe der abgelesenen Bögen ganz genau dem wahren Winkel zwischen den beobachteten Gegenständen gleich sein wird.

23. Um nun zu zeigen, wie man die Zenithdistanz oder die Höhe eines irdischen Gegenstandes messen kann, muss man sich einen Kreis *A D B* (Fig. 9) denken, welcher an seinem Umfange in Grade und Minuten eingetheilt ist; die Ebene dieses Kreises wird senkrecht aufgestellt, doch so, dass sie sich frei um die vertikale Achse *K K'* herumbewegen lässt. Im Centrum des Kreises befindet sich eine cylindrische Oeffnung, welche senkrecht auf der Ebene des Kreises steht, und in diese cylindrische Oeffnung passt eine horizontale Achse hinein, auf welcher der mit dem Fernrohr *O o* verbundene Messingarm *a a'* befestigt ist. Bewegt man nun das Fernrohr *O o*, so wird der an seinen

Enden mit Abzeichen versehene Arm $a\,a'$ sich um eben so viel bewegen. Richten wir nun das Fernrohr auf einen bestimmten entfernten terrestrischen Gegenstand g, so kann man die Anzahl von Graden und Minuten ablesen, welche jedem der Abzeichen, welche sich an den Enden des Armes $a\,a'$ befinden, auf der Kreistheilung entsprechen. Dreht man darauf den Apparat, so dass die Ebene des Kreises $A\,B\,D$ eine halbe Umdrehung oder 180° um die Verticalachse $K\,K'$ macht, so wird der Punkt A des Kreises, welcher vorher noch links gerichtet war, nunmehr nach rechts gerichtet sein (Fig. 10); folglich nimmt das Fernrohr auch die entgegengesetzte Lage $O'\,o'$ an, und ist nicht mehr auf den Gegenstand g gerichtet. Dreht man nun das Objectivende des Fernrohrs längs der Richtung des Bogens $B\,A$ (Fig. 10) herum, ohne die Ebene des Verticalkreises zu verrücken, so wird das Fernrohr, ehe es in die Richtung des Gegenstandes g gelangt, durch die Richtung der Lothlinie, oder durch das Zenith hindurchgehen müssen und nachher auf den Gegenstand g treffen; in dieser Lage wird das Fernrohr um eben so viel links auf dem Kreise vom Zenith abstehen, als es vorher rechts auf dem Kreise von demselben abstand. Wir wollen hier voraussetzen, dass die Zahlen der auf dem Verticalkreise aufgetragenen Gradtheilung von 0° bis 360°, und zwar von dem obersten Theile des Kreises in der ersten Lage des Instruments (Fig. 9) in der Richtung von rechts nach links, dagegen in der zweiten Lage (Fig. 10) in der Richtung von links nach rechts zunehmen. Zieht man daher die Anzahl von Graden und Minuten bei der Beobachtung des Gegenstandes g in der ersten Lage des Instruments, in welcher A nach links gerichtet war, von der abgelesenen Anzahl von Graden und Minuten in der zweiten Lage des Instruments, in welcher A nach rechts gerichtet war, ab, so wird der gefundene Unterschied der Ablesungen die doppelte Winkelentfernung des Gegenstandes g vom Zenith oder die doppelte Zenithdistanz ausdrücken. Wenn die Anzahl der Grade und Minuten bei der zweiten Lage des Instrumentes kleiner

gefunden wird als bei der ersten Lage, so addirt man dazu 360°, um die Subtraction ausführen zu können. Die Ergänzung der Zenithdistanz zu 90° ist die Höhe des Gegenstandes. Der Kreis *ADB*, der an seinem Rande in Grade eingetheilt ist, heisst der Limbus, der Messingarm *a a′* dagegen die Alhidade; welche Benennungen wir der Kürze wegen künftig beibehalten wollen. Damit die Lage des Fernrohrs und der Alhidade nicht durch den Einfluss der Schwerkraft oder auch sonst durch irgend einen Zufall geändert werden kann, so sind sie so gleichförmig wie möglich balancirt, und werden nach Beendigung einer jeden Beobachtung mit dem Kreise vermittelst einer Druckschraube oder Klemme befestigt.

2) Vom astronomischen Fernrohr.

24. Bei allen astronomischen Beobachtungen wendet man Fernröhre an, um mit deren Hülfe die zu beobachtenden Gegenstände deutlich und genau sehen zu können. Die Theorie des astronomischen Fernrohrs ist vorzüglich dargestellt in J. Herschel's Traité de la lumiére; in Littrow's Analytischer Dioptrik und in anderen Werken. Eine vollständige Anweisung zur Construction des Fernrohrs findet man in dem Werke von Prechtel: Praktische Dioptrik. Wir werden uns hier damit begnügen, nur im Allgemeinen die Einrichtung des Fernrohrs zu beschreiben, und die Regeln seiner Anwendung näher zu erläutern.

Das astronomische Fernrohr in seiner einfachsten Gestalt besteht aus zwei bi-convexen Linsen; die grössere von beiden *AB* (Fig. 11), welche auf den zu beobachtenden Gegenstand gerichtet wird, heisst die Objectivlinse, und die andere, weit kleinere, durch welche der Beobachter sieht, heisst die Ocular- oder Augenlinse. Die vordern und hintern Oberflächen jeder dieser beiden Linsen bilden Ausschnitte sphärischer Oberflächen, von verschiedenen Radien, welche Krümmungshalbmesser genannt werden. Unter der Achse einer Linse versteht man diejenige gerade Linie, welche durch die Mittelpunkte der sphärischen Ober-

flächen geht, welche diese Linse begränzen. Wenn ein Fernrohr gut zusammengestellt ist, so müssen die Achsen des Objectivs und des Oculars in einer geraden Linie liegen, welche die Mitte des Objectivs und Oculars verbindet; diese gerade Linie heisst die geometrische Achse des Fernrohrs.

Wir wollen nun annehmen, dass unser Fernrohr oder, genauer ausgedrückt, seine Achse auf irgend einen Stern gerichtet sei; wegen der grossen Entfernung der Sterne kann man annehmen, dass die von dem Sterne ausgehenden Strahlen *S A*, *S C*, *S B* und die übrigen (Fig. 11), alle unter sich parallel auf das Objectiv *A B* fallen. Einer von diesen Strahlen, *S C*, geht durch die geometrische Achse des Fernrohrs selbst, und behält dabei seine ursprüngliche Richtung, denn indem er an die Linsen tritt, geht er senkrecht und ungebrochen durch ihre Oberflächen hindurch; aber alle anderen Strahlen, welche durch die biconvexe Linse des Objectivs durchgehen, erleiden eine Brechung, wodurch ihre anfängliche Richtung geändert wird. Wenn die Linsen im Vergleich zu den Krümmungshalbmessern ihrer Oberflächen sehr klein sind, so werden diese Strahlen aus der Objectivlinse convergent oder zusammenlaufend austreten, und sich sämmtlich in einem gemeinschaftlichen Punkte *F*, welcher sich in der Achse des Fernrohrs befindet, durchschneiden. Dieser Vereinigungspunkt der Strahlen heisst der Brennpunkt des Objectivs und es entsteht in ihm ein deutliches Bild des Sterns. Die Entfernung *F C* zwischen der Mitte der Objectivlinse *C* und ihrem Brennpunkte *F* heisst die Brennweite des Objectivs; sie hängt ab von der Brechung der Lichtstrahlen in der Objectivlinse und von den Halbmessern ihrer sphärischen Oberflächen. Ebenso wie nun parallele Lichtstrahlen, welche auf die biconvexe Linse fallen, vermöge der Brechung sich im Brennpunkte vereinigen, ebenso lässt sich auch leicht einsehen, dass, wenn man in diesem Brennpunkte einen leuchtenden Punkt aufstellt, alsdann die von ihm auseinanderlaufenden Strahlen, welche zu derselben biconvexen Linse gelangen, untereinander parallel aus der Linse austreten werden.

Wenn man also hinter dem Objective AB (Fig. 11), in der Richtung nach dem Beobachter, eine zweite biconvexe Linse oder die Ocularlinse $g\,g'$ aufstellt und zwar so, dass sowohl die Achsen beider Linsen, wie auch ihre Brennpunkte zusammenfallen, so wird sich offenbar auch das helle Bild des Sterns im Brennpunkte F der beiden Linsen befinden; und daher werden die von diesem Brennpunkte F ausgehenden divergirenden Lichtstrahlen, wenn sie zur Linse $g\,g'$ gelangen, aus dieser unter einander parallel austreten; indem sie dann zum Auge des Beobachters gelangen, werden sie ihm ein deutliches Bild des Sternes gewähren. Ohne Fernrohr würden wir nur diejenigen Lichtstrahlen des Sternes sehen, welche auf die Pupille unseres Auges fallen; wenn wir aber das Bild des Sternes durch ein Fernrohr erblicken, so sehen wir diesen mit grösserer Helligkeit, weil alsdann die Strahlen, welche auf das Objectiv fallen, sich im Brennpunkte des Fernrohrs vereinigen, und die Oberfläche des Objectivs ungleich grösser als die Oberfläche der Pupille ist. Hierin besteht der erste Vorzug des Sehens durch ein Fernrohr. Wenn man im Brennpunkte des Oculars einen feinen Faden aufspannt, so werden wir diesen Faden durch das Ocular sehen, und fällt jener Brennpunkt mit dem Brennpunkte der Objectivlinse zusammen, so werden wir das Bild des Sternes und diesen Faden zugleich deutlich sehen, falls das Fernrohr auf den Stern gerichtet wird. Spannt man statt eines Fadens zwei Fäden so auf, dass sie sich in dem gemeinschaftlichen Brennpunkte des Oculars und Objectivs durchkreuzen, so wird ihr Durchschnittspunkt einen sichtbaren, im Gesichtsfelde festen Punkt bestimmen. Dies ist die zweite Eigenschaft des Fernrohrs, welche ein vorzügliches Hülfmittel zur genauen Messung von Winkeln gewährt.

25. Wir wollen jetzt annehmen, dass das Fernrohr auf einen sehr entfernten Gegenstand DL (Fig. 12) gerichtet sei, dessen Dimensionen im Vergleich zu der Entfernung klein sind. Nun ist bei jeder Linse ein Punkt vorhanden, der die Eigenschaft hat, dass ein jeder Lichtstrahl, der durch ihn hin-

durchgeht, parallel mit seiner ursprünglichen Richtung aus der Linse austritt. Diesen Punkt nennt man den optischen Mittelpunkt der Linse. Aus dem obersten Punkte des entfernten Gegenstandes *D* fallen nun eine Menge Strahlen auf das Objectiv *A B*, welche man alle als parallel mit der geraden Linie *D C d* ansehen kann, die aus *D* durch den optischen Mittelpunkt *C* des Objectivs *A B* hindurchgeht; darauf treten diese Strahlen aus der Linse heraus und sammeln sich alle auf der Linie *D C d* im Punkte *d*, dessen senkrechter Abstand von der Objectivlinse gleich der Brennweite dieser Linse = *F* ist; es stellt sich daher auf der entgegengesetzten Seite der Objectivlinse in *d* ein deutliches Bild des Punktes *D* dar. Auf ähnliche Weise bildet sich ein jeder andere Punkt des Gegenstandes auf derjenigen Linie ab, welche durch diesen Punkt und den optischen Mittelpunkt *C* des Objectivs hindurchgeht, so dass also der unterste Punkt *L* des Gegenstandes sich auf der Linie *L C l* im Punkte *l* abbildet, dessen senkrechter Abstand vom Objectiv eben so gross wie der des Punktes *d* ist, und gleich der Brennweite des Objectivs = *F* sein wird. Dadurch entsteht also eine vollständige Abbildung *d l* des Gegenstandes *L D*; sie wird aber umgekehrt sein, d. h. der unterste Punkt des Gegenstandes wird zuoberst, der oberste Punkt des Gegenstandes dagegen zuunterst erscheinen. Wenn der Brennpunkt des Oculars *g g'* mit dem Brennpunkte des Objectivs zusammenfällt, und daher auch mit dem Bilde *d l*, so werden die Strahlen, welche vom Punkte *d* aus auf das Ocular nach divergirenden Richtungen fallen, aus diesem wiederum alle untereinander, und mit der Linie *d c k* parallel austreten, welche letztere durch den Punkt *d* und den optischen Mittelpunkt *c* des Oculars hindurchgehen wird; ganz ähnlich verhält es sich mit allen anderen Strahlen, die von irgend einem anderen Punkte des Bildes *d l* ausgehen, und daher treten endlich alle Strahlen, welche von *l* aus auf das Ocular *g g'* fallen, der Richtung der Linie *l c n* parallel aus. Auf diese Weise gelangen die Strahlen in das Auge des Beobachters, welchem das Bild des Gegenstandes

unter dem Winkel nck erscheint. Ohne Fernrohr aber würde dem Beobachter der Gegenstand unter dem Winkel $DCL = dCl$ erscheinen, wenn nämlich sein Auge sich an der Stelle des Objectives befände; ist aber der Gegenstand sehr entfernt, so kann man diesen Winkel mit demjenigen vollkommen verwechseln, welcher von den Strahlen gebildet wird, die von den Grenzpunkten dieses Gegenstandes aus nach dem Auge des Beobachters, in der Nähe des Oculars gehen. Das Verhältniss dieser Winkel, oder $nck:dCl$ wird die Vergrösserung des Fernrohrs genannt. Da diese beiden Winkel immer sehr klein sind, so werden sie sich nahe wie ihre Tangenten verhalten, und in der Annahme, dass $Cl = Cd = F$ und $cl = cd = f$, erhält man daher aus den Dreiecken Clc und Cdc mit genügender Annäherung:

$$nck:dCl = F:f,$$

d. h. die scheinbare Grösse eines Gegenstandes, durch ein Fernrohr gesehen, verhält sich zu seiner scheinbaren Grösse, durch das blosse Auge gesehen, wie die Brennweite F des Objectivs sich zu der Brennweite f des Oculars verhält. Hieraus sieht man, dass, wenn ein Fernrohr mit verschiedenen Ocularen versehen ist, man dadurch auch verschiedene Vergrösserungen hervorbringen kann, und jemehr die Brennweite der Ocularlinse abnimmt, desto mehr wird die Vergrösserung zunehmen. Um so viel Mal ein Fernrohr vergrössert, um eben so viel Mal wird ein Gegenstand uns näher erscheinen, und desto grösser wird man seine einzelnen Theile erblicken. Hierin besteht also noch ein wesentlicher Vortheil des Sehens durch Fernröhre.

26. Unter dem Gesichtsfelde des Fernrohrs versteht man den Raum, welchen man mit Hülfe des Fernrohrs auf einmal deutlich übersehen kann; die Grösse des Gesichtsfeldes hängt von dem Winkel gCg' (Fig. 13) ab, welcher von den Strahlen Cg und Cg', die von der Mitte, oder genauer dem optischen Mittelpunkte des Objectivs, nach den Rändern des

Oculars g und g' zulaufen, gebildet wird. Hieraus sieht man, dass die Grösse des Gesichtsfeldes bei einem Fernrohr nur von der Grösse des Oculares und seiner Entfernung vom Objective abhängt. Viele Fernröhre haben Diaphragmen oder undurchsichtige flache innere Ringe, damit die Lichtstrahlen dadurch verhindert werden auf die Ränder des Oculars zu gelangen; alsdann hängt die Grösse des Gesichtsfeldes von der freien Oeffnung des Diaphragmas, oder nur von demjenigen Theil des Oculars ab, auf welchen die Lichtstrahlen noch gelangen.

27. Das Bild des Gegenstandes, welches durch das Fernrohr hervorgebracht wird, muss eine hinreichende Helligkeit haben, damit es auf unser Auge einen Eindruck hervorbringen kann. Nehmen wir nun an, dass zwei Fernröhre gleiche Vergrösserung besitzen, so ist es leicht einzusehen, dass die Helligkeit der Bilder in diesen beiden Fernröhren den Lichtmengen proportional sein wird, welche auf die Oberflächen ihrer Objective gelangen; aber diese Oberflächen verhalten sich untereinander wie die Quadrate der Durchmesser der Objectivlinsen; folglich ist die Helligkeit der Bilder den Quadraten dieser Durchmesser proportional. Nehmen wir dagegen an, dass die beiden Fernröhre gleiche Objectivlinsen haben, aber verschiedene Vergrösserungen, so ist es klar, dass eine und dieselbe Lichtmenge auf die Oberfläche des grösseren und kleineren Bildes vertheilt sein wird, und folglich ist die Helligkeit der Bilder in diesem Falle den Quadraten der Vergrösserungen umgekehrt proportional. Es ist noch zu bemerken, dass nicht alle auf das Objectiv fallenden Strahlen in unser Auge gelangen, wegen der nicht ganz vollkommenen Durchsichtigkeit des Glases, und mehr noch wegen der von den Oberflächen der Linsen zurückgeworfenen Strahlen *). Auch geht zuweilen etwas Licht verloren, wenn

---

*) Nimmt man an, dass die Lichtstrahlen senkrecht auf die Gläser fallen, so ist die Lichtmenge, welche nach den Reflectionen übrig bleibt, und vermittelst der Formel von Fresnel berechnet:

1) Beim Durchgange durch die Kronglaslinse des Objectivs = 0,9164,

die Breite des Oculars nicht gross genug ist, um alle im Brennpunkte des Objectivs vereinigten und von da aus kegelförmig sich verbreitenden Strahlen eines leuchtenden Punktes aufzufassen oder, wenn die Pupille des Auges nicht gross genug ist, um den vom Oculare durchgelassenen Lichtcylinder aufzunehmen. Es sei z. B. $SABS$ (Fig. 11) der auf die freie Objectivöffnung einfallende Strahlencylinder; $g'k'kg$ der vom Oculare durchgelassene Lichtcylinder, F der gemeinschaftliche Brennpunkt der Objectiv- und Ocularlinsen. Nach einem optischen Gesetze ist der Winkel $g'Fg$ der Scheitelwinkel des Winkels AFB; wegen der deshalb stattfindenden Aehnlichkeit der Dreiecke ABF und $g'gF$ verhält sich aber AB zu $g'g$, oder der Durchmesser des ersten Cylinders zum Durchmesser des zweiten, wie $CF:Fc$. Nun ist $\frac{CF}{Fc}$ gleich der Vergrösserungszahl (§ 25, S. 44), welche wir durch G bezeichnen wollen. Folglich ist auch $\frac{AB}{g'g} = G$ und es werden nur dann alle auf das Objectiv einfallende Strahlen ins Auge kommen, wenn entweder $g'g$ dem Durchmesser d der Pupille gleich ist, oder wenn $g'g$ kleiner als d ist. Im ersten Falle wird $G = \frac{AB}{d}$, im zweiten $G > \frac{AB}{d}$. Wenn aber die Vergrösserung G kleiner als $\frac{AB}{d}$ ist, so muss auch gg', oder der Durchmesser des Lichtcylinders, beim Austritt aus dem Oculare grösser als der Durchmesser der Pupille sein, und es geht uns dann das ausserhalb der Pupille befindliche Licht verloren.

---

und durch die Flintglaslinie des Objectivs = 0,8122; also durch die beiden Linsen des Objectivs = 0,9164 × 0,8122 = 0,8103.

2) Bei dem Durchgange durch die beiden Kronglaslinsen des Oculars = 0,9164 × 0,9164 = 0,8398. Also bei dem Durchgange durch das Objectiv und Ocular des achromatischen Fernrohrs = 0,8103 × 0,8398 = 0,6805.

Da jeder Punkt eines durch ein Fernrohr gesehenen Gegenstandes wieder als ein Punkt erscheint, gleichviel ob das Fernrohr viel oder wenig vergrössert, so kann die L i c h t s t ä r k e oder die Intensität der Beleuchtung der einzelnen Punkte des im Fernrohr entstehenden Bildes nur von der Menge der Strahlen abhängen, die von jedem Punkte des Gegenstandes ausgehen und in unser Auge gelangen. Daher ist die L i c h t s t ä r k e nicht mit der H e l l i g k e i t oder dem Eindrucke des ganzen Bildes auf unser Auge zu verwechseln; die Lichtstärke ist von der Vergrösserung ganz unabhängig; die Helligkeit des Bildes aber muss, wie oben gezeigt ist, umgekehrt dem Quadrate der Vergrösserung proportional sein. Nach diesen Erklärungen wird folgende, von Olbers entlehnte Darstellung der Wirkung der Fernröhre leicht begreiflich sein:

„Wenn H die Helligkeit, L die Lichtstärke eines Gegenstandes, durch ein Fernrohr gesehen, ist, beide für das blosse Auge $= 1$ gesetzt, D der Durchmesser des Objectivs, d der Durchmesser der Pupille des Auges, G die Vergrösserung des Fernrohrs, und $1 : m$ das Verhältniss anzeigt, in welchem das Licht bei dem Durchgange durch die sämmtlichen Gläser des Fernrohrs geschwächt wird, ist $H = m \,.\, \frac{D^2}{d^2 \,.\, G^2}$; $L = m \,.\, \frac{D^2}{d^2}$.

So lange nun $G < \frac{D}{d}$ ist, ein Umstand, der wohl nur bei Fernröhren stattfindet, welche eine bedeutende Objectivöffnung und eine geringe Vergrösserung haben, bleibt H constant und $= m$. Denn wenn G kleiner als $\frac{D}{d}$ ist, so wird der Durchmesser des Lichtbüschels beim Austritte aus dem Oculare grösser, als die Pupille ihn fassen kann; sie nimmt daher nicht mehr von ihm auf, als sie erhalten würde, wenn das Objectiv nur den Durchmesser $G \,.\, d$ hätte. Der grösstmöglichste Werth von H ist also auch $= m$, und kann im Fernrohr nie grösser werden. Da nun m bei den besten Achromaten nur $= 0{,}85$ ist, so ist die Helligkeit eines Gegenstandes immer mit blossem Auge am

grössten. Sobald G grösser als $\frac{D}{d}$ ist, nimmt die Helligkeit schnell, wie das Quadrat von G, ab*).

L hingegen, oder die Lichtstärke ist constant, sobald $G =$ oder $> \frac{D}{d}$ wird, vorausgesetzt, dass das Gesichtsfeld noch immer den ganzen vergrösserten Gegenstand fasst. L kann also sehr gross werden, wenn D gross wird, und dies ist die Ursache, warum man ausserordentlich schwache Sterne durch ein Fernrohr mit grossem Objective sehen kann. Der Durchmesser der Pupille d (den man ungefähr $= 1/5$ Zoll annimmt) ist nicht allein für verschiedene Beobachter, sondern auch nach der absoluten Lichtstärke des betrachteten Gegenstandes verschieden; z. B. kleiner, wenn man den Mond, grösser, wenn man den Saturn betrachtet; kleiner, wenn man den Mond durch ein Fernrohr von 5 Zoll, als durch eins von 1 Zoll Oeffnung beobachtet.

Der Himmelsgrund hat auch bei Nacht einige, und bei Mondschein, Dämmerung u. s. w. sogar eine beträchtliche Helligkeit. Diese Helligkeit des Himmelsgrundes nimmt nun im Fernrohre, wie $m \cdot \frac{D^2}{d^2 . G^2}$ ab, und so bleibt das Verhältniss der Helligkeit des gesehenen Gegenstandes zu der Helligkeit des Himmelsgrundes eigentlich für jede Vergrösserung constant. Dies ist die Ursache, warum wir bei mässigen Vergrösserungen noch keine so grosse Abnahme der Helligkeit bemerken. Aber wenn wir diese Helligkeit des Himmelsgrundes h nennen, so bleibt zwar für jede Vergrösserung das Verhältniss $H : h$ dasselbe, aber unser Auge kann den Unterschied der Helligkeiten H und h nicht mehr empfinden, wenn $H - h$ sehr klein ist. Darum werden schwache Nebelflecke, der Schweif der Cometen u. s. w.

*) Durch directe Versuche ist gefunden:
$m = 0,7928$ für ein Objectiv von Cooke,
$= 0,7394$ „ „ „ „ Fraunhofer.

bei starken Vergrösserungen unsichtbar. Die Lichtstärke des Theils des Himmelsgrundes, den wir im Fernrohr sehen, steht nahe im umgekehrten Verhältniss mit G^2. Diese Lichtstärke des Theiles des Sehrohrfeldes kann so gross sein, dass wir deswegen kleine Gegenstände von geringer Lichtstärke gar nicht empfinden. Diess ist die Ursache, warum wir durch Cometensucher (Fernröhre mit ziemlich grossem Objective und kleiner Vergrösserung) bei Tage auch keine Fixsterne erster Grösse sehen können, die wir doch ohne Mühe durch stärker vergrössernde Fernröhre von viel kleinerer Objectivöffnung erblicken, und ferner, warum wir bei stärkerer Vergrösserung oft noch kleine Fixsterne wahrnehmen, die uns bei schwächerer Vergrösserung mit demselben Fernrohre unsichtbar bleiben."

Je vollkommener das Fernrohr ist, desto mehr wird das Bild eines Sternes einem leuchtenden Punkte ähnlich sein, und nach oben Gesagtem kann man bei der Beobachtung der Fixsterne ohne Besorgniss die stärksten Vergrösserungen anwenden.

28. Fernröhre von so einfacher Construction, wie sie oben beschrieben sind, würden sehr bedeutende Mängel haben; denn was wir früher vom Brennpunkte gesagt haben, würde nur dann annähernd wahr sein, wenn das Fernrohr bei einer sehr kleinen Objectivlinse eine bedeutende Brennweite hätte. Im entgegengesetzten Falle werden die Strahlen, welche auf die Ränder der Linse fallen, sich nicht in demjenigen Punkte bei ihrem Austritte aus der Objectivlinse vereinigen, in welchem die durch Mitte der Linse durchgehenden Strahlen zusammenfallen; dadurch würde das Bild eines Fixsterns nicht mehr ein scharf begrenzter Punkt, sondern ein undeutlicher Fleck sein, und alle Bilder von verschiedenen Gegenständen würden desto mehr verzerrt erscheinen, je grösser das Objectiv wäre. Dieser Mangel der Fernröhre heisst die sphärische Aberration, oder die Abweichung wegen der Kugelgestalt.

Bei den einfachen Fernröhren würde aber noch ein anderer, weit grösserer Fehler stattfinden; denn die weissen Lichtstrahlen

würden, nach ihrer Brechung in der Objectivlinse, sich in die sieben Farben des Regenbogens zerstreuen und dadurch das Bild des Gegenstandes mit farbigem Lichte umringt und verwischt erscheinen. Dieser Mangel des Fernrohrs heisst die chromatische Aberration. Euler war der erste, welcher die Möglichkeit wahrscheinlich machte, ein Fernrohr ohne solche Fehler zu construiren (im Jahre 1747); zuerst jedoch verfertigte der englische Künstler Dollond gegen das Jahr 1758 wirklich ein solches ziemlich fehlerfreies Fernrohr. Indessen erst in unserm Jahrhundert ist es dem Genie Fraunhofers gelungen, so ausgezeichnete Fernröhre zu verfertigen, dass sie den Anforderungen der Astronomen in hohem Grade entsprachen. In neuerer Zeit sind vorzügliche Fernröhre, zum Theil von grossen Dimensionen, von Alvan Clarke in Nordamerika, Cooke in England, Cauchois in Paris, Merz und Steinheil in München und Schröder in Hamburg angefertigt worden.

Es ist hier nicht der Ort, die Construction eines aplanatisch-achromatischen Fernrohrs, d. h. eines solchen Fernrohrs, welches keine sphärische und chromatische Aberration hat, näher zu beschreiben; hierüber kann man die obenerwähnten Werke nachlesen. In solchen Fernröhren besteht das Objectiv (Fig. 14) gewöhnlich aus zwei Linsen AB und $A'B'$; die erste dieser Linsen, AB, welche auf den Gegenstand gerichtet wird, ist eine biconvexe Linse, aus Kronglas (oder gewöhnlichem Glase) verfertigt; die zweite Linse, $A'B'$, ist ein Meniscus aus Flintglas (oder von solchem Glase, welches eine kleine Menge Bleioxyd enthält). Dieser Meniscus liegt mit seiner concaven Seite auf der Kronglaslinse, ohne sie jedoch zu berühren, indem zwischen beiden Linsen drei kleine Staniolblättchen an den Rändern beider Linsen sich befinden, welche um 120° von einander abstehen, so dass überall ein kleiner Zwischenraum zwischen beiden Linsen bleibt. Diese Linsen sind sphärisch geschliffen, und ihre Oberflächen haben verschiedene Krümmungen, welche von der Brechung und Zerstreuung des Lichts

im Kron- und Flintglase abhängen und so berechnet werden, dass die Fehler der Kronglaslinse durch die Fehler der Flintglaslinse aufgehoben werden *).

Achromatische Oculare giebt es von zweierlei Art. Das erste von ihnen, das sogenannte Huyghens'sche Ocular, besteht aus zwei plan-convexen Kronglaslinsen (Fig. 14), welche beide ihre convexe Seite dem Objective zukehren und so construirt sind, dass die Brennweite der ersten Linse des Oculars (derjenigen, welche dem Objective zunächst liegt) sich zur Entfernung der ersten Linse von der zweiten Linse und zur Brennweite der letzteren verhält, wie 3 : 2 : 1, so dass also die erste Linse um ihre halbe Brennweite näher am Objective liegen muss, als der Brennpunkt der zweiten Linse des Oculars. Die erste Linse dieses Oculars fängt also die Lichtstrahlen, welche aus der Objectivlinse treten, auf, ehe sie im Focus derselben das Bild des Gegenstandes entworfen haben, und bringt dieses Bild näher zum Objective hin; diese Linse heisst daher auch die Collectivlinse, während die andere Linse das eigentliche Ocular bildet und das in ihrem Focus befindliche Bild vergrössert. Wollte man nun einen Faden anbringen, so müsste er im Focus des eigentlichen Oculars aufgespannt werden, damit das Auge des Beobachters ihn zugleich mit dem Bilde deutlich sehen könnte; dann würden aber beide Aberrationen, die sphärische und die chromatische, anders auf das Bild als auf den Faden wirken, da die Lichtstrahlen des Bildes durch die Collectivlinse und die Ocularlinse, die Lichtstrahlen des Fadens aber nur durch die Ocularlinse gehen. Die Gläser sind so geschliffen, dass beide zusammen die Aberrationen möglichst ver-

*) Es sei die Focallänge der Convexlinse aus Kronglas $= F'$, die der Concavlinse aus Flintglas $= F''$, so ist die Focallänge des aus beiden Linsen zusammengesetzten Objectivs

$$F = \frac{F' F''}{F'' - F'}$$

ringern; eines allein aber nicht; es wird also das Bild des beobachteten Gegenstandes dem Auge in seiner richtigen Form, das Bild des Fadens aber durch die Aberration verzerrt erscheinen und daher zu allen Micrometermessungen untauglich sein. Dies ist der Grund, warum das Huyghens'sche Ocular bei Winkelmessungen nicht gebraucht wird.

Ausserdem wird durch Fern- oder Kurzsichtigkeit der Augen des Beobachters, sowie bei Beobachtung irdischer Objecte durch grössere oder geringere Entfernung der letzteren die Entfernung des Oculars vom Objective etwas bedingt. Dadurch verändert sich die Lage der Fäden im Huyghens'schen Oculare, und es entsteht eine bei Winkelmessungen schädliche Wandelbarkeit derselben.

Das Ocular der zweiten Art (das Ramsden'sche) besteht ebenfalls aus zwei plan-convexen Linsen (Fig. 15), aber hier sind ihre convexen Seiten einander zugekehrt und folglich die plane Seite der ersten Linse dem Objective, die plane Seite der zweiten Linse aber dem Auge des Beobachters zugewandt. Die Brennweite der zweiten Linse ist $= {}^5/_9$ der Brennweite der ersten Linse, und die Entfernung zwischen beiden Linsen $= {}^4/_9$ der Brennweite der ersten. Man stellt dieses Ocular in das Fernrohr immer so ein, dass der gemeinschaftliche Brennpunkt seiner beiden Linsen mit dem Brennpunkte des Objectivs zusammenfällt, wo auch die Fäden ebenfalls angebracht werden müssen.

In optischer Beziehung sind die Huyghens'sche Oculare vorzüglicher, weil sie weniger der sphärischen Aberration unterworfen sind, als die Ramsdenschen; man kann sie daher auch mit Vortheil bei solchen Instrumenten anwenden, bei welchen die Fäden nicht zu Winkelmessungen benutzt werden, sowie z. B. bei Sextanten, ferner bei Fernröhren, welche zur Betrachtung der Gestirne, zur Beobachtung der Finsternisse u. s. w. bestimmt sind.

Die Linsen des Oculars sind immer für sich in einem besonderen Röhrchen angebracht, welches sich in das Hauptrohr

des Fernrohrs einschieben lässt, und welches man dem Auge näher oder entfernter stellen kann. Für Kurzsichtigkeit muss man das Ramsden'sche Ocular dem Bilde des Gegenstandes und den Fäden näherstellen, für weitsichtige aber es etwas entfernen.

Es sei die Focallänge der einen Linse $= f'$, die der zweiten Linse $= f''$, die Entfernung von einander $= d$, so ist die Focallänge des zusammengesetzten Oculars (oder die Brennweite der äquivalenten einfachen biconvexen Linse) $f = \frac{f' f''}{f' + f'' - d}$.

29. Wir wollen jetzt einige Methoden angeben, durch welche man die Vergrösserung eines Fernrohrs finden kann, wobei wir voraussetzen, dass das Fernrohr auf den Focus gestellt sei, d. h. dass die Bilder sehr entfernter Gegenstände die grösstmöglichste Präcision und Schärfe haben. Wenn wir alsdann das Fernrohr nach dem Tageslichte richten, so wird sich in der Nähe des Oculars ein kleiner heller Kreis bilden, welcher nichts anderes als das Bild der Objectivöffnung ist. Messen wir nun den Durchmesser dieses Kreises durch einen in sehr kleine gleiche Theile eingetheilten geradlinigten Massstab aus, und ebenso auch die Objectivöffnung des Fernrohrs, so wird der so gemessene Durchmesser des Objectivs durch den Durchmesser des Lichtkreises dividirt, die Vergrösserung des Fernrohrs*) aus-

---

*) Wir führen hier einen sehr einfachen Beweis dieser Methode an, welchen man selten in Werken über Fernröhre antrifft. Es sei $J''J\,J'$, (Fig. 16) das Objectiv; $a\,c\,b$ das Ocular, J die Mitte der Objectivöffnung und j die Mitte des Lichtkreises $j''j\,j'$, welcher hinter dem Oculare entsteht. Schrauben wir die Objectivlinsen aus dem Fernrohr heraus, oder lassen sie auch im Fernrohre bleiben, so wird in beiden Fällen gleich viel Tageslicht in die Objectivöffnung eintreten und diese uns abgebildet in $j''j\,j'$ erscheinen. Aus den Elementen der Optik ist aber bekannt, dass, wenn ein leuchtender Gegenstand sich in der Entfernung d von einer convexen Linse befindet, alsdann die Lichtstrahlen, die von diesem Gegenstande ausgehen, hinter der Linse ein Bild des Gegenstandes hervorbringen, dessen Entfernung von der Linse $= \varphi$ eine solche sein muss, dass sie der Gleichung Genüge leistet:

drücken. Es sei z. B.: der Durchmesser des kleinen hellen Kreises = $\frac{1}{3}$ Linie; der Durchmesser des Objectivs = 24 Linien; alsdann wird $24 : \frac{1}{3} = 72$ die Vergrösserung des Fernrohrs sein. Zur genauen Messung des Durchmessers des erwähnten kleinen Kreises hat man verschiedene Vorrichtungen erfunden, von denen die beste das Ramsden'sche Dynamometer ist.

Eine andere sehr genaue Methode rührt von Gauss her. Wenn man das Fernrohr umkehrt und das Ocular auf einige entfernte Gegenstände richtet, so wird man, wenn man durch das Objectiv sieht, die Abbildungen dieser Gegenstände im Fernrohr um eben so viele Male verkleinert sehen, als das Fernrohr sie vergrössern würde, wenn man durch das Ocular beobachtete. Man richtet deshalb das Fernrohr so, dass man durch das Objectiv in der Mitte des Gesichtsfeldes, oder in gleicher Entfernung zu beiden Seiten der optischen Achse, zwei Gegenstände deutlich sehen kann. Man richtet alsdann auf dieses Fernrohr einen Theodoliten, so dass seine optische Achse mit der optischen Achse des Fernrohrs nahe zusammenfällt und misst nun den Winkel ($= \gamma$), welcher zwischen den Bildern der erwähnten Gegenstände eingeschlossen ist, wie sie in der umgekehrten Lage des Fernrohrs erscheinen. Nimmt man alsdann dieses letztere hinweg, und misst mit dem Theodoliten den Winkel T, welcher zwischen diesen Gegenständen selbst enthalten ist, so ist offenbar

---

$\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$, wo f die Brennweite der Linse ist. Wenn nun F die Brennweite des Objectivs, f die Brennweite des Oculars und d die Entfernung des Objectivs vom Oculare bezeichnet, so werden wir haben $Jc = d = F + f$; $cj = \varphi$; folglich $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f} - \frac{1}{F+f}$; $\frac{1}{\varphi} = \frac{F}{f(F+f)}$. Nun ist aber: $\frac{JJ'}{jj'} = \frac{Jc}{cj} = \frac{(F+f)}{f(F+f)} \cdot F = \frac{F}{f}$ = der *Vergrösserung* des Fernrohrs, und folglich ist diese Vergrösserung gleich dem Verhältniss des Durchmessers des Objectivs zum Durchmesser des kleinen hellen Kreises, welcher sich hinter dem Oculare bildet.

die gesuchte Vergrösserung $= \frac{tg \frac{1}{2} T}{tg \frac{1}{2} \gamma}$, und wenn die Winkel T und γ hinlänglich klein sind, sehr nahe $= \frac{T}{\gamma}$.

Wenn im gemeinschaftlichen Brennpunkte des Oculars und Objectivs Fäden eingespannt sind, wie dieses in den meisten astronomischen Fernröhren stattfindet, und die Winkelentfernungen dieser Fäden von einander bekannt sind, so wird es leicht sein, die Vergrösserung des Fernrohrs auf folgende Weise zu bestimmen. Misst man die Entfernung einer in derselben Höhe mit dem Fernrohre aufgestellten horizontalen Stange, die in mehrere gleiche Theile eingetheilt ist, und richtet das Fernrohr, gegen das Tageslicht, auf diese Stange, so kann man mit dem einen Auge durch das Ocular auf die Fäden im Fernrohre sehen, während man mit dem anderen Auge bemerkt, wie viele Theile der eingetheilten Stange zwischen den Fäden oder ihren Projectionen auf der Stange enthalten sind. Aus der Menge dieser Theile, der Grösse eines jeden und aus der bekannten Entfernung der Stange vom Auge, kann man sich leicht den Winkel berechnen, welcher zwischen den Gesichtslinien enthalten ist, die durch die Fäden nach den bemerkten Punkten auf der Stange gehen. Die Tangente dieses halben Winkels, durch die Tangente des halben Winkelabstands der Fäden dividirt, giebt uns alsdann die Vergrösserung des Fernrohrs. Um dieses besser einsehen zu können, sei O die Mitte des Objectivs $A\,B$ (Fig. 17); c die Mitte des Oculars $g\,g'$; F und F'' die in einer horizontalen Linie sich befindenden Punkte, durch welche die zwei verticalen Fäden durchgehen; P und Q die Punkte, in welchen man die Projectionen der Fäden sieht; R die Mitte der Linie $P\,Q$; F' die Mitte der Linie $F\,F''$, so dass P, R, Q von den Verlängerungen der Linien $F\,c$, $F'c$, $F''c$ getroffen werden. Die Fäden liegen in einer Ebene, der sogenannten Focalebene, die durch den gemeinschaftlichen Brennpunkt des Objectivs und Oculars geht und senkrecht zur optischen Achse des Fernrohrs steht; bezeichnet man den Winkel $F\,O\,F''$ mit k, so ist k der Win-

kelabstand eines Fadens von dem andern, welcher durch astronomische Beobachtungen leicht bestimmt werden kann. Hat man ausserdem die Linien $PQ = 2 . RP$ und Rc gemessen, so findet sich der Winkel PcR nach der Formel: $tg\, PcR = \frac{PR}{Rc}$, aber der Winkel $PcR = FcF'$; $OF' . tg\, F'OF = F'c\, tg\, FcF'$, und der Winkel FcF' oder PcR = der Hälfte des Winkels PcQ, mithin die Vergrösserung $\frac{OF'}{F'c} = \frac{tg\, \frac{1}{2} PcQ}{tg\, \frac{1}{2} k}$.

Statt eine eingetheilte Stange aufzustellen, kann man auch auf einer dem Fernrohr gegenüberstehenden Wand die Punkte bemerken, in welchen man bei horizontal aufgestelltem Fernrohre die Projectionen von zwei Verticalfäden sieht; mit einem Zollstock wird man den Abstand dieser Punkte von einander, und mit einer Messschnur die Entfernung von der Mitte zwischen diesen Punkten bis zur Ocularlinse leicht messen können. Als Beispiel wollen wir die Vergrösserung an einem Ertelschen Durchgangsinstrumente berechnen. Die Fadendistanz, oder k, war $18^s,74$ in Zeit oder $4'\ 41'',1$ in Bogen; der Abstand zwischen den Projectionen der Fäden, auf einer Wand, die vom Augenglase 64,1 englische Zoll entfernt war, war = 4,6 englische Zoll; hier ist also $tg\, \frac{1}{2} PcQ = \frac{2.3}{64,1}$; $\frac{1}{2} PcQ = 2°\ 3'$; mithin die Vergrösserung $= \frac{tg\ 2°\ 3'\ 0''}{tg\ 0°\ 2'\ 20'',5}$ beinahe = 52.

Eine andere sehr bequeme Art, die Vergrösserung eines Fernrohrs zu bestimmen, hat H. B. Valz (Astr. Nachr., Bd. VII, S. 204) vorgeschlagen. Sein Verfahren besteht darin, dass man das Fernrohr auf einen Gegenstand von bekanntem Durchmesser richtet und den Winkel misst, welchen die entgegengesetzten Randstrahlen des Gegenstandes bei ihrem Austreten aus dem Fernrohre untereinander bilden. Die Sonne, deren Durchmesser immer bekannt ist, eignet sich ihres grossen Glanzes wegen ganz besonders zu solchen Bestimmungen. Es seien $S'\ J$ und

$S''J$ die Strahlen, die von zwei diametral entgegengesetzten Rändern der Sonne (Fig. 18) auf die Mitte J des Objectivs OO einfallen; $F'FF''$ eine Ebene, die senkrecht zur optischen Achse des Fernrohrs steht und durch den gemeinschaftlichen Focus F des Objectivs OO und des Oculars AA geht; $F'ab'$ und $F''ab''$ die Richtungen der Randstrahlen beim Austritte aus dem Fernrohre; $b'cb''$ der Durchmesser des ausserhalb des Fernrohrs gemessenen Sonnenbildes; c seine Mitte; ac die Entfernung dieses Bildes vom Oculare AA. Wenn die Linearlängen der Linien $b'b'' = 2.b'c$ und ac gemessen werden, so lässt sich der Winkel $b'ac$ nach der Formel $tg\, b'ac = \frac{b'c}{ac}$ berechnen; nun ist aber $b'ac = F'aF$, und bekanntlich drückt das Verhältniss $tg\, F'aF : tg\, F'JF$ die Vergrösserungskraft G des Fernrohrs aus; in unserem Falle aber ist der Winkel $F'JF = S'JS$; der scheinbare Halbmesser der Sonne $= r$; folglich $G = tg\, FaF' : tg\, FJF' = tg\, b'ac : tg\, r = \frac{b'c}{ac} : tg\, r$, folglich:

$$G = \frac{b'b''}{2.ac.tg\, r}; \text{ oder beinahe } = \frac{b'b''}{ac} \cdot cotg\, 2\, r.$$

Um die Vergrösserung G zu finden, ist es also nur nöthig, mit Hülfe eines beliebigen Massstabes die Länge des Durchmessers $b'b''$ des Bildes und die Entfernung ac des Augenglases von diesem Bilde zu bestimmen; dann ist $G = \frac{b'b''}{ac} \cdot cotg\, 2\, r$. Es wird bequem sein, den Massstab für diese Messungen so einzurichten, dass die Entfernung ac vom Augenglase bis zum Bilde $b'cb''$ gleich wäre der Cotangente des Sonnendurchmessers $2\, r$; in diesem Falle giebt die in denselben Theilen des Massstabes ausgedrückte Länge des Bildes $b\, b''$ unmittelbar die Vergrösserungszahl G des Fernrohrs; z. B. im Januarmonat ist der Durchmesser der Sonne $= 2\, r = 32' 34''$; folglich muss man das Bild in der Entfernung von 105 des Massstabes messen; weil die Cotangente von $0° 32' 34'' = 105$ ist; im Juli muss diese Entfernung 109, im April und October 107 u. s. w.

betragen. Misst man nicht genau von der Mitte *a* des Augenglases, so muss man von der Grösse des gemessenen Durchmessers $b'b''$ den Durchmesser desjenigen kleinen Kreises abziehen, welcher sich in dem Punkte bildet, von welchem aus die Entfernung gezählt wird. Ist das Gesichtsfeld kleiner als der Durchmesser der Sonne und man kennt den Durchmesser des Gesichtsfeldes aus astronomischen Beobachtungen, so kann man das Gesichtsfeld statt der Sonne brauchen.

Die möglichst starke mit Nutzen anwendbare Vergrösserung des astronomischen Fernrohrs wächst mit der Oeffnung und mit der Vorzüglichkeit des Objectivs, d. h. mit der Verringerung der chromatischen und sphärischen Abweichungen. Ihre Grenze hängt indessen auch von der Kürze der Brennweite des Oculars ab; um Undeutlichkeit oder Verzerrung der Bilder zu vermeiden und das Gesichtsfeld nicht gar zu klein zu erhalten, darf die Focallänge des Oculars nicht unter $^2/_9$ Par. Zoll gehen. Also bei gleich guten Objectiven ist die stärkste Vergrösserung gleich der Focallänge des Objectivs dividirt durch $^2/_9$ Zoll, vorausgesetzt, dass diese Focallänge in Par. Zollen ausgedrückt ist. Der schöne Fraunhofersche Refractor in Dorpat hat 160 Par. Zoll Focallänge und eine Oeffnung von 108 Linien; demnach wäre die stärkste anwendbare Vergrösserung dieses Fernrohrs gleich $160 : \frac{2}{9} = 720$.

30. Der Beobachter wird zuweilen in den Fall kommen, sich die Fäden, welche zur Bestimmung der Gesichtslinien im Gesichtsfelde des Fernrohrs dienen, selbst aufziehen zu müssen. Gewöhnlich braucht man hierzu Spinnfäden, welche mit Wachs oder Firniss an eine ringförmige Platte angeklebt werden, die sich im Ocularröhrchen befindet. Nimmt man das ganze Ocularröhrchen aus dem Fernrohre heraus, die Augengläser ebenfalls weg und löst die Schrauben, welche die Platte befestigen, so wird man leicht zur Platte gelangen können. W. v. Struve hat folgende Regel zum Aufspannen der Fäden gegeben, zu welcher wir noch einiges aus unserer eigenen Erfahrung hinzu-

fügen werden. Man erhält die Fäden entweder von der Spinne selbst, oder nimmt sie vom Cocon der Spinne. Im ersten Falle lässt man die Spinne längs einer Schreibfeder laufen und zwingt sie durch eine Erschütterung sich vom Ende derselben an einem Faden herabzulassen. Ein solcher Faden lässt sich mit einem geöffneten Zirkel, dessen Schenkel mit Wachs oder Firniss bestrichen sind, dadurch auffassen, dass man jede der Spitzen so bewegt, dass sich der Faden um den Schenkel des Zirkels wickelt. Darauf befeuchtet man den Faden entweder mit lauwarmem Wasser, oder auch durch Anhauchen; und bringt dann endlich nach und nach die beiden Spitzen des Zirkels so weit auseinander, bis der Faden die grösste Spannung erreicht hat. In diesem Zustande hoher Spannung muss der Faden auf der Platte befestigt werden, damit er auch bei feuchtem Wetter straff bleibt. Der aufgefasste Faden wird dann mit Hülfe des Zirkels in die gehörige Lage auf die Platte gebracht und durch einen Tropfen heissen Wachses oder durch etwas mit einer feinen Holzspitze aufgetragenen Firnisses befestigt*); Firniss ist hierbei vorzuziehen, weil das Wachs bei grosser Kälte springt und bei grosser Hitze weich wird.

Die Fäden, welche unmittelbar von der Spinne erhalten werden, sind zuweilen ungemein dünne**) und daher Nachts bei schwacher Beleuchtung des Gesichtsfeldes schwer zu sehen; dazu geben die Spinnen nicht zu jeder Jahreszeit Fäden und sind auch nicht immer zur Hand, weshalb es durchaus nöthig ist, sich mit einigen der Cocons zu versehen, worin die Spinnen ihre Eier legen. Die Cocons haben eine gelbliche Farbe und werden in hölzernen Gebäuden, unter Eisendächern u. s. w. gefunden; die Eier werden durch ein sanftes Klopfen herausgeworfen. Alle

---

*) Hierzu wird solcher Firniss gebraucht, mit dem man Messing überzieht.

**) Zwingt man durch wiederholte Erschütterungen die Spinne, sich abermals herunterzulassen, so bekommt man dickere Fäden.

Fäden von einem Cocon sind gleich dick, nur muss man beim Aufziehen derselben darauf Acht haben, dass sie vollkommen rein von Staub sind. Hat man viele Fäden auf die Platte zu ziehen, so kann man am besten folgendermassen verfahren: die Platte wird auf ein Stück Holz, das nicht breiter als die Platte ist gelegt, und steht also etwas erhaben vom Tische ab, auf welchem man diese Arbeit vornehmen will, dann windet man den Faden vom Cocon ab und befestigt an beiden Enden desselben kleine, mit Wachs bestrichene Bleiplatten, welche eben genug Gewicht haben, den Faden stark anzuspannen, ohne ihn jedoch zu zerreissen; nun taucht man den Faden in lauwarmes Wasser und legt ihn, an beiden Bleiplatten angefasst, auf seine Stelle auf der Platte. Auf ähnliche Weise verfährt man auch mit den anderen Fäden und wenn sie alle mit gleichen Gewichten belastet, auf der Platte fest und stark aufgespannt liegen, so sieht man mit der Lupe zu, ob die Fäden die gehörige Lage auf der Platte haben, d. h. ob sie untereinander ganz parallel sind und sich in gleichen Zwischenräumen folgen. Ist dieses nicht der Fall, so kann man den Faden mit einer Stecknadelspitze etwas verstellen. Bemerkt man endlich, dass alle Fäden richtig liegen, so befestigt man sie durch etwas mit einem Stecknadelknopfe aufgetragenen Firniss auf den an der Platte bemerkten Stellen. Die kleinen Gewichte schneidet man aber nicht eher ab, als bis der Firniss vollkommen trocken geworden ist. Beim Aufziehen der Fäden ist es gut, unter der freien Oeffnung der Platte einen schwarzen, matten Grund zu haben, damit die Fäden vom Tageslichte erleuchtet, deutlicher auf einem dunkeln Grunde erscheinen. Noch besser ist es, die Fadenplatte über eine Oeffnung zu legen, unter welcher sich ein drehbarer Spiegel befindet, der durch das Zurückwerfen des Tageslichts die Fäden als dunkle Linien auf hellem Hintergrunde gut sichtbar macht.

31. Die Platte, welche die Fäden trägt, muss in die Focalebene gebracht werden, oder senkrecht auf der optischen Achse des Fernrohrs stehen und durch den gemeinschaftlichen Brenn-

punkt des Objectivs und Oculars gehen. Die Künstler sorgen selbst dafür, dass, wenn die Fadenplatte in ihrem Lager richtig befestigt wird, sie senkrecht zur optischen Achse zu stehen kommt. Um die zweite Bedingung zu erfüllen, bringt man zuerst das Fadennetz in den Brennpunkt des Oculars; zu diesem Zwecke bewegt man die Fadenplatte in der Richtung der Ocularröhre, oder wenn dieses nicht möglich ist, zieht man die Ocularlinse etwas heraus oder schiebt sie etwas hinein, so lange bis man die Fäden recht deutlich sieht. Darauf richtet man das Fernrohr auf einen entfernten Gegenstand, und ohne die Fadenplatte oder das Augenglas zu berühren, bewegt man langsam das ganze Ocularrohr dem Objective näher, oder entfernt es weiter davon, bis endlich das Bild des Gegenstandes ganz scharf erscheint und zugleich auch die Fäden ganz deutlich gesehen werden. Alsdann wird das Fadennetz auch im Brennpunkte des Objectivs sein müssen und wird hier festgestellt.

Der beste Gegenstand, auf welchen man bei dieser Berichtigung das Fernrohr zu richten hat, ist ein jeder helle Stern. Wenn man die Fäden gut sieht und der Stern sich rund wie ein deutlicher Punkt darstellt, so kann man sicher sein, dass das Fernrohr in Bezug auf den Focus gut eingestellt ist.

Es giebt noch ein Mittel um zu sehen, ob das Fadennetz wirklich in die Focalebene gebracht worden ist. Wenn man irgend einen der Fäden auf einen entfernten terrestrischen Gegenstand richtet, so wird das Bild des Gegenstandes mit diesem Faden zusammenfallen; bewegt man darauf das Auge rechts oder links, nach oben oder unten, und bemerkt, dass das Bild des Gegenstandes den Faden nicht verlässt, so beweist dieses, dass die Fadenplatte richtig gestellt ist; wenn man dagegen bemerkt, dass bei der Bewegung des Auges nach rechts, der Gegenstand von dem Verticalfaden sich nach links bewegt, so ist es klar, dass die Fadenplatte nicht durch den Brennpunkt des Objectivs geht, und dass dieser Brennpunkt näher am Auge des Beob-

achters liegt, als der Faden; im entgegengesetzten Falle, wenn nämlich bei einer Bewegung des Auges nach rechts, der Gegenstand ebenfalls sich rechts von dem Faden zu entfernen scheint, muss der Focus weiter vom Auge als der Faden abstehen. In diesen beiden Fällen wird man leicht die Lage der Fadenplatte durch eine kleine Bewegung des ganzen Ocularrohrs verbessern können.

32. Die Güte des Fernrohrs wird durch die Präcision und Helligkeit der Bilder bedingt; wenn das Objectiv gut construirt ist, so wird das Bild eines stark erleuchteten Gegenstandes, wie z. B. eines weissen Kreises auf schwarzem Grunde, ganz scharf und regelmässig begrenzt erscheinen, ohne farbiges Licht an seinen Rändern zu zeigen; und wenn das Ocular auch gut ist, so muss das Bild gleich deutlich erscheinen, ob man es in der Mitte, oder nahe am Rande des Gesichtsfeldes betrachtet. Am besten ist es, das Fernrohr auf einen sehr hellen Stern erster Grösse, wie z. B. Sirius oder α Lyrae, zu richten; ist dann das Fernrohr so gut wie möglich auf den Focus eingestellt und bemerkt man Lichtstreifen neben dem Bilde des Sterns, so ist das Objectiv schlecht centrirt, oder besteht aus nicht homogenem Glase *).

---

*) Der verstorbene Ministerialrath v. Steinheil in München prüfte die Objective noch auf folgende Weise. Er richtete das Fernrohr nach dem Bilde der Sonne auf einer hochpolirten Stahlkugel von 6 Linien Durchmesser in einer Entfernung von 60 Fuss Abstand. Wegen ruhiger Luft wurde die Untersuchung im geschlossenen Zimmer vorgenommen und um auffallendes Licht abzuhalten, wurden die Fensterladen geschlossen. Es gelten dann folgende Regeln:

1) Wenn beim Verschieben des Oculars die Lichtscheiben gleich vor und hinter dem Bilde nicht rund sind, sondern oval, so sind die Ebenen der Linsen gegen einander geneigt.

2) Wenn die Helligkeit der Lichtscheiben nicht symmetrisch vertheilt ist, so stehen die Linsen beide nicht senkrecht zur optischen Achse.

3) Wenn die Färbung der Ränder der Lichtscheiben nicht symmetrisch ist, so müssen die Mittelpunkte der Linsen in der Objectivebene gegen einander verstellt werden, bis die Farben ganz symmetrisch liegen.

4) Wenn die Lichtscheibe in der Mitte heller ist als am Rande, so ist

Grosse Fernrohre werden am besten dadurch geprüft, dass man sie auf einen Doppelstern richtet und beobachtet, ob dadurch der Stern deutlich getheilt erscheint; denn hierbei kommt es vorzüglich auf scharfe Bilder an.

Man kann noch auf eine andere Weise die Güte des Objectivs untersuchen. Man stellt nämlich das Ocular des Fernrohrs genau auf den Focus ein, und richtet das Fernrohr auf den Mond oder auf einen sehr hell erleuchteten und gut sichtbaren terrestrischen Gegenstand; wenn alsdann das Objectiv richtig construirt ist, wie dieses in allen Fraunhoferschen Fernröhren der Fall ist, so werden, wenn man das Ocular ganz wenig aus dem Focus des Fernrohrs nach dem Auge zu herausbewegt, die Ränder des Bildes in schwachem purpurnen Lichte erscheinen, schiebt man es aber ein wenig in das Innere des Fernrohrs hinein, so werden sie schwach grünlich erscheinen; diese Färbung rührt von dem sogenannten secundären Lichtspectrum her und beweist den Achromatismus des Objectivs. Um zu erfahren, ob das Objectiv frei ist von Abweichung wegen der Kugelgestalt, d. h. ob es auch jeden Punkt eines Gegenstandes wirklich als einen Punkt abbildet, muss man das Objectiv zuerst mit einem Stücke Papier, welches in der Mitte kreisförmig ausgeschnitten ist, bedecken, es darauf auf den Mond oder auf einen hellen Stern richten, und alsdann das Ocular genau auf den Focus stellen. Wenn dieses geschehen ist, so bedeckt man das Objectiv, aber nur in der Mitte, mit einem Papierkreis, so dass die Ränder des Objectivs frei bleiben; wenn man nun die Stellung des Oculars nicht zu ändern braucht, um am deutlichsten zu sehen, so ist dieses ein Beweis, dass keine bedeutende sphärische Aberration beim Objective stattfindet.

---

die Kugelgestalt nicht hinreichend compensirt, was sich zuweilen dadurch verbessern lässt, dass man die Linsen näher gegen einander rückt oder von einander entfernt.

Anm. des Herausgebers.

Stampfer hat ein bequemes Mittel zur Prüfung der Fernröhre vorgeschlagen*); man bedient sich dazu einer Scala, oder eines Lineals mit parallelen schwarzen Strichen auf weissem Grunde; die Breiten der Striche und Zwischenräume nehmen allmählich nach einer geometrischen Progression ab. Der Massstab der Scala hängt von der Entfernung ab, in welcher sie aufgestellt werden soll, auch von den Grenzen, welche den zu prüfenden Fernröhren entsprechen. Es sei b die Breite eines der Striche oder des Zwischenraumes, D die Entfernung der Scala vom Objectiv; wenn die Scala senkrecht ist zur optischen Achse des Fernrohrs und b und D in demselben linearen Masse ausgedrückt sind, so wird der Sehwinkel e, unter welchem b erscheint, nach der Formel

$$e = \frac{b}{D \sin 1''}$$

in Secunden bestimmt.

Man richtet das Fernrohr auf die Scala, stellt das Ocular so, dass die Striche am deutlichsten sichtbar werden, und betrachtet die feinsten Striche und Zwischenräume, welche abgesondert von einander bemerkt werden können. Die benachbarte unauflösliche Reihe von noch feineren Strichen und engeren Zwischenräumen erscheint dann wie eine Schraffirung in gleichförmiger Färbung; der letzte unterscheidbare Theil wird nicht ein schwarzer Strich, sondern ein weisser Zwischenraum sein. Der kleinste Sehwinkel, welcher mit Hülfe des zu prüfenden Fernrohrs bemerkbar wird, ist der Sehwinkel, unter welchem der letzte auflösbare Zwischenraum erscheint; je kleiner dieser Winkel ist, desto besser muss das Fernrohr sein.

Der Sehwinkel, welchen das freie Auge noch unterscheiden kann, wurde aus mehreren Versuchen von Stampfer gefunden: für Striche $= 45''\frac{1}{2}$, für Punkte $= 43''\frac{3}{4}$, für Buchstaben $= 171''$.

---

*) Jahrbuch des K. K. polytechn. Instituts in Wien, XIX. Bd.

Im Allgemeinen nimmt man den Sehwinkel für das freie Auge zwischen 50″ und 60″ an.

Es sei g die Vergrösserung des Fernrohrs, η der kleinste mit diesem Fernrohr erreichbare Sehwinkel; wenn das Rohr vollkommene Präcision der Bilder gestattete, so würde der kleinste Sehwinkel η in dem Verhältnisse abnehmen, in welchem die Vergrösserung des Fernrohrs wächst, dann würde auch das Product $\eta . g$ constant sein und für Striche der Scala ungefähr 45″ oder 50″ ausmachen. Allein wegen der Unvollkommenheiten des Objectivs und der Oculare wird $\eta . g$ die 50″ übersteigen und zwar um so mehr, je geringer die Präcision der Bilder ist. Daher nimmt η in kleinerem Verhältnisse ab, als in welchem g zunimmt. Der kleinste Sehwinkel erreicht endlich eine Grenze, unter welche er durch Vermehrung der Vergrösserung nicht mehr herabgebracht werden kann. Dieser Fall tritt ein, wenn die Ränder der Bilder, deren gegenseitiger Abstand unter kleinerem Winkel als η erscheint, wegen der Fehler des Objectivs und Oculars beginnen über einander zu fallen und sich zu verwaschen, so dass keine neuen kleineren Detailpunkte am beobachteten Objecte durch stärkere Vergrösserung aufgelöst werden können. Sobald aber keine weitere Auflösung erfolgt, ist eine Steigerung in der Vergrösserung des Fernrohrs ganz zwecklos, ja sogar wegen Verwinderung der Helligkeit der Bilder nachtheilig. Das Product $\eta . g$ kann also zur Prüfung der Präcision der Bilder dienen und $\frac{50}{\eta . g}$ als Mass der Präcision angenommen werden. Z. B. für zwei Fernröhre, deren Vergrösserungen 25 bis 80 sind, hat man η gleich 3″ und 1″ gefunden; so ist für ersteres Fernrohr $\eta . g = 75$, für das andere $\eta . g = 80$; mithin ist die Präcision des ersten Fernrohrs grösser. Hier ist blos von der relativen Schärfe der Bilder, nicht aber von der anderweitigen Wirkung der Fernröhre die Rede.

Ueberhaupt ist der optische Werth eines Objectivs um so bedeutender, je mehr Vergrösserung es im Verhältnisse zu seiner

Brennweite verträgt, d. h. je kleiner der kleinste Sehwinkel η gemacht werden kann. Bezeichnet man die Brennweite des Objectivs mit F, so wird das Product $F.\eta$ uns zur Beurtheilung über die Güte des Fernrohrs dienen können; diese Güte wird desto grösser sein, je kleiner das Product $F.\eta$ ist. Da auch hier die von der Objectivöffnung und der Vergrösserung abhängende Helligkeit der Bilder bedeutenden Einfluss hat, so ist die obige Relation nur näherungsweise richtig. Ist die Helligkeit des Bildes so gross, dass sie zur Wahrnehmung alles auflösbaren Details hinreicht, so bringt eine Vermehrung derselben keinen Gewinn mehr hervor; daher kann es der Fall sein, dass ein Fernrohr bei hellem Tage das Detail ebenso oder noch mehr auflöst, als ein anderes von grösserer Oeffnung.

Wenn man keine gut eingerichtete Scala besitzt und diese Fernröhre nicht gross sind, so kann man zur Prüfung der Fernröhre ein gedrucktes Buch in passende Entfernungen vor dem Objectiv stellen und verschiedene Schriften betrachten, bis man zu den feinsten, noch unterscheidbaren Buchstaben kommt.

33. Zuweilen wird man das Objectiv reinigen müssen; und meistens genügt es hierzu nur seine beiden äusseren Oberflächen zu reinigen, sollte aber zwischen die beiden Linsen Staub eingedrungen sein, so muss man sie sehr vorsichtig auseinandernehmen, und hierbei genau darauf achten, welche Flächen der Linsen aufeinanderliegen, und welche Oberflächen nach aussen oder nach dem Inneren des Fernrohrs gekehrt sind. Nachdem man alsdann die inneren Seiten gereinigt hat, legt man sie wieder ganz in derselben Ordnung aufeinander, in welcher sie vorher waren, und legt auf die Stellen an dem Rande, wo sich die früheren Staniolblättchen befanden, neue hin, indem man besonders darauf achtet, dass die Dicke dieser drei Staniolblättchen ganz gleich ist. Zum Entfernen des Staubes selbst wendet man einen zarten Pinsel von weichen Haaren an, wie man ihn beim Malen mit Wasserfarben braucht. Um die Linsen abzuputzen, wendet man reine Lappen von weicher, feiner, alter

Leinewand an, die man, wenn es nöthig sein sollte, mit Weingeist anfeuchtet, und alsdann reibt man die Linsen nochmals mit einem ähnlichen trockenen Lappen ab. Man kann auch wohl hierzu sehr weiches Sämischleder brauchen; jedoch muss man dabei äusserst vorsichtig sein, weil man sonst leicht die Linsen zerkratzen und dadurch das ganze Fernrohr verderben könnte.

3) Von der Lupe und dem Mikroskop.

34. Die Lupe dient zum besseren Sehen von kleinen Objecten; sie besteht aus einer biconvexen Linse von Kronglas; die Krümmungshalbmesser der einen und anderen Seite verhalten sich wie 6 : 1; man bedient sich auch planconvexer Linsen als Lupen; in beiden Fällen hat die Linse eine kleine Brennweite. Bei richtiger Benutzung der Lupe wird die schwächer gekrümmte, oder auch die ebene Seite dem Auge des Beobachters zugekehrt; die Entfernung der stärker gekrümmten Seite der Lupe muss von dem zu betrachtenden Gegenstand nahezu der Brennweite der Linse gleich sein; durch allmähliche Annäherung der Lupe zum Gegenstand oder Entfernung von demselben, findet man bald die Lage, in welcher der Gegenstand am deutlichsten erscheint.

Man nimmt gewöhnlich an, dass ein kleiner Gegenstand in der Entfernung von 8 englischen Zoll ($203\frac{1}{4}$ mm) dem blossen Auge gut sichtbar ist, dabei muss noch die Ausdehnung des Gegenstandes hinreichend sein, um seine Gestalt wahrnehmen zu können. Vermittelst der Lupe wird aber der Gegenstand so gesehen, als ob er um die Brennweite der Linse vom Auge abstände, welche viel kürzer ist als 8 Zoll; bezeichnen wir die Brennweite, in Zollen ausgedrückt, durch f, so giebt also das Verhältniss $\frac{8}{f}$ nahezu die Vergrösserung, welche man durch die Lupe erhält.

Um die Aberration des Glases zu schwächen, construirt man

Lupen auch aus zwei Linsen, die in einem Röhrchen sich befinden.

35. Noch besser werden kleine Gegenstände durch Mikroskope gesehen. Das einfachste Mikroskop besteht aus zwei Collectivlinsen; die kleinere von ihnen *MM* (Fig. 19) hat eine kürzere Brennweite; sie wird dem beobachteten Gegenstande zugekehrt und heisst Objectivlinse. Die grössere, von längerer Brennweite, ist die Ocularlinse *NN* und wird dem Auge zugewandt, also im Vergleich mit dem Fernrohre sind die Linsen im Mikroskop umgekehrt gestellt.

Der beobachtete Gegenstand *a b* muss beleuchtet werden, etwas mehr als um die Brennweite des Objectivs *M M* von dieser Linse abstehen und in der Verlängerung der geraden Linie sich befinden, welche die optischen Mittelpunkte der Objectiv- und Ocularlinsen miteinander verbindet; diese gerade Linie heisst die optische Achse des Mikroskops.

Die aus dem Punkte *a* des Gegenstandes divergirenden Lichtstrahlen treffen die Objectivlinse *M M*, werden im Glase gebrochen und convergent gemacht; sie schneiden sich gegenseitig auf der entgegengesetzten Seite der Linse *M M* in einem Punkte *A*, welcher das Bild des Punktes *a* darstellt und auf der geraden Linie liegt, welche durch *a* und den optischen Mittelpunkt der Objectivlinse geht.

Auf dieselbe Weise entsteht das Bild *B* des Punktes *b* und die Bilder aller anderen sichtbaren Punkte des Gegenstandes, dessen vollständiges Bild ein umgekehrtes sein wird. Wenn die Ocularlinse *N N* (Fig. 19) um ihre Brennweite vom Bilde *A B* absteht, so kann man dieses Bild durch das Ocular sehen.

Es seien f und F die Brennweiten des Objectivs und des Oculars; d und φ die Entfernungen des Gegenstandes und seines Bildes von der Objectivlinse; dann ist: $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d}$, oder $\frac{\varphi}{d} = \frac{f}{d-f}$; nun ist $\frac{AB}{ab} = \frac{\varphi}{d}$, wo $A\,B$ die Lineargrösse des Bildes und $a\,b$ die des Gegenstandes bedeuten; folglich ist das

Bild grösser als der Gegenstand im Verhältniss von f zu $d-f$. Vorausgesetzt, dass F, f und d in englischen Zollen ausgedrückt sind, ist $\frac{8}{F}$ die Vergrösserung durch die Wirkung der Ocularlinse; und die ganze Vergrösserung, welche durch die Wirkung des Mikroskops erreicht wird, ist also $\frac{8}{F} \times \frac{f}{d-f}$, d. h. sie ist gleich dem Producte aus der Vergrösserung durch das Ocular in die Vergrösserung durch das Objectiv. Wenn z. B. das Ocular viermal und das Objectiv neunmal vergrössert, so ist die Vergrösserung durch das Mikroskop eine 4×9 oder 36fache. Mit der Veränderung des Abstandes d ändert sich auch die Vergrösserung, welche das Mikroskop liefert; sie ist desto bedeutender je kleiner d wird; jedenfalls aber muss d grösser sein als f.

Um die Verzerrung des Bildes zu beseitigen, welche von den Aberrationen der Linsen abhängt, setzt man sowohl das Objectiv, als auch das Ocular aus zwei Linsen zusammen, über deren Einrichtung man in Littrows Dioptrik das hauptsächlichste finden kann. Die Doppeloculare von Mikroskopen sind gewöhnlich entweder die Ramsden'schen oder die Huyghens'schen, je nach dem Gebrauch der Mikroskope — meistens Huyghens'sche.

4) Vom Nonius oder Vernier.

36. Um an einer Kreistheilung nicht nur die Grade und Minuten, sondern auch die Secunden, welche jeder Lage der Alhidade entsprechen, ablesen zu können, bringt man an den Enden der Alhidade statt eines einfachen Abzeichens eine besondere Vorrichtung an, welche nach ihren Erfindern Nonius oder Vernier genannt wird; wir wollen hier kurz angeben, worin sie besteht.

Es sei der Limbus seinem ganzen Umfange nach in 360 gleiche Theile oder Grade, und wiederum jeder Grad z. B. in 6 Theile eingetheilt; so wird alsdann zwischen zwei aufeinanderfolgenden Strichen ein Bogen von 10′ eingeschlossen sein, und

59 solche Theile werden einen Bogen von 9° 50′ betragen. Stellt man sich nun die Alhidade an ihren beiden Enden hinlänglich breit vor, so kann man sich auf dieser Alhidade anstatt eines Striches einen Bogen angebracht denken, der in 60 gleiche Theile getheilt und einem Bogen des Limbus von 9° 50′ gleich und concentrisch ist. Ein jeder Theil des Bogens auf der Alhidade wird etwas kleiner als die Länge eines Theils auf dem Limbus sein, nach dem Verhältniss von 59 zu 60; nimmt man nun an, dass der Bogen auf der Alhidade beinahe den Umfang des Kreises berührt, so wird der Unterschied zwischen der Länge eines Theils des Limbus und der Länge eines Theils der Alhidade nur $\frac{1}{60}$ des Theils auf dem Limbus betragen, und daher $= \frac{1}{60} \cdot 10' = 10''$ sein. Nehmen wir nun an, dass der Anfang der Zählung oder der Nullpunkt auf dem Bogen der Alhidade genau zusammentreffe mit irgend einem Theilstriche der Theilung des Limbus, und betrachten alsdann ferner die Striche auf der Alhidade nach der Ordnung der Zunahme der Theilung, so werden wir bemerken, dass der erste Strich nach dem Nullpunkte auf der Alhidade nicht mehr mit dem ersten folgenden Striche auf dem Limbus zusammenfällt; ihre Entfernung von einander wird, wie wir gesehen haben, gleich einem Bogen von 10″ sein. Der zweite Theilstrich entfernt sich um 20″, der dritte um 30″ und so fort; der sechste um 60″ oder 1′; der zwölfte um 2′, und endlich entfernt sich der sechzigste Theilstrich des Limbus vom sechzigsten Theilstriche der Alhidade um 600″ oder 10′, so dass letzterer mit dem neunundfunfzigsten Theilstriche des Limbus zusammenfällt. Wir wollen nun annehmen, dass die Alhidade so verstellt würde, dass nicht mehr ihr erster Strich (Nullpunkt), sondern der darauf zunächst folgende mit irgend einem bestimmten Striche der Limbustheilung genau zusammenfiele; so ist es klar, dass der Abstand des Nullpunkts auf der Alhidade von demjenigen Striche des Limbus, welcher ihm unmittelbar vorher-

geht, gleich 10″ sein wird; bewegen wir die Alhidade so, dass ihr zweiter Strich nach dem Nullpunkt mit einem Striche des Limbus genau zusammentrifft, so wird der Nullpunkt auf der Alhidade um 20″ von dem ihm unmittelbar vorhergehenden Striche des Limbus entfernt sein und überhaupt, wenn der b^{te} Strich nach dem Nullpunkte auf der Alhidade mit irgend einem Striche des Limbus zusammenfällt, so wird der Nullpunkt der Alhidade von dem ihm unmittelbar vorangehenden Striche der Limbustheilung, um $b \times 10''$ abstehen. Die Anwendung dieses Bogens auf der Alhidade, welcher Nonius oder Vernier genannt wird, lässt sich daher leicht begreifen. Richtet man nämlich das Fernrohr auf einen bestimmten Gegenstand, und wünscht man die Anzahl von Graden, Minuten und Secunden zu wissen, welche auf dem Limbus dem Nullpunkte des Verniers entsprechen, so muss man zuerst die Anzahl von Graden und ganzen Minuten, welche auf dem Limbus dem Nullpunkte des Verniers unmittelbar vorangehen, ablesen, und darauf auf dem Bogen des Verniers die Anzahl der Striche zwischen seinem Nullpunkte und demjenigen Striche zählen, welcher mit einem Striche des Limbus genau zusammentrifft. Multiplicirt man diese Anzahl mit 10″, so erhält man die Zahl von Secunden, welche man zu der vorhin abgelesenen Zahl von Graden und ganzen Minuten zulegen muss, um die genaue Lage des Nullpunkts des Verniers auf dem Limbus zu erhalten.

Zur Erleichterung der Ablesung sind, unter die entsprechenden Striche auf dem Limbus, die Zahlen 0°, 5°, 10° u. s. w. von 5 zu 5 Graden von 0° bis zu 355° hingeschrieben. Die ganzen Grade werden mit langen Strichen bezeichnet, die halben Grade mit etwas kleineren, die übrigen mit noch kleineren, die nur halb so gross sind. Auf dem Vernier wird der Nullpunkt und ausserdem der 6^{te}, 12^{te}, 18^{te} u. s. w. 54^{ste} und 60^{ste} Strich durch längliche Striche bezeichnet, und auserdem findet man unter dem Nullpunkte, dem 12^{ten}, 24^{sten}, 36^{sten}, 48^{sten} und 60^{sten} Striche, die Zahlen 0, 2, 4, 6, 8 und 10 angemerkt,

welche bei dem genauen Zusammentreffen ihrer entsprechenden Striche mit den Strichen des Limbus, die gerade Zahl von ganzen Minuten anzeigen, um welche der Nullpunkt des Verniers von dem unmittelbar vorhergehenden Striche des Limbus absteht; ebenso bezeichnen die langen Striche die Minuten, die halbsolangen die halben Minuten und die übrigen noch kleineren die Zehner der Secunden. Es ist nun leicht, sich aus dem vorigen Beispiele die Regel für jede beliebige andere Art von Eintheilung des Limbus und der Verniers abzuleiten. Es sei daher ganz allgemein der Umfang des Limbus in irgend eine Anzahl gleicher Theile eingetheilt, und einer dieser Theile sei gleich m Minuten; nimmt man nun an, dass ein concentrischer Bogen auf dem Vernier, der $(n-1)$ Theilen auf dem Limbus gleich sei, selbst wiederum in n gleiche Theile eingetheilt wäre, so wird die Länge eines Theils auf dem Limbus sich zu der Länge eines Theils auf dem Vernier wie $n : n-1$ verhalten, und der Unterschied dieser beiden Längen wird $\frac{m}{n}$ Theile einer Minute oder $\frac{60 \cdot m}{n}$ Secunden betragen.

Wir haben auch noch vorausgesetzt, dass die Theilung auf dem Vernier nach derselben Richtung wie die Theilung auf dem Limbus fortschreitet, dieses wird auch meistens stattfinden; in diesem Falle werden die Verniere directe genannt; wenn aber die Theilung auf dem Vernier in umgekehrter Richtung wie diejenige auf dem Limbus fortschreitet, so wird der Bogen des Verniers in n gleiche Theile getheilt, welche der Länge von $n+1$ Theilen des Limbus entsprechen; enthält also ein Theil des Limbus m Minuten, so kommen $\left(\frac{n+1}{n}\right) m$ Minuten auf einen Theil des Verniers; der Unterschied beträgt dann $\frac{m}{n}$ Minuten oder $\frac{60 \cdot m}{n}$ Secunden.

37. Zur Bequemlichkeit der Ablesung ist die Limbustheilung meistentheils auf einem silbernen Kreisstreifen ange-

bracht, welcher in den Limbus eingelassen ist; die Theilung des Verniers wird ebenfalls auf einer Silberplatte gemacht. Der Vernier ist so befestigt, dass sein eingetheilter Bogen beinahe den eingetheilten Kreis auf dem Limbus berührt, aber das andere etwas dickere Ende ein wenig höher liegt als der Limbus. Auf diese Weise werden die Theilstriche des Verniers der Länge nach von oben nach unten auf die Theilstriche des Limbus zulaufen, und dadurch ihr genaues Zusammentreffen schärfer beobachtet werden können. Aber ungeachtet dessen kann man die Theilung, mit Hülfe des Verniers an der Alhidade, nur bei sehr günstiger Beleuchtung bequem ablesen; in allen anderen Fällen erscheint das Zusammentreffen der Theilstriche des Verniers mit den Theilstrichen des Limbus nicht deutlich genug, und daher findet man jetzt bei gut eingerichteten Instrumenten nach dem Grundsatze Reichenbachs anstatt der Alhidaden mit den Vernieren, einen Vollkreis, dessen Radius nahezu dem des Limbus gleich ist; an diesem Kreise, welcher Alhidadenkreis genannt wird, sind entweder zwei Verniere, welche sich diametral gegenüberstehen, oder auch vier angebracht, von denen jeder alsdann von dem andern um einen Quadranten absteht. Beide, sowohl Alhidadenkreis als auch Limbus, liegen in derselben Ebene und sind so in einander eingepasst, dass zwischen ihnen überall ein gleicher Zwischenraum stattfindet, welcher jedoch so klein ist, dass er dem blossen Auge als eine feine schwarze Kreislinie erscheint. Alsdann werden die Theilstriche auf dem Limbus und die Theilstriche auf den Vernieren des Alhidadenkreises, wenn sie genau zusammentreffen, die einen als die Verlängerungen der anderen erscheinen, und man kann daher dieses Zusammentreffen selbst immer genau und bequem beobachten. Gewöhnlich ist die Theilung des Verniers noch um einige Striche nach beiden Seiten hin über den eigentlichen Bogen fortgesetzt. Es geschieht dies, um die Coincidenzen der Striche des Verniers und des Limbus auch an den beiden Enden des ersteren genau erkennen zu können.

Zur Ablesung bedient man sich gewöhnlich der Lupen. Sie müssen so gestellt werden, dass die Theilstriche deutlich erscheinen, und dass die Linie des genauen Zusammenfallens des Theilstriches des Verniers, mit einem gewissen Theilstriche des Limbus durch die Mitte des Gesichtsfeldes der Lupe geht. Sollte es sich nun ereignen, dass kein Strich des Verniers ganz genau mit einem Striche des Limbus zusammenfällt, so wird irgend ein ganzer Theil ab (Fig. 20) des Verniers zwischen einem ganzen Theile AB des Limbus enthalten sein. Alsdann muss man bemerken, ob a näher bei A oder b näher bei B ist. Nehmen wir z. B. an, dass die Theilung von P nach Q fortschreitet, und dass man nach Augenmass geschätzt hätte, dass b noch einmal so nahe an B, als a an A sei, so muss man zu der vollen Zahl von Graden, Minuten und Secunden, welche wir erhalten hätten, wenn der Strich a mit dem Striche A genau zusammengefallen wäre, noch zwei Drittel der Zahl von Secunden zulegen, um welche ein Theil des Limbus grösser als ein Theil des Verniers ist. Die nöthige Geschicklichkeit kann man durch Uebung bald erlangen, und sehr leicht die Entfernung des unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Striches des Limbus von denjenigen beiden Strichen des Verniers schätzen, welche am nächsten mit ihnen zusammenfallen. Gewöhnlich liest man die Grade nur am ersten Vernier ab, dagegen die Minuten und Secunden an allen; nimmt man alsdann das Mittel aus allen diesen Minuten und Secunden, und setzt die am ersten Vernier abgelesene Anzahl von Graden hinzu, so erhält man das Mittel der Ablesungen an allen Vernieren.

5) Von der Ablesung der Kreistheilung mit Hülfe von Mikroskopen.

38. Denken wir uns ein Mikroskop so auf einen festen Arm aufgesetzt, dass seine optische Achse senkrecht ist auf der Ebene des Limbuskreises und die Gläser in solchen Entfernungen von einander und von der Ebene des Limbuskreises eingestellt sind, dass die Theilstriche auf diesem Kreise durch das Mikro-

skop deutlich gesehen werden; nehmen wir ferner an, dass in der Ebene, welche durch den Brennpunkt des Oculars senkrecht zur optischen Achse des Mikroskops geht, zwei feine Fäden aufgespannt sind, nahe aneinander und parallel den Theilstrichen auf dem Limbuskreise; dann werden sowohl die Fäden, als auch diese Theilstriche durch das Mikroskop gut sichtbar.

An Winkelmessinstrumenten, bei welchen die Mikroskope statt der Verniere gebraucht werden, bleiben die Mikroskope unbeweglich und der Limbuskreis ist so mit dem Fernrohr verbunden, dass bei der Drehung des Fernrohrs um irgend welchen Winkel, jeder Durchmesser des Limbuskreises einen ebensogrossen Winkel beschreibt. Man kann also die Richtung der Gesichtslinie oder der optischen Achse des Fernrohrs durch den Theilstrich des Limbuskreises bestimmen, welcher unter das Mikroskop kommt. Um zu erläutern, wie man diesen Theilstrich abliest, werden wir die dazu dienende Einrichtung des Mikroskops näher betrachten.

Es sei B (Taf. III, Fig. 4) das Objectiv, C das Ocular, DE das Rohr des Mikroskops; auf diesem Rohr ist der Messapparat GF angebracht, welcher zwei messingene Rahmen trägt; einer von ihnen PP (Taf. III, Fig. 3) ist fest mit dem Mikroskop verbunden; der andere MM kann durch Drehen der Schraube nn, längst den Geleisen, die auf dem Rahmen PP sich befinden, verschoben werden. Beide Rahmen sind senkrecht zur optischen Achse des Mikroskops; auf den beweglichen Rahmen MM werden zwei Fäden a, a aufgespannt, die nahe bei einander in der Ebene liegen, welche durch den Brennpunkt des Oculars geht; beide Fäden sind senkrecht zur Richtung der stählernen Schraube nn. Diese Schraube heisst die Mikrometerschraube; ihre Gänge müssen fein und gleichmässig sein, damit die Bewegung der Fäden durch die Drehung der Schraube gemessen werden kann.

Die Schraube nn ist mit dem festen Rahmen verbunden, geht durch die am beweglichen Rahmen MM angebrachte Schraubenmutter cc und durch den Ansatz b; ihr konisches

Ende stützt sich auf eine kleine Schraube *m*, welche in einem Ansatze auf der entgegengensetzten Seite des festen Rahmens *P P* gehalten wird. Um todte Gänge der Mikrometerschraube *n n* zu beseitigen, ist ein stählerner Stift von *e* nach *a* parallel der Schraube *n n* eingeschoben und mit einer stählernen, elastischen Spiralfeder umwickelt; er stützt sich einerseits an den Rand des festen Rahmens *P P* bei *e*, geht anderseits durch den Ansatz *a* und ist in demselben befestigt. Wird die Schraube *n n* gedreht, so wird die Spiralfeder mehr oder weniger gepresst und sie wirkt so, dass jeder Drehung der Mikrometerschraube *n n* eine gleiche Verschiebung des Rahmens *M M* entspricht, also auch der Fäden *α α*, welche wir, der Kürze halber, den Doppelfaden nennen.

Um bei den Beobachtungen die Anzahl der dabei gemachten Umdrehungen der Mikrometerschraube sicher und bequem zu erhalten, ist an dem Rahmen *P P* eine gezähnte Platte *q q* befestigt, mit einer runden Oeffnung, welche, durch das Mikroskop gesehen, wie ein kleiner heller Kreis erscheint. Auf beiden Seiten von dieser Mitte stehen die Zähne in gleichen Abständen von einander. Gewöhnlich wird die Mikrometerschraube so eingerichtet und das Mikroskop so gestellt, dass entweder nur eine volle Umdrehung der Schraube, oder zwei volle Umdrehungen nöthig sind, damit der Doppelfaden *α α* vom mittleren Zahn, oder von der runden Oeffnung auf der Platte *q q* ausgehend, zum ersten folgenden oder vorangehenden Zahn gelangt; — überhaupt von irgend welchem Zahn zum anderen ihm benachbarten Zahn kommt. Um auch Bruchtheile einer Umdrehung zu bestimmen, ist auf der Mikrometerschraube eine kreisförmige Platte *f f* (Fig. 4) aufgesetzt, deren Umfang durch Striche in eine gewisse Anzahl, z. B. in 60 gleiche Theile, eingetheilt und mit Zahlen: 0, 5, 10, ... 55 versehen ist; neben dieser Platte steht ein Zeiger (Index) *F*, welcher zur Ablesung der Theilung auf dem Kreise *f f* dient und auf dem unbeweglichen Rahmen befestigt ist.

Die Platte *f f* muss immer so gestellt sein, dass, wenn

man durch das Mikroskop den Doppelfaden auf der Mitte der runden Oeffnung der Platte *q q* sieht, alsdann auch der Zeiger *F* auf dem Kreise *f f* auf Null zeigt. Findet dies nicht statt, so muss die Lage der Platte *f f* berichtigt werden; dazu stellt man zuerst den Doppelfaden auf die Mitte der erwähnten Oeffnung mit Hülfe der Mikrometerschraube und löst die Klemmschraube *h h*, welche die Platte *f f* presst; dann wird die Platte *f f* so verstellt, dass Null (0) zum Zeiger *F* kommt, und die Klemmschraube *h h* angezogen. Selten wird es gelingen, diese Berichtigung genau und auf einmal aufzuführen; man stellt wieder den Doppelfaden auf die Mitte der runden Oeffnung an der Platte *q q* (Fig. 3) und liest wieder ab, was der Zeiger *F* angiebt; ist es nicht Null (0), so muss man noch einmal die Klemmschraube *h h* lösen und die Platte *f f* etwas drehen, damit Null (0) zum Zeiger *F* kommt. Wenn man vorsichtig und allmählich die Klemmschraube *h h* zuzieht, so wird man den Doppelfaden unverändert auf der Mitte der erwähnten Oeffnung sehen und dann ist die Berichtigung ausgeführt, die feine Berichtigung kann man noch vermittelst der kleinen Schraube *m* (Fig. 3 und 4) machen.

Der Nullpunkt auf dem Kreise *f f* hat in diesem Fall dieselbe Bedeutung wie der Nullpunkt auf dem Bogen des Verniers, welcher auf einer unbeweglichen Alhidade angebracht ist.

Der Unterschied der Ablesungen am Limbuskreise, welche unmittelbar vor und nach einer vollen Umdrehung der Mikrometerschraube gemacht werden, heisst der Werth einer Umdrehung der Schraube. Es ist leicht diesen Werth zu bestimmen: man sieht durch das Mikroskop und mit Hülfe der Mikrometerschraube (*n*, *n* Fig. 3 und 4) oder, auch durch die Bewegung des Limbuskreises stellt man den Doppelfaden auf irgend einen Theilstrich auf dem Limbuskreise, so dass dieser Theilstrich genau in der Mitte zwischen den Fäden *a*, *a* (Fig. 3) erscheint; dann bemerkt man vor welchem Zahn und auf welcher Seite von der Mitte der runden Oeffnung auf der Platte *q q* der Doppelfaden steht; zugleich wird noch die Theilung des Kreises

ff bei dem Zeiger *F* (Fig. 4) abgelesen. Man sieht nun wieder durch das Mikroskop und dreht die Mikrometerschraube so lange, bis der Doppelfaden genau an den nächst zurückstehenden Theilstrich des Limbuskreises kommt, so dass er genau in der Mitte zwischen beiden parallelen Fäden *aa* gesehen wird; man bemerkt, ebenso wie früher, die Lage des Doppelfadens zwischen den Zähnen der Platte *qq* und liest die Theilung des Kreises *ff* bei dem Zeiger *F* ab. Aus allen diesen Ablesungen berechnet man die Anzahl der vollen Umdrehungen und den Theil der Umdrehung der Mikrometerschraube, die nöthig sind, damit der Doppelfaden von einem Theilstrich des Limbuskreises bis zu den anderen gelangt. Es ist ausserdem bekannt, wie viel Minuten zwischen diesen Theilstrichen enthalten sind; diese Zahl der Minuten mit 60 multiplicirt, um sie in Secunden zu verwandeln, und durch die Anzahl der gemachten vollen Umdrehungen der Mikrometerschraube, nebst dem dazu gehörigen Theil einer Umdrehung, dividirt, giebt den Werth einer Umdrehung in Secunden ausgedrückt. Dividirt man diesen Werth durch die Zahl der gleichen Theile, welche in dem Umfange der runden Platte *ff* (Fig. 3 u. 4) enthalten sind, so bekommt man auch den Werth eines Theils in Secunden.

Es ist zu bemerken, dass die Zahlen auf der Platte *ff* in umgekehrter Richtung wachsen mit dem Wachsen der Zahlen auf dem Limbuskreise des Winkelmessinstruments. Wenn also durch Drehung der Mikrometerschraube der Doppelfaden sich nach dem hinter ihm stehenden Theilstriche des Limbuskreises, d. h. nach dem Theilstrich von kleinerer Zahlenbenennung bewegt, so wachsen dadurch die Zahlen der Platte *ff*, auf welche der Index *F* zeigt; sie vermindern sich dagegen, wenn der Doppelfaden zum vorderen oder zum Theilstrich von grösserer Zahlenbenennung auf dem Limbuskreise bewegt wird. Um den einen von diesen Fällen von dem anderen zu unterscheiden, muss man auf die Lage der Zähne auf der Platte *qq* Rücksicht nehmen; von der Mitte der Oeffnung auf der Platte an gerechnet, liegen die Zähne

auf der positiven Seite, wenn durch die Drehung der Mikrometerschraube der Doppelfaden auf dieser Seite zum Theilstrich des Limbuskreises von kleinerer Zahlenbenennung, z. B. von 116° 12′ zu 116° 8′ geht, und sie liegen auf der negativen Seite, wenn der Doppelfaden zum vorderen Theilstrich des Limbuskreises, d. h. zum Theilstrich von grösserer Zahlenbenennung, z. B. von 116° 12′ zu 112° 16′ geht.

Es sei nun a die Ablesung am Schraubenkopfe (am Kreise ff), wenn der Doppelfaden auf den zunächst hinter ihm liegenden Theilstrich des Limbuskreises (auf den Strich kleinerer Zahlenbenennung) eingestellt war, und b die Ablesung auf dem Schraubenkopfe ff, wenn der Doppelfaden auf den nächst ihm folgenden Theilstrich (von grösserer Zahlenbenennung) kommt. Bedeutet m die Zahl der gleichen Theile, auf welche der Umfang des Schraubenkopfes ff eingetheilt ist, so wird a, oder $m + a$, oder $2m + a$ u. s. w. die wirkliche Verschiebung des Doppelfadens ausdrücken, je nachdem der Doppelfaden entweder zwischen der runden Oeffnung in der Mitte der Platte $q\,q$ (Fig. 3) und dem ersten Zahn auf positiver Seite, oder zwischen dem ersten und dem zweiten, oder zwischen dem zweiten und den dritten Zahn stand, vorausgesetzt, dass der Doppelfaden von Zahn zu Zahn kommt bei einer vollen Umdrehung der Mikrometerschraube. Bei der Einstellung aber des Doppelfadens auf dem nächstfolgenden Theilstrich des Limbuskreises (von grösserer Zahlenbenennung) wird nicht die unmittelbare Ablesung b am Schraubenkopfe ff, sondern $m - b$ die wirkliche Verschiebung des Doppelfadens anzeigen, falls der Doppelfaden zwischen der Mitte der erwähnten Oeffnung und dem ersten Zahn auf negativer Seite steht; die Verschiebung wird durch $2m - b$ ausgedrückt, wenn der Doppelfaden zwischen dem ersten und zweiten Zahn auf negativer Seite steht u. s. w. Statt a, $m + a$, $2m + a$, kann man auch a, 1. Umdr. $+ a$, 2. Umdr. $+ a$ schreiben, und ebenso 1. Umdr. $- b$, 2. Umdr. $- b$, ... statt b, $m - b$, $2m - b$ u. s. w. setzen. Betrachten wir a, $m + a$, ... als

positive Zahlen, so muss man $m - b$, $2m - b$, ... als negative Grössen annehmen.

Jetzt wird klar sein, wie der Werth einer Umdrehung der Mikrometerschraube bestimmt wird.

Es sei s die Zahl der Secunden in Bogen, welche zwischen zwei aufeinander folgenden Theilstrichen auf dem Limbuskreise enthalten ist. Nehmen wir z. B. an, dass bei den Einstellungen des Doppelfadens auf den hinter ihm stehenden und auf den ihm vorangehenden Theilstrich des Limbuskreises der Doppelfaden im ersten Fall zwischen dem ersten und dem zweiten Zahn auf positiver Seite stand, und im zweiten Fall zwischen der Mitte der Platte $q\,q$ und dem ersten Zahn auf negativer Seite. Alsdann bekommen wir aus den Ablesungen am Schraubenkopfe $f\!f$ zwei Zahlen: $m + a$ und $-(m - b)$; der Unterschied dieser Zahlen ist $m + a + m - b$ und entspricht den s Secunden am Limbuskreise; man hat also in diesem Fall:

$$s'' = 2m + a - b \text{ Theilen am Schraubenkopf } f\!f.$$

oder der Werth eines Theils auf dem Schraubenkopfe $f\!f$ ist ... $\frac{s''}{2m + a - b}$ und der Werth eines Schraubenganges oder einer vollen Umdrehung der Mikrometerschraube ist ... $\frac{m\,s''}{2m + a - b}$ $= \frac{s''}{2 + \frac{a - b}{m}}$.

Um den Einfluss der Excentricität und der Theilungsfehler am Limbuskreise zu vermindern, kann man den Werth eines Schraubenganges auf verschiedenen Stellen des Limbus, welche symmetrisch längs dem ganzen Kreise liegen, bestimmen und daraus das wahrscheinlichste Resultat berechnen.

Das Gesichtsfeld des Mikroskops ist so klein, dass man meistens nicht die Zahlen auf dem Gradbogen des Kreises wird sehen können. Deswegen ist das Winkelmessinstrument ausser dem fein getheilten Limbuskreis noch mit einem anderen Kreise versehen, dem sogenannten Sucherkreise, welcher die Grade und diejenigen Minuten angiebt, die dem Anfange jedes Intervalls

zwischen zwei Theilstrichen auf dem Limbuskreise entsprechen. Die Mikrometerschraube dient nur zur Messung irgend eines Theils dieses Intervalls; aber um die Grade und Minuten zu erhalten, muss der Sucherkreis richtig gestellt sein. Man bringt zuerst den Nullpunkt der Theilung auf dem Kopfe der Mikrometerschraube an den Zeiger F (Fig. 4); ist schon die Lage dieses Nullpunktes berichtigt, so wird man den Doppelfaden auf der Mitte der runden Oeffnung der Platte $q\,q$ sehen. Alsdann bringt man durch die Bewegung des Limbuskreises irgend einen Theilstrich dieses Kreises in die Mitte des Raumes, welchen man zwischen den Fäden $\alpha\,\alpha$ durch das Mikroskop sieht; dann muss der Index am Sucherkreise diejenigen vollen Minuten angeben, die den Intervallen, in welche der Limbuskreis eingetheilt ist, entsprechen; wenn z. B. der Limbuskreis von 4 zu 4 Minuten durch Striche eingetheilt ist, so muss der Index am Sucherkreise $4 \times n$ Minuten angeben, wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet. Ist dies nicht der Fall, so muss man die Lage des Index am Sucherkreise verändern, um die erwähnte Bedingung zu erfüllen.

Das oben Gesagte ist hinreichend für die Erläuterung der Art und Weise wie bei der Winkelmessung die Ablesung der Kreistheilung vermittelst des Mikroskops gemacht wird. Hat man schon die Gesichtslinie des Fernrohrs auf das Beobachtungsobject gerichtet, so liest man die Grade und die zugehörigen Minuten am Sucherkreise ab und sieht durch das Mikroskop wie der Doppelfaden steht. Wenn keiner der Theilstriche des Limbuskreises genau unter dem Doppelfaden steht, so dreht man die Mikrometerschraube (an ihrem äusseren Kopfe $l\,l$, Taf. III, Fig. 3 u. 4) so lange, bis der Theilstrich des Limbuskreises, welcher hinter dem Doppelfaden sich befand, in der Mitte des Raumes zwischen den Fäden $\alpha\,\alpha$ erscheint; man bemerkt dann wie der Doppelfaden in Bezug auf die Mitte und die Zähne der Platte $q\,q$ steht, und liest die Theile ab, welche der Zeiger am Kopfe $f\,f$ der Mikrometerschraube angiebt. Es sei a diese letzte

Ablesung; wurde der Doppelfaden zwischen der Mitte der Platte $q\,q$ und dem ersten Zahn, auf der positiven Seite, gesehen, so schreibt man a als Ablesung; stand der Doppelfaden auf positiver Seite zwischen dem ersten und zweiten, oder zwischen dem zweiten und dem dritten Zahn, so wird $m + a$ oder $2\,m + a$ als Ablesung notirt; man kann auch 1. Umdr. $+ a$, oder 2. Umdr. $+ a$ schreiben; m ist die Anzahl der Theile an dem Umfange des Schraubenkopfs. Alles zusammengeschrieben ist die vollständige Ablesung.

Wir wollen z. B. annehmen, dass der Limbuskreis von 4 zu 4 Minuten eingetheilt ist, dass der Schraubenkopf 60 gleiche Theile enthält und dass der Werth einer Umdrehung der Mikrometerschraube 2′ oder 120″ beträgt; der Werth eines Theils auf dem Schraubenkopf ist $\frac{120''}{60}$ oder 2″.

Es sei 35° 12′ am Sucherkreise abgelesen und bemerkt, dass der Doppelfaden zwischen dem ersten und zweiten Zahn auf positiver Hälfte der Platte $q\,q$ sich befand, wenn er auf den zurückstehenden Theilstrich des Limbuskreises gestellt wurde, und dass dabei 26 Theile am Schraubenkopfe abgelesen wurden. Die vollständige Ablesung wäre hier:

$$35^\circ\,12' + 1.\,\text{Umdr.} + 26\ \text{Theile einer Umdr.} = 35^\circ\,12' + 2' + 52'' = 35^\circ\,14'\,52''.$$

Bei dem Transport des Instruments und bei verschiedenen Temperaturen kann sich der Abstand des Limbuskreises vom Mikroskop etwas ändern; damit verändert sich auch der Werth des Schraubenganges. Man macht sich daher zur Regel, bei jeder Winkelmessung diesen Werth zu bestimmen, indem man den Doppelfaden zuerst auf den zurückstehenden und dann auf den voranstehenden Theilstrich des Limbuskreises einstellt und jedesmal den Zeiger am Schraubenkopfe abliest. Damit kein Fehler durch die Schwächung der Spiralfeder entstehen könnte, muss man die Einstellung des Doppelfadens immer so machen, dass dabei die Spiralfeder gepresst wird, was dadurch geschieht, dass

der Doppelfaden von der Mitte der Platte $q\,q$ auf der positiven Seite dieser Platte zu dem zurückstehenden Theilstrich des Limbuskreises geht. Bei der entgegengesetzten Bewegung der Schraube schwächt sich aber die Spiralfeder, wenn man also den Doppelfaden auf den ihm vorangehenden Theilstrich einzustellen hat, so kann man den Doppelfaden durch die Drehung der Mikrometerschraube etwas weiter führen, als nöthig wäre, und dann durch eine kleine positive Bewegung der Schraube den Doppelfaden in richtige Lage bringen.

Um das Mikroskop sowohl am Tage, wie auch des Nachts bequem brauchen zu können, bedient man sich des Illuminators XQR (Taf. III, Fig. 4). Er besteht aus zwei Röhrchen Q und R, die auf das Mikroskop so aufgeschoben werden, dass sie zwischen dem Limbuskreis und der Objectivlinse zu stehen kommen. Das innere Röhrchen Q enthält eine Platte X mit einer ovalen Oeffnung, die unter 45° zur Achse des Rohrs geneigt ist; das äussere Röhrchen R hat einen freien Ausschnitt, welcher nach beliebiger Seite gedreht werden kann. Die der Objectivlinse zugewandten Seiten des Röhrchens Q und der Platte X sind mattschwarz; ihre Seiten aber, die dem Limbuskreis zugekehrt sind, werden mit weisser Farbe bedeckt. Am Tage richtet man den freien Ausschnitt im Röhrchen R gegen das Tageslicht, des Nachts aber wendet man denselben zum Lampenlicht; die Strahlen der Lampe, vom Limbuskreis reflectirt, gehen durch die Objectiv- und Ocularlinsen zum Auge des Beobachters und beleuchten die Theilstriche am Limbuskreis.

6) Vom Niveau oder von der Wasserwage.

39. Zur Aufstellung der Instrumente in eine horizontale Lage wendet man das Niveau an, welches wir hier kurz beschreiben wollen.

Der Haupttheil des Niveaus oder der Wasserwage besteht aus einer gläsernen cylindrischen Röhre $abrw$ (Taf. I, Fig. 21), deren innere Fläche an der obersten Stelle in der Richtung der Achse

kreisförmig ausgeschliffen ist, wobei aber der Kreis, von welchem der Bogen *a b* einen Theil bildet, einen sehr grossen Halbmesser *a C* hat. Diese Röhre füllt man mit Weingeist, oder noch besser mit Schwefeläther an, so dass nur ein kleiner, luftleerer Raum übrig bleibt, welcher sich dem Auge als eine kleine Blase darstellt. Die gläserne Röhre wird alsdann in einer Messingfassung befestigt, welche an einigen Instrumenten noch mit einem besonderen Gestelle versehen ist. Durch die Schwere nimmt die Flüssigkeit den unteren Raum der Röhre ein, und die Blase oder der luftleere Raum wird sich immer am höchsten Theil der Röhre befinden. Nun steht aber die Richtung der Schwerkraft auf der Oberfläche der freien Flüssigkeiten senkrecht, und wenn man daher annimmt, dass das Niveau auf einer horizontalen Ebene aufgestellt ist, so wird die Blase *e d f* sich ganz genau in die Mitte der gläsernen Röhre des Niveaus stellen und ihre Enden *e* und *f* werden von den entsprechenden Enden *b* und *a* der Röhre um die gleich grossen Längen *a f* und *f e* abstehen, wenn nämlich zugleich auch $a r = b w$ ist; folglich wird auch der Radius *C d*, welcher nach der Mitte der Blase geht, vertical sein; stellen wir aber das Niveau auf eine geneigte Ebene auf, so wird die Blase in dem höchsten Theile des Niveaus einspielen, und der verticale Radius, welcher nach der Mitte der Blase geht, wird nun von demjenigen Radius, welcher nach der Mitte der gläsernen Röhre geht, etwas entfernt sein. Es ist klar, dass der Winkel, der von diesen beiden Radien gebildet wird, die Neigung der Ebene oder Linie, auf der das Niveau ruht, gegen die Ebene des Horizonts ausdrückt. Je grösser der Radius *C d* ist, desto grösser werden die Ortsveränderungen der Blase sein, welche einer und derselben Veränderung in der Neigung des Niveaus gegen den Horizont entsprechen, und um so empfindlicher wird daher das Niveau werden. Daher kann man mit einem sehr empfindlichen Niveau nur kleine Neigungen der Ebene oder Linie, auf welcher das Niveau aufgestellt ist, gegen den Horizont messen. Auf der äusseren

Oberfläche der Röhre, oder auf einer sehr nahe an ihr stehenden Messingscala sind Striche eingeschnitten, die alle gleichweit von einander abstehen; die Entfernung irgend zweier solcher Striche von einander nennt man einen Niveautheil, welcher folglich ein sehr kleiner Bogen des Kreises sein wird, dessen Centrum sich in *C* (Fig. 21) befindet. Die Zahl von Secunden, die in diesem Bogen enthalten sind, nennt man den Werth eines Niveautheiles, und sie bezeichnen den Winkel, um welchen die Neigung des Niveaus sich gegen den Horizont ändert, wenn die Mitte der Blase sich um einen Theil verrückt. Um die Lage der Mitte der Blase zu bestimmen, liest man die Niveautheile und deren Zehntel, welche den beiden Enden der Blase entsprechen, ab; da wir aber später bei der Beschreibung und Berichtigung der Instrumente hierüber näher handeln und dort auch die Methoden angeben werden, wie man den Werth eines Niveautheils bestimmt und die Fehler des Niveaus ermittelt, so wollen wir hier nur noch ein paar Worte darüber sagen, wie man die Güte eines Niveaus beurtheilen kann, und wie die Glasröhre mit Schwefeläther oder Weingeist angefüllt wird.

Um zu erforschen, ob das Niveau gut gemacht ist, stellt man es auf ein Lineal, welches an einem Ende mit zwei Spitzen versehen ist, die in zwei ihnen entsprechende Vertiefungen auf einer Eisenstange passen; am anderen Ende des Lineals befindet sich eine gute Mikrometerschraube, welche sich an eine in oben erwähnter Eisenstange angebrachte Vertiefung fest andrückt. Das Ganze muss auf eine sehr feste Unterlage gestellt werden; bringt man dann die Blase zum Einspielen, und fängt an die Mikrometerschraube zu drehen, wodurch das Niveau verschiedene Neigungen gegen den Horizont erhält, so wird man gleich sehen, ob bei dieser Drehung der Mikrometerschraube gleichen Theilen des Umganges dieser Schraube auch gleiche Ortsveränderungen der Blase längs der gläsernen Röhre entsprechen; ist dieses wirklich sehr nahezu der Fall, so ist das Niveau vortreff-

lich *). Mit Hülfe dieser Vorrichtung kann man auch leicht den Werth eines Theiles des Niveaus, in Bogensecunden ausgedrückt, finden; denn misst man die Entfernung der beiden kleinen Vertiefungen auf der Stange in Zollen und Theilen von Zollen aus und bestimmt darauf, wie viel Gänge auf der Schraube sind, und wie viele dieser Gänge auf einen Zoll gehen, so kann man dadurch den Werth eines Ganges in Theilen eines Zolles ausgedrückt erhalten; setzt man dann die Entfernung der erwähnten Vertiefung, in welcher die Mikrometerschraube steht, von der Mitte der die beiden andern Vertiefungen verbindenden Linien gleich d, und endlich den Werth eines Ganges der Mikrometerschraube $= b$, so ist es klar, dass der Winkel, unter welchem das Niveau gegen den Horizont geneigt ist, durch einen Schraubengang sich um $\frac{b}{d \cdot \sin 1''}$ ändern wird; wenn man daher weiss, wie viele Niveautheile auf einen Gang der Schraube gehen, oder auf einen bekannten Theil eines vollständigen Ganges dieser Schraube, so kann man dadurch den Werth eines Niveautheiles in Bogensecunden ausgedrückt finden.

40. Will man die Röhre des Niveaus mit Weingeist füllen, so lässt man das eine Ende offen und verschliesst das andere mit einem Glasstöpsel, der fest in die Röhre eingedrückt wird, und verklebt ihn mit Gummi Elasticum, welches erst in die Flamme eines Lichtes gehalten wird, um es zu erweichen. Darauf füllt man die Röhre vollständig mit Alkohol und zündet ihn am offenen Ende an; wenn er brennt, verschliesst man auch dieses Ende mit einem Stöpsel und bestreicht es ebenfalls mit weichgemachtem

---

*) Damit man die Theile des Umganges der Mikrometerschraube bequem ablesen kann, befindet sich auf dem Kopfe dieser Schraube eine Kreisscheibe, welche an ihrem Umfange in 60 oder 100 gleiche Theile eingetheilt ist, und gegen diese Theilung ist alsdann ein kleiner Zeiger aufgestellt, welcher unabhängig von der Mikrometerschraube an der Stange festgemacht ist, so dass man die Theilung der Mikrometerschraube, welche mit diesem Abzeichen zusammentrifft, bequem ablesen kann.

Gummi Elasticum. Die Flamme, nunmehr ausser Berührung mit der Luft gebracht, lischt von selbst aus. Es bleiben in der Röhre nur noch Spiritusdämpfe, welche sich bei ihrer Abkühlung in Flüssigkeit verwandeln, und es bildet sich ein luftleerer Raum, welcher die Gestalt einer Blase hat. Die mit Spiritus gefüllten Niveaus sind aber nicht bequem, weil, wenn die Blase einmal in Bewegung ist, sie sehr lange hin und her schwankt, bis sie zur Ruhe kommt. Dagegen kommen die Blasen bei solchen Niveaus, die mit Schwefeläther angefüllt sind, sehr bald zur Ruhe, und der Beobachter verliert also hierbei nahezu gar keine Zeit. Die Schwefelätherniveaus verdampfen aber sehr leicht, wenn die Röhre nicht gehörig verschlossen ist, und die Blase bekommt bald eine solche Länge, dass es nicht mehr möglich ist, das Niveau zu gebrauchen. W. v. Struve hat eine Methode zur Füllung der Niveauröhren mit Schwefeläther angegeben, welche sehr einfach und durch die Erfahrung vollkommen erprobt ist. Während eines Zeitraums von mehreren Jahren behalten die nach dieser Methode angefertigten Niveaus dieselbe Blasenlänge bei, und daher wird es nützlich sein, diese Methode hier näher zu erläutern.

Man muss sich eine glatte Kalbsblase verschaffen und alsdann ein Stück guten Fischleim in heissem Wasser so auflösen, dass sich daraus eine dickliche, gleichförmige Masse bildet. Darauf schneidet man ein kleines kreisförmiges Stückchen aus der Kalbsblase, das dem Stöpsel oder dem Ende der Niveauröhre entspricht, legt es in Wasser und trocknet es zwischen einem reinen Handtuche so ab, dass das Stückchen Blase nur noch feucht bleibt. Alsdann bestreicht man das Stückchen Blase und die Ränder des Glasstöpsels mit dem Fischleime, passt den Stöpsel in die noch leere Niveauröhre ein, und drückt darauf das Stückchen Blase so glatt als möglich an, denn die Blase muss das Glas stets vollkommen berühren, und niemals darf der geringste mit Luft angefüllte Raum sich zwischen beiden befinden. In diesem Zustande bewickelt man die Blase an dem Ende der Röhre mit

einem Seidenfaden, und wartet so lange, bis der Leim vollkommen trocken ist; dann nimmt man den Seidenfaden ab, schneidet den überflüssigen Theil der Blase weg, überstreicht die Blase und ihre Enden auf der gläsernen Röhre mit Firniss und wartet ab, bis auch dieser vollkommen trocken ist. Darauf bereitet man sich ein Glas warmes Wasser, dessen Temperatur ungefähr + 36 Grad Reaumur ist, und ein anderes Glas mit eiskaltem Wasser, in dem kleine Eisstückchen schwimmen, und macht sich nach obiger Beschreibung ein zweites Stückchen Blase zurecht, füllt dann die gläserne Nivrauröhre mit Schwefeläther an, und setzt sie in das Glas mit warmem Wasser ein; der Aether fängt dann sogleich zu kochen an, welches jedoch nicht gar zu heftig geschehen muss. Ist auf diese Weise etwas Aether verdunstet und man glaubt, dass die Blase nicht gar zu lang werden wird, so schliesst man die Röhre mit dem schon geleimten Glasstöpsel zu, hebt augenblicklich die Röhre aus dem heissen Wasser heraus und thut sie in das Eiswasser. Hierauf beklebt man den oberen Theil der Röhre mit dem schon zubereiteten Stückchen Blase, welches man wie vorher ganz glatt andrückt, und mit einem Seidenfaden bewickelt. Alsdann hebt man die Röhre aus dem Eiswasser heraus und stellt sie an einen trockenen Ort beinahe in senkrechter Lage auf, indem man das zuletzt beklebte Ende zu oberst stellt. Wenn der Leim nunmehr vollkommen trocken ist, so schneidet man den überflüssigen Theil der Blase weg, und bestreicht darauf die Blase selbst und das Ende der Röhre in ihrer unmittelbaren Nähe mit Firniss. Durch das Eintauchen in warmes Wasser verliert der zuerst gefirnisste Theil oft seinen Firnissüberzug, welchen man alsdann ebenfalls erneuern muss.

Erster Abschnitt.

Beschreibung und Gebrauch der Instrumente.

In den vorhergehenden Paragraphen haben wir uns mit den allgemeineren Theilen der astronomischen Instrumente beschäftigt und wollen jetzt diese Instrumente näher und ausführlicher beschreiben, indem wir mit dem einfachen

Durchgangs- und Passageinstrumente

(Instrument des passages; Transit Instrument)

den Anfang machen werden.

41. Dieses Instrument wird dazu angewendet, die Zeit des Durchgangs irgend eines Gestirns durch diejenige Verticalebene zu beobachten, welche beim Drehen des Fernrohrs dieses Instruments von einer bestimmten Gesichtslinie im Gesichtsfelde desselben beschrieben wird.

Auf Tafel II sieht man, in halber natürlicher Grösse, ein kleines, von Ertel in München construirtes Durchgangsinstrument abgebildet. Der massive messingne Kreis AA (Taf. II, Fig. 1) hat ungefähr 13 englische Zoll im Durchmesser und bildet das feste Untergestell des Instruments; dieser Kreis ist durch drei messingne Speichen, welche nach der Richtung der Radien laufen,

mit einer Büchse von Glockenmetall stark verbunden, in welche die verticale Umdrehungsachse des Instruments hineinpasst. Das obere Ende der Büchse ist breiter, das untere schmäler; beide Enden aber laufen etwas konisch zu. Mit den drei Füssen *f*, *f* . . . steht der Kreis selbst auf den Stellschrauben *a*, *a* . ., welche in den entsprechenden Vertiefungen auf den Metallplatten *b*, *b* . . . ruhen. Eine dieser Schrauben hat einen in 100 gleiche Theile eingetheilten Kopf *a'*; ihm gegenüber steht auf der Platte *b* ein Zeiger *L*, der die Theile einer Umdrehung der Schraube anzeigt.

Der obere Theil des Instruments besteht aus drei Haupttheilen: erstens aus einem messingnen Kreise *P P*, welcher mit dem Kreise *A A* concentrisch ist, so dass zwischen diesen beiden Kreisen nur ein sehr kleiner Zwischenraum ist, damit der Kreis *P P* sich ganz frei im Inneren von *A A* bewegen kann; zweitens aus dem Fernrohre *G*, welches mit der horizontalen Umdrehungsachse *D D* des Instruments fest verbunden ist, und drittens aus den Unterstützungspfeilern oder Lagerträgern *B B*, auf welchen die beiden Enden der Achse *D D* ruhen. Die Lagerträger *B B* stehen auf der Platte des Kreises *P P*, die durch drei starke Radien mit einer stählernen Verticalachse verbunden ist, die an ihren beiden Zapfen etwas conisch zuläuft und sich in der die Mitte des Kreises *A A* einnehmenden Büchse dreht. Der ganze obere Theil des Instruments ist mit dem unteren unbeweglichen Theile mittelst dreier Klemmen verbunden; zwei von ihnen *h g*, *h g* sind sich diametral entgegengesetzt und dienen zur Befestigung des Instruments, wenn sein oberer Theil bereits in eine bestimmte Ebene gebracht worden ist; die Klemme *Y Y Z Z* ist um einen Quadranten entfernt von den beiden andern angebracht und mit der Mikrometerschraube *M M* versehen; sie wird zur genauen Einstellung des oberen Theils in eine gegebene Ebene gebraucht, wozu jedoch vorher die beiden andern Klemmen gelöst werden müssen. Jede von den Klemmen *h g* besteht aus zwei, durch eine Druckschraube *g* zusammengehaltenen Platten

von denen die eine auf dem beweglichen Kreise PP liegt, die andere den Kreis AA von unten presst. Die Klemme $YYZZ$ sieht man in der Fig. 1 u. 5, Taf. II. Sie ist so eingerichtet, dass ein kugelförmiges Ende der Mikrometerschraube MM an die Platte YY ausgedrückt ist, und nur dadurch in Verbindung mit dem beweglichen Kreise PP steht; das andere Ende der Schraube MM geht frei durch die inneren Gewinde der kleinen Kugel c (Fig. 5) hindurch. Diese Kugel wird von zwei Stücken festgehalten, wovon das eine den Kreis AA von oben, das andere denselben Kreis von unten drückt. Zieht man die beiden Stücke durch die Druckschraube z zu, so wird der bewegliche Kreis PP nicht anders, als durch das Drehen der Mikrometerschraube MM zu bewegen sein. Schraubt man die Druckschrauben g, g und s aus den Klemmen h, h und Z heraus, so kann man den oberen Theil des Instruments vom Untergestelle trennen, indem man bei den Lagerträgern anfasst und es aufhebt.

42. Der Kreis AA ist von 10′ zu 10′ auf Silber getheilt und an dem Kreise PP befinden sich, in kleiner Entfernung von einander, vier kleine Verniere X, X . . . ., mit deren Hülfe man unmittelbar bis auf 10″ ablesen kann.

Die Lagerträger B, B sind von Glockenmetall und so stark, dass sie der Durchbiegung vollkommen widerstehen können; die Lager selbst sind gabelförmig, beinahe rechtwinklig ausgeschnitten (Fig. 6, Taf. II) und an den Berührungsflächen mit dem Zapfen der Horizontalachse etwas gewölbt. In diesen Lagern nun ruhen die beiden stählernen Zapfen der horizontalen Achse des Instruments DD, welche selbst aus zwei konischen Röhren besteht, die an dem Cubus EE (Fig. 1) befestigt sind. Man giebt ihnen die konische Gestalt, damit die Achse der Durchbiegung möglichst wenig unterworfen ist. An dem einen Ende der Achse ist ein kleiner Verticalkreis F angebracht, der, wenn die Schraubenmutter L (Fig. 1, Taf. II) angezogen wird, durch Reibung auf der Achse festsitzt. Dieser Kreis ist von 15 zu 15 Minuten eingetheilt, und steht senkrecht auf der Achse DD;

er befindet sich an der Aussenseite des Lagerträgers und kann mit der Achse *D D* zugleich von einem Lagerträger zum andern umgelegt werden; daher ist am unteren Theile eines jeden Lagerträgers *B*, *B* ein Vernier *J*, *J* befestigt, mittelst dessen man durch eine Lupe *W* bis auf 1′ ablesen kann. Am anderen Ende der Achse *D D*, demjenigen entgegengesetzt, an welchem sich der Verticalkreis *F* befindet, ist ein Ocularansatz *npmr* angebracht, welcher aus zwei Röhren besteht, einer inneren *n*, die auf dem Gewinde des durchgebohrten Zapfens aufsitzt, und einer äusseren *m*, die sich über die innere Röhre schiebt. Auf der inneren Röhre *n* sitzt der stählerne Ansatz *o*; auf der äusseren Röhre *m* aber ein Bügel *p*, durch den zwei Schrauben *q* durchgehen, mittelst welcher man die Röhre *m* sanft um eine horizontale Achse drehen kann. Wenn eine dieser beiden Schrauben *q* gelöst ist, so kann man die Röhre *m* längst der Röhre *n* bewegen, und durch Anziehen der anderen Schraube *q* sie in der gehörigen Lage befestigen. Im Inneren der Röhre *m* befindet sich noch ein Röhrchen, dessen durchbrochener Boden die Fadenplatte oder das Fadennetz trägt.

Die Augenlinse oder das Ocular *r* ist auf die Vorderseite der Röhre *m* aufgeschraubt, und ist auch noch für sich verschiebbar.

43. Am Cubus *E E* ist das conische Rohr *G* rechtwinklig auf die horizontale Achse *D D*, durch die Schrauben *u* und *u* befestigt; an seinem Ende trägt es das Objectivglas und wird durch das Gegengewicht *Q* im Gleichgewichte erhalten. Im Innern des Würfels befindet sich ein Glasprisma $\pi\pi$, durch welches die Lichtstrahlen, die durch das Objectiv gehen, auf das Ocular *r* zurückgeworfen werden. Der auf die Kanten dieses Prismas senkrecht geführte Durchschnitt ist ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck; wenn daher die Lichtstrahlen durch das Objectiv auf eine der Katheten dieses Prismas senkrecht auffallen, so gehen sie unverändert weiter fort, werden von der Hypothenuse vollständig reflectirt und treten alsdann

senkrecht zur anderen Kathete des Prismas aus, so dass sie endlich auf diese Weise in das Ocular r gelangen. Das Prisma wird daher statt eines Spiegels angewandt, nur mit dem grossen Vorzug, dass das Licht durch diese Art von Reflection viel weniger geschwächt wird. Auf Taf. II, Fig. 1 sieht man in den punktirten Linien die ganze nähere Einrichtung zur Befestigung des Prismas. Das Prisma $\pi\,\pi$ ist durch den Bügel ξ und zwei Schrauben an das Messingstück T, den Stuhl, befestigt. Drei kleine Schrauben $\alpha\,\alpha\,\alpha$, von denen man in der Figur nur zwei sieht, dienen zur Festhaltung der Stahlplatte oder des Trägers μ an den Cubus; die grössere Schraube β aber, welche durch die Seite des Cubus und den Träger μ geht, dient zur Befestigung des Stuhles T, auf welchem das Glasprisma $\pi\,\pi$ selbst mit seiner grösseren Seite aufliegt. Auf der Seite des Stuhles T, welche gegen das Ende der Achse gerichtet ist, an welchem sich der Verticalkreis befindet, ragt ein kleines, mit T verbundenes Parallelepipedon γ hervor, das durch zwei, auf die Seiten des Cubus sich stützende Schrauben δ, δ ein wenig verstellt werden kann. Will man nun das Prisma um die Achse des Objectivrohrs drehen, so löst man eine von den Schrauben δ, δ und zieht die andere an und zwar so lange, bis die spiegelnde Seite des Prismas diejenige Lage erhalten hat, bei welcher das Bild irgend eines gut sichtbaren Gegenstandes am präcisesten und deutlichsten erscheint. Löst man nun die Schraube β, so kann man mit Hülfe der Schrauben α die Neigung des Prismas und dadurch auch folglich die Lage der Gesichtslinie verändern.

In dem von uns beschriebenen Instrumente hat das Objectiv 21 Pariser Linien Oeffnung, und eine Focallänge von 19,7 Pariser Zoll; seine Vergrösserung ist ungefähr 54. Damit das Fernrohr, wegen seines Gewichts, nicht nach unten fällt, so ist hinter dem Würfel EE, ein Hebel angebracht, an welchem mittelst einer Druckschraube l ein Gegengewicht Q befestigt ist; dieses Gegengewicht lässt sich nun längs des Hebels so stellen,

und dann festschrauben, dass zwischen dem Fernrohre G und dem Gewichte Q vollkommenes Gleichgewicht stattfindet.

Ein Ring KK umschliesst die Achse DD, unweit des Zapfens mit dem Ocularansatze. An der einen Seite dieses Ringes ist eine Messingstange H angebracht, an seiner anderen Seite aber eine von einem Messingstreifen gebildete Feder; diese Stange nun und diese Feder stützen sich an ihren unteren Enden an zwei dicke messingne Stäbchen, welche mit dem Lagerträger B fest verbunden sind; auf Taf. II, Fig. 1 ist bei b' eines der Stäbchen zu sehen; durch dasselbe geht die Mikrometerschraube S hindurch und berührt mit ihrem Ende die Stange H. Die Achse DD lässt sich im Innern des Ringes KK frei bewegen, sobald die Druckschraube K' gelöst ist; wenn sie aber geschlossen wird, so ist die Horizontalachse DD gehemmt und kann sonst nur durch die Mikrometerschraube S gedreht werden; damit bekommt auch das Fernrohr G eine langsame Bewegung in verticaler Richtung und kann auf diese Weise mit grosser Genauigkeit eingestellt werden.

44. In Fig. 2, 3 u. 4 auf Taf. II ist das Niveau dargestellt, welches gebraucht wird, um die Neigung der Umdrehungsachse DD gegen den Horizont zu bestimmen, wobei unter der Umdrehungsachse diejenige gerade Linie verstanden wird, welche die Mittelpunkte der Kreise verbindet, in welchen die Zapfen die Lager berühren. Dieses Niveau besteht aus einer Glasröhre VV, welche in einem messingnen Halbcylinder NN auf zwei Stückchen Zinnfolie liegt, und durch zwei dünne, runde Bügel ψ, ψ mittelst einiger kleiner Schrauben, von denen zwei in der Fig. 2, Taf. II zu sehen sind, auf der Messingunterlage befestigt ist. Der Halbcylinder NN hat zwei Stützen, welche jede für sich besonders in Fig. 3 u. 4 zu sehen sind. Die Verbindung zwischen NN und diesen Stützen geschieht durch die Schrauben s, s' und zwei andere t, t', welche man leicht in der Figur bemerken kann. Die Schrauben s, s' dienen dazu, den Halbcylinder N in einer horizontalen Richtung, die Schrauben

t, t' aber dazu, ihn in einer verticalen Richtung zu verstellen. Die Enden der Stützen bilden Ausschnitte, deren Neigungswinkel ungefähr 60° ist, mit denen das Niveau auf die Oberfläche der beiden Zapfen der horizontalen Umdrehungsachse gestellt werden kann. Damit man immer das Niveau auf dieselben Stellen der Zapfen aufsetzen kann, befinden sich über den beiden Lagerträgern *B*, *B* zwei Lamellen, mit Ausschnitten in der Mitte, durch welche die Füsse des Niveaus frei hindurchgesetzt werden können.

45. Um des Nachts die Fäden zu erhellen, setzt man einen Ring *R* auf das Objectiv auf (Fig. 7, Taf. II), welcher mit einem feinen Messinggriff versehen ist, an dem sich eine polirte und versilberte Platte ω befindet, die nur einen sehr kleinen Theil des Objectivs verdeckt. Wird nun die polirte Platte gegen das Objectiv gewendet, und hält man eine Lampe davor, entweder einfach mit der Hand, oder stellt sie auch auf ein passendes bewegliches Stativ, so wird das Licht der Lampe auf die versilberte Platte ω fallen, und indem es dadurch ins Fernrohr zurückgeworfen wird, bis zum Fadennetze gelangen, welches dadurch wie dunkle Linien auf dem hellen Grunde des Gesichtsfeldes des Fernrohrs erscheinen wird. In neuerer Zeit hat man die Beleuchtung viel zweckmässiger eingerichtet, es wird nämlich auf dem Prisma $\pi\pi$ (Fig. 1, Taf. II) ein ebenfalls gleichschenkliges und rechtwinkliges, aber viel kleineres Glasprisma so angebracht, dass die Hypothenusenseite des einen auf der Hypothenusenseite des andern liegt; dann wird die dem Oculare zugewandte Kathete des grossen Prismas mit der gegenüberstehenden Kathete des kleinen Prismas parallel sein, und wenn man den Zapfen, auf welchem der Verticalkreis *F* (Fig. 1) sitzt, durchbohrt und durch ihn das Licht einer Lampe durchlässt, so werden die Strahlen durch die parallelen Seiten des grossen und kleinen Prismas ungehindert zu dem Oculare gelangen und das Fadennetz schön erleuchten.

Von der Aufstellung des Instruments.

46. Die Beobachtungen, welche mit Hülfe des Durchgangsinstruments angestellt werden, können nur dann zu genauen Resultaten führen, wenn das Instrument so fest aufgestellt ist, dass es während der Dauer der Beobachtungen seine Lage in keiner Beziehung verändert. Ein vorzügliches Fundament zur Aufstellung des Instruments besteht in einer Säule aus Granit oder massivem Quaderstein, deren Durchmesser hinreichend gross ist, und welche tief genug in die Erde versenkt ist; eben so gut aber ist auch eine aus Ziegelsteinen aufgemauerte Säule, welche auf einem recht festen Fundamente ruht und genügend gross im Querdurchschnitt ist, um das Instrument fest aufzustellen. Zur Bequemlichkeit des Beobachters muss die Säule ungefähr 3 Fuss über den Fussboden hervorragen, auf welchem sich dieser befindet. Beim Aufmauern der Säule aus Ziegelsteinen muss man zum Mörtel Alabaster hinzuthun, damit das Mauerwerk geschwinder austrocknet, und ihr Fundament selbst muss ungefähr 3 Fuss tief in die Erde versenkt werden, weil sonst die kleinen Erschütterungen, welche auf der Erdoberfläche stattfinden, die Lage des Instruments ändern würden. Zur grösseren Zuverlässigkeit der Aufstellung lässt man um das Fundament herum einen hinreichend grossen, leeren, freien Raum ausgraben; aber ausserdem, damit nicht etwa der Beobachter wider Vermuthen an die Säule stösst, lässt man diese überall ringsum an ihrer ganzen Höhe hinauf mit dünnen Brettern auf solche Weise bekleiden, dass zwischen ihr und dieser Bekleidung ein Zwischenraum bleibt. Es wird jedoch selten vorkommen, dass solche Säulen Reisenden zu Gebote stehen werden, und daher wird es in Ermangelung solcher am besten sein, sich zur festen Aufstellung des Instruments eines eisernen Dreifusses zu bedienen, welcher so eingerichtet ist, dass man seinen unteren Theil mit irgend einem schweren Körper belasten kann; der Dreifuss wird ausserdem so verfertigt, dass man seine einzelnen

Theile bequem auseinandernehmen kann, um sie bei der Abreise einpacken zu können. Unter jedem Fusse dieses Dreifusses muss ein recht breiter ebener Stein angebracht sein, damit jener durch seine Belastung nicht in die Erde sinkt. Ferner muss man noch alle Eisenstangen mit einem schlechten Wärmeleiter umgeben, indem man sie mit grobem Wollenzeuge umwickelt, wodurch der Einfluss der Temperaturveränderung geschwächt wird. Sollte der Beobachter aber keinen eisernen Dreifuss zu seiner Verfügung haben, so wird er genöthigt sein, sich eines hölzernen zu bedienen, welcher jedoch weit weniger fest ist, und ausserdem nicht nur dem Einflusse des Temperaturwechsels, sondern auch noch der Einwirkung der Feuchtigkeit ausgesetzt sein wird; zur Verminderung dieses letzteren Einflusses muss man den ganzen Dreifuss mit Oelfarbe überstreichen, und ihn aus recht trockenem Holze anfertigen lassen.

Will man überhaupt einen Dreifuss benutzen, so muss man vorzüglich darauf Rücksicht nehmen, dass das Gewicht des Beobachters selbst keinen Einfluss auf die Lage des Instrumentes ausübt. Hierzu macht man um den Dreifuss herum einen besonderen Fussboden, welcher die Erde in der unmittelbaren Nähe des Dreifusses nicht berühren darf, sondern auf hölzernen Balken, oder anderen Unterlagen ruhen muss, die sich in ziemlicher Entfernung vom Dreifusse selbst befinden. Ausserdem ist es unumgänglich nöthig, das Instrument, sowie auch dessen Unterlage, vor der directen Einwirkung der Sonnenstrahlen, und den Dreifuss vor dem Einflusse der Witterung zu schützen, weil sonst die starke und mit der Zeit veränderliche Ausdehnung, welche die Sonnenstrahlen und die Schwankungen der Witterung auf alle Körper hervorbringen, einen fortwährend wechselnden Einfluss auf die Lage des Instruments ausüben würde. Um dieses nun zu bewerkstelligen, muss man um das Instrument herum ein kleines Häuschen oder ein Zelt mit einer passenden Oeffnung zum Beobachten aufführen lassen, und wenn solches nicht zur

Verfügung steht, muss man sich je nach den Umständen eines anderen Schutzmittels bedienen.

Zur festen Aufstellung des Instruments kann man sich übrigens verschiedener anderer Mittel bedienen, die alle hier aufzuzählen unmöglich sein würde; so z. B. kann man dazu zuweilen recht dicke in die Erde eingerammte Pfähle benutzen; ja eine solche Aufstellung wird viel vorzüglicher, als die auf einem hölzernen Dreifusse sein. Uebrigens hängt dieses alles von den Umständen und der Erfahrung des Beobachters ab, welcher bei grosser Geschicklichkeit im Stande sein wird, selbst bei einer nicht sehr festen Aufstellung des Instruments doch gute Beobachtungen zu machen.

47. Auf welche Weise man die Veränderungen in der Neigung der Umdrehungsachse gegen den Horizont durch das Niveau bestimmen kann, lässt sich sehr leicht einsehen, aber die Veränderungen des Instruments in Beziehung auf Azimuth lassen sich nicht so bequem ermitteln; jedoch lassen sich diese letzteren Aenderungen aus den Beobachtungen der Durchgänge von Sternen bestimmen, welche einen grossen Unterschied in ihren beiderseitigen Declinationen haben; sollte aber der Zeitraum zwischen den Beobachtungszeiten einigermassen erheblich werden, so wird es schwer sein, in dieser Beziehung zuverlässige Resultate zu erlangen, und deswegen ist es besser in einer gehörigen Entfernung ein Signal oder eine Marke aufzustellen, wodurch man augenblicklich sehen kann, ob das Instrument sich im Azimuth geändert hat. Ein weisser Kreis oder ein weisses Viereck auf schwarzem Grunde bildet eine sehr gute Marke; es genügt aber auch hierzu einen weissen Streifen Papier auf ein schwarzes Brett aufzukleben. Die Entfernung der Marke vom Instrumente muss wenigstens 1500 Fuss betragen; wenn es die Umstände aber gestatten, so ist es besser, sie in einer grösseren Entfernung aufzustellen. Die horizontale Breite des weissen Streifens muss so sein, dass, wenn das Fernrohr auf diesen Streifen gerichtet wird, er nicht viel über die Breite eines Fadens hervorragt. Es ist

zugleich gut, die Breite des weissen Streifens so zu machen, dass, wenn man ihn durch das Fernrohr des Durchgangsinstruments erblickt, er ungefähr 15 Bogensecunden entspricht; seine Höhe kann doppelt so gross sein. Auf diese Weise werden sich also die linearen Dimensionen der Marke zugleich mit ihrer Entfernung vom Instrumente ändern. Richtet man nun den Mittelfaden genau auf die Mitte des weissen Streifens, so kann man nach einiger Zeit sehen, ob der Faden beständig in der Mitte des Streifens geblieben ist; wenn er davon abweicht, so bemerkt man um wie viele Bruchtheile der Breite des Streifens, der mittlere Faden des Fernrohrs von der Mitte des Streifens absteht. Da nun die Breite des ganzen Streifens bekannt ist, so kann man daraus die Veränderung des Azimuths herleiten.

Um auch zugleich eine Marke für nächtliche Beobachtungen zu haben, muss man genau in der Mitte des weissen Streifens eine kleine Kreisöffnung anbringen, hinter welche man eine Lampe stellt; wünscht man aber eine Marke zu haben, deren Breite 15″ in Bogen ist, so kann man zwei kleine Kreisöffnungen so anbringen, dass ihre Mittelpunkte scheinbar von einander um 15″ in Bogen abstehen. Diese Oeffnungen müssen hinreichend klein sein, weil der Lichtkreis immer grösser erscheint, als er in der That ist, und man kann das Licht sehr weit sehen, wenn auch die leuchtende Fläche selbst nicht gross ist.

Jede Marke muss so fest wie nur irgend möglich an einem stabilen hölzernen Pfahl angebracht werden, der ungefähr 2 oder 3 Fuss in den Erdboden eingerammt wird; man kann sie aber auch an einer recht starken eisernen Säule anbringen, welche ebenfalls in die Erde gerammt sein muss. Wenn sich in der Richtung der optischen Achse des Fernrohrs in einer bedeutenden Entfernung vom Instrumente ein steinernes oder ein hölzernes Gebäude befindet, so kann man die Marke an diesem befestigen. Eine feste Marke wird vorzüglich in dem Falle nöthig sein, wenn der Beobachter jedesmal nach Beendigung der Beob-

achtungen genöthigt ist, sein Instrument wegzunehmen, um es alsdann jeden Tag wiederum von neuem aufzustellen.

Allgemeine Bemerkungen über die Eigenschaften des Durchgangsinstruments.

48. Es ist schon oben erwähnt worden, dass die Hauptgesichtslinie des Durchgangsinstrumentes, welche durch den Ort des Mittelverticalfadens bezeichnet wird, bei der Bewegung des Fernrohrs um seine Umdrehungsachse einen grössten Kreis an der Himmelskugel beschreiben muss, der durch das Zenith geht; hieraus folgen aber gewisse Bedingungen, welche bei jedem Durchgangsinstrumente stattfinden müssen.

1) Darf die optische Achse oder die Hauptgesichtslinie, bei der Bewegung des Fernrohrs um seine Umdrehungsachse nicht aus einer Ebene heraustreten, und deswegen ist es durchaus nöthig, dass die Zapfen, um welche die Umdrehung geschieht, vollkommene kreisrunde Cylinder sind; alsdann wird die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Kreise verbindet, in welchen die Zapfenlager von den Zapfen berührt werden, die constante Umdrehungsachse des Fernrohrs bilden. Wenn aber die Zapfen ungenau gearbeitet sind, oder eine verschiedenartige Krümmung haben, so wird das Fernrohr bei der Bewegung um die Umdrehungsachse seine Lage hin und her nach verschiedenen Richtungen ändern, und daher auch an der Himmelskugel eine unregelmässige Curve beschreiben, wodurch das Instrument ganz und gar unbrauchbar wird.

2) Muss die horizontale Umdrehungsachse des Fernrohrs auch wirklich horizontal sein, oder doch nur eine sehr geringe Neigung gegen den Horizont haben, welche man mit Hülfe des

Niveaus bestimmen, und ihren Einfluss auf die Beobachtungen in Rechnung bringen kann; dazu ist es aber nöthig, dass beide Zapfen genau gleichen Durchmesser haben, oder wenigstens, wenn dieser verschieden sein sollte, die Unterschiede genau bekannt sind.

3) Muss die optische Achse oder Hauptgesichtslinie des Instruments mit der Umdrehungsachse einen rechten Winkel bilden; denn sonst würde diese Gesichtslinie keinen grössten Kreis an der Himmelskugel beschreiben, sondern einen kleineren, der demjenigen grössten Kreis parallel sein würde, welcher von einer Linie beschrieben wird, die senkrecht auf der Umdrehungsachse steht.

4) Muss das Ocular und die Fadenplatte so gestellt werden, wie wir schon in § 31, S. 61 bemerkt haben; und ferner müssen die 5 oder 7 vertikalen Fäden von zwei horizontalen Fäden senkrecht durchschnitten werden, und diese letzten senkrecht zu der verticalen Umdrehungsachse liegen.

Von der vollkommenen Erfüllung dieser Bedingungen, oder auch von dem genauen Bekanntsein und der schärfsten Berechnung der hiervon stattfindenden Abweichungen, wird die Genauigkeit der Resultate, die man mit Hülfe des Durchgangsinstruments erzielen kann, ganz und gar abhängen, und deswegen muss der Beobachter auf diesen Punkt vorzüglich Acht geben. Einige von den hierbei stattfindenden Untersuchungen werden vermittelst des Niveaus angestellt, und desshalb wollen wir zuerst zeigen, wie man das Niveau berichtigen kann, und zugleich auch, wie man den Winkelwerth eines Niveautheiles ohne Hülfe sonstiger Vorrichtungen nur mit Hülfe derjenigen finden kann, welche das Instrument selbst darbietet.

Berichtigung des Niveaus.

49. Das Niveau wird dann berichtigt sein, wenn es so in seiner Einfassung adjustirt ist, dass seine Achse, oder eine in der Ebene *Cab* (Taf. I, Fig. 21) bei dem mittleren Theilstrich (*d*) an den Bogen *abd* gelegte Tangente mit der Umdrehungsachse des Fernrohrs parallel ist. Um dieses nun zu erreichen, stellt man zuerst den oberen oder beweglichen Theil des Instruments so, dass die horizontale Umdrehungsachse des Fernrohrs eine Richtung annimmt, welche durch denjenigen Fuss des Instruments hindurchgeht, dessen Schraube *a* (Taf. II, Fig. 1) den mit einer Theilung versehenen Kopf hat, bei welchem sich ein Zeiger *L* befindet; in diesem Falle wird nämlich die Umdrehungsachse senkrecht auf der Richtung der Linie stehen, welche die beiden anderen Füsse verbindet. Darauf setzt man das Niveau auf die Zapfen der horizontalen Umdrehungsachse und bringt die Blase durch das Drehen des Schraubenkopfes, der sich in der Richtung der Niveauachse befindet, auf die Mitte der gläsernen Röhre des Niveaus. Hierauf liest man die Theilungen auf der gläsernen Röhre an den Enden der Blase ab, und legt das Niveau um, indem man das Ende, welches vorher auf dem rechten Zapfen lag, nunmehr auf den linken bringt; wenn dabei die Blase ihren Ort gegen den vorigen Stand verändert, so wird diese Veränderung der Blasenlage gleich der doppelten Neigung der Niveauachse gegen die horizontale Umdrehungsachse des Instruments sein, und um nun diesen letzteren Fehler zu verbessern, muss man bemerken, nach welcher Richtung und um wie viel Theile man den vorhin erwähnten Schraubenkopf drehen muss, damit die Blase auf ihren früheren Stand wieder einspielt. Ist dieses geschehen, so dreht man den Schraubenkopf wieder um die Hälfte der bemerkten Theile der Umdrehung zurück, und kann nun dadurch, dass man die eine der Schrauben *t* und *t'* (Taf. II, Fig. 2 und 4) anzieht, die andere aber löst, die Blase endlich auf ihren früheren Stand zurückführen. Die Be-

richtigung wird meistentheils nicht sofort bei dem ersten Versuche gelingen; deswegen liest man nochmals die Theilungen an den Enden der Blase ab, legt von neuem das Niveau um, und wenn alsdann die Blase nicht auf den vorigen Ort einspielt, so dreht man den Schraubenkopf am Fusse des Instruments so lange, bis sich die Blase in die Mitte zwischen ihrem früheren und ihrem neuen Stande einstellt, und die noch übrigbleibende Hälfte der Entfernung zwischen dem nun erzielten Stande der Blase und ihrem ersten Stande schafft man durch Hülfe der Schrauben *t*, *t'* (Fig. 2 und 4), welche sich am Niveau selbst befinden, hinweg.

Ist dieses Verfahren nun so oft wiederholt, bis in beiden Lagen des Niveaus die Blase in der Mitte der Röhre einspielt, so wird sowohl die Achse des Niveaus wie auch die Umdrehungsachse des Instruments, auf welcher das Niveau steht, horizontal sein; damit die Achsen aber untereinander parallel werden, muss man noch eine zweite Correction vornehmen, nämlich sich erst versichern, ob die Lage der Blase in der gläsernen Röhre sich dann nicht verändert, wenn man das Niveau zwar nicht herunternimmt, sondern nur, indem seine Füsse immer in Berührung mit den Zapfen bleiben, ein wenig um die horizontale Umdrehungsachse des Instruments bewegt. Wenn bei dieser Verrichtung die Blase ihren Ort ändert, so ist dies ein Zeichen, dass zwei verticale Ebenen, von denen die eine durch die Niveauachse und die andere durch die Umdrehungsachse des Instruments gelegt wird, mit einander weder zusammenfallen noch parallel sind, sondern irgend einen Winkel bilden, und je nach der Veränderung des Orts der Blase wird man schliessen können, nach welcher Seite hin jedes der beiden Enden des Niveaus von der zweiten der beiden verticalen Ebenen abweicht. Die Correction dieser Abweichung nach der einen oder nach der anderen Seite hin wird durch die Schrauben *s*, *s'* (Taf. II, Fig. 2 und 3) bewirkt, deren Richtung senkrecht gegen die der Schrauben *t* und *t'* steht. Bewegt man nämlich diese Schrauben

an dem einen Ende des Niveaus in horizontaler Richtung entweder vor oder zurück, so wird man endlich dadurch die Achse des Niveaus mit der Umdrehungsachse des Instruments parallel stellen können, so dass dann eine kleine Drehung des Niveaus um diese letztere Achse herum keine zu bemerkende Veränderung in der Lage der Blase zur Folge haben wird. Nachdem nun diese zweite Correction geschehen ist, muss man wiederum die erste vornehmen, wobei übrigens zu bemerken ist, dass ein kleiner, nicht über ein oder zwei Theilstriche des Niveaus in dieser Hinsicht betragender Fehler, bei der gebräuchlichen Methode, nach der man die Neigung der Umdrehungsachse des Instruments bestimmt, vollkommen eliminirt wird.

Es versteht sich von selbst, dass, wenn die gläserne Röhre des Niveaus eine so sehr unrichtige Aufstellung in ihrer messingnen Fassung hat, dass die Schrauben t, t' und s, s' (Taf. II, Fig. 3 und 4) nicht mehr zu ihrer Correction ausreichen, man alsdann auf eine passende Art kleine Stückchen plattes Papier oder Folie unter die Enden des Niveaus legen muss, so dass sie wenigstens genähert berichtigt sind, worauf man sie dann ganz genau durch die Schrauben selbst berichtigen kann.

50. Wir wollen nun zeigen, auf welche Weise man den Winkelwerth eines Niveautheiles bestimmen kann. Ein bequemes Mittel, um dieses zu bewerkstelligen, gewähren uns die Fussschrauben des Instruments a, a, a (Taf. II, Fig. 1). Man denke sich hierzu nämlich, dass der obere oder bewegliche Theil des Instruments so gestellt sei, dass die horizontale Umdrehungsachse, auf welche man das Niveau stellt, nach der Richtung eines Radius gelegt sei, der durch den Fuss a geht, dessen Schraube mit einem eingetheilten Kopfe versehen ist; gegenüber diesem Schraubenkopfe befindet sich der Zeiger L, der an der Platte b befestigt ist. Dreht man nun diese Schraube, so kann man dadurch die Blase des Niveaus in eine solche Lage bringen, dass sie so weit wie nur irgend möglich nach einer Seite der Theilung

hin einspielt, nur müssen ihre beiden Enden noch sichtbar bleiben. Sobald die Blase sich zur Ruhe gestellt hat, liest man die Theilung des Niveaus ab, welche beiden Enden der Blase entspricht, und ebenso die Theilung auf dem Schraubenkopfe, bei dem sich der Zeiger befindet; hierauf dreht man die Schraube *a*, so dass die Blase sich nach der entgegengesetzten Seite der Glasröhre hin bewegt, und nachdem sie zur Ruhe gekommen ist, liest man wieder die Theilung an den Enden der Blase und die Theile des Schraubenkopfes *a* ab. Darauf lässt man die Schraube *a* unberührt und dreht die beiden übrigen Schrauben des Instruments so lange, bis die Mitte der Blase sich wieder beinahe in dieselbe Lage wie zu Anfang der Beobachtung einstellt; alsdann liest man wieder die Theilung an den Enden der Blase auf dem Niveau ab, und ebenso die unveränderte Theilung an dem Schraubenkopfe *a*. Nun dreht man wiederum die Schraube *a* um ebenso viel Theile wie vorher, weiter, wodurch die Blase sich wieder nach der entgegengesetzten Seite hin bewegt; und wenn sie nicht mehr schwankt, so liest man die Theilung an den Enden der Blase und ebenso die Theile ab, welche der Zeiger an dem Kopfe der Schraube *a* angiebt. Auf ganz ähnliche Weise setzt man die Beobachtungen so lange fort, bis die Schraube *a* mit dem getheilten Kopfe eine ganze Umdrehung vollendet hat. Addirt man darauf mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen, alle gefundenen Niveauablesungen zusammen, so erhält man die Anzahl der Niveautheile, welche einer ganzen Umdrehung der Schraube am Fusse *a* entsprechen. Zur grösseren Deutlichkeit wollen wir nun ein Beispiel hersetzen, welches sich auf unser vorher beschriebenes Instrument bezieht; die Theilung auf der gläsernen Niveauröhre fing in ihrer Mitte an, und wurde von dieser Mitte aus nach beiden Seiten in zunehmender Ordnung gezählt; bei der Ablesung werden wir daher Theile auf der einen Seite positiv, auf der anderen aber negativ zählen müssen; der Kopf der Schraube *a* war in 100 Theile eingetheilt.

Ablesung am Kopfe der Schraube	Ablesung der Niveautheilung an den Enden der Blase		Ort der Mitte der Blase	
a	auf der negativen Seite (—)	auf der positiven Seite (+)		Unterschied:
0 10	1,5 26,6	31,6 6,5	+ 15,05 — 10,05	 25,10
10 20	2,0 26,8	31,0 6,3	+ 14,50 — 10,25	 24,75
20 30	1,9 26,8	31,2 6,3	+ 14,65 — 10,25	 24,90
30 40	2,5 27,0	31,5 6,0	+ 14,50 — 10,50	 25,00
40 50	4,0 28,0	29,6 5,8	+ 12,80 — 11,10	 23,90
50 60	1,4 26,0	31,4 6,8	+ 15,00 — 9,60	 24,60
60 70	3,0 29,2	29,0 2,8	+ 13,00 — 13,20	 26,20
70 80	1,1 27,6	32,9 5,2	+ 15,90 — 11,20	 27,10
80 90	2,5 27,8	30,3 5,4	+ 13,90 — 11,20	 25,10
90 100 oder 0.	1,9 27,2	31,5 6,2	+ 14,80 — 10,50	 25,30

Hieraus findet man nun, dass 100 Theile auf dem Kopfe der Schraube *a*, oder mit anderen Worten eine ganze Umdrehung dieser Schraube, 251,95 Theilen des Niveaus entsprechen. Die drei Fussschrauben, auf welchen das Instrument ruht, bilden immer unter sich die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks; an unserem Instrumente war jede dieser Seiten, oder die Entfernung zwischen den Spitzen irgend zwei der Füsse = 12,61 englische Zoll; nun sei diese Seite = c, und es werde auf die Linie, welche zwei Füsse verbindet, und auf welcher die Achse des Niveaus senkrecht steht, eine andere Linie von der Spitze

des dritten Fusses aus, senkrecht auf diese gefällt, deren Länge $= p$ sei, so wird sogleich:

$p = c \sin 60°$, folglich in unserem Falle $p = 10{,}921$ englische Zoll.

Schraubt man nun die Schraube *a* aus ihrer Schraubenmutter heraus, so kann man leicht zählen, wie viele Gänge oder Windungen in der ganzen Schraube oder in einem bestimmten Theile von ihr enthalten sind, und darauf bestimmt man mittelst eines Zirkels und Zollstocks, wie viele Zolle und Linien oder Theile von Zollen in dem gemessenen Theile der Schraube enthalten sind. Bei unserem Instrumente gingen 51 Gänge der Schraube *a* am Fusse des Instruments auf 1,04 englische Zoll. Da nun, wie schon erklärt worden ist, die Niveauachse nach der Richtung der senkrechten Linie *p* gestellt war, auf der sich zugleich die Schraube *a* befindet, so erhalten wir bei der Annahme, dass bei einer ganzen Umdrehung der Schraube um einen Gang sich die Neigung der Achse des Niveaus um den Winkel *v* änderte:

$\sin v = \frac{h}{p}$, wo $h =$ dem Werthe eines Ganges der Schraube in Zollen, oder in demselben Masse, wie *p* ausgedrückt, bedeutet.

Wegen der Kleinheit des Winkels *v* kann man annehmen, dass:

$$v = \frac{h}{p \sin 1''} = \frac{h}{c . \sin 60° \sin 1''};$$

bei uns war aber: $h = \frac{1{,}04}{51}$ englische Zoll, und folglich $v = 385'',16$.

Da nun also eine ganze Windung der Schraube 385,16 Bogensecunden, zugleich aber auch 251,95 Niveautheilen entspricht, so folgt für den Winkelwerth eines dieser Niveautheile 1'',529 Bogensecunden.

Um den Werth eines Umganges bei feinen Schrauben zu bestimmen, hält Herr Professor Knorre folgendes Verfahren für

zweckmässiger als das oben erwähnte. Man zieht auf dem äussersten Ende des Armes *f* (Taf. II, Fig. 1) durch welchen die Fussschraube geht, einen horizontalen Strich *k*. Alsdann schneidet man ein Klötzchen so zu, dass es sich bis hart an den Strich *k* heranschieben lässt, und zieht auf der senkrechten Wand desselben, welche in der Verlängerung des Striches *k* liegt, zwei horizontale Striche *g* und *h*, welche ungefähr dem höchsten und tiefsten, durch Umdrehen der Fussschraube zu erlangenden Stand von *k* entsprechen. Hierauf bringt man *k* durch Drehung der Schraube successive mit *g* und *h* zur Coincidenz, und beobachtet, wie viele Umdrehungen und Theile einer Umdrehung der Rand der Schraube von einer Coincidenz bis zur anderen zurückgelegt hat. Die Entfernung *g h* sorgfältig gemessen und durch die Zahl der Umdrehung dividirt, giebt den Linearwerth eines Schraubenganges.

Es ist noch zu bemerken, dass die Temperatur einigen Einfluss auf die Empfindlichkeit des Niveaus ausübt: denn durch die Wärme wird die Gestalt der gläsernen Röhre des Niveaus sich ein wenig verändern, und zugleich durch eine Zunahme der Temperatur die Blase sich etwas verkürzen, in der Kälte dagegen verlängern, weil sich im ersten Falle die Flüssigkeit ausdehnt, im zweiten Falle aber zusammenzieht. Da aber von der Länge der Blase die Empfindlichkeit des Niveaus abhängt, so sieht man leicht ein, dass man zur genauesten Bestimmung des Winkelwerthes eines Niveautheiles Beobachtungen bei verschiedenen Temperaturen anstellen muss.

Aufstellung des Instruments in horizontaler Lage.

51. Wenn das Niveau schon berichtigt ist, so kann man leicht das Instrument in solcher Lage aufstellen, dass die Achse, um welche das Fernrohr sich dreht, sehr nahe horizontal, die

Achse aber, um welche sich der bewegliche Theil des Instruments dreht, vertikal wird. Hierzu setzt man nämlich das Niveau auf die Zapfen, und stellt die horizontale Umdrehungsachse des Instruments nach der Richtung desjenigen Halbmessers des Horizontalkreises, welcher durch einen der Füsse des Instruments geht, und kann nun vermöge der Schraube an diesem Fusse die Mitte der Niveaublase auf die Mitte des gläsernen Niveaus einstellen. Nun dreht man den oberen Theil des Instruments auf dem Horizontalkreise um 90° aus seiner früheren Lage heraus, und kann alsdann von neuem die Mitte der Niveaublase auf die Mitte der gläsernen Niveauröhre mittelst einer der beiden Schrauben an den Füssen des Instruments, welche nunmehr der Richtung der horizontalen Umdrehungsachse parallel liegen werden, einstellen. Darauf dreht man wieder den oberen Theil des Instruments um 90°, auf die früher berichtigte Lage des Instruments zurück, und führt nun ganz ähnlich wie vorher die Berichtigung so lange fort, bis die Niveaublase bei jeder Drehung des oberen Theiles des Instruments unbeweglich bleibt, oder doch nur sehr wenig ihren Ort ändert.

Ist nun das Instrument einmal auf diese Weise aufgestellt, so kann man für jede bestimmte Lage des Instruments die genaue Neigung der Umdrehungsachse des Fernrohrs gegen den Horizont, mittelst des Niveaus leicht finden. Man setzt hierzu das Niveau auf die Zapfen dieser Achse auf, und liest die Theilstriche, welche den Enden der Blase auf der gläsernen Röhre entsprechen, ab. Darauf nimmt man das Niveau von der Achse herunter, und legt es auf dieser so um, dass der Fuss des Niveaus, welcher vorher auf dem rechten Zapfen ruhte, nunmehr auf dem linken liegt; findet man nun, dass die Blase in dieser neuen Lage des Niveaus wieder genau auf denselben Ort einspielt wie vorher, so ist dieses ein Beweis, dass die Umdrehungsachse des Fernrohrs horizontal ist. Im entgegengesetzten Falle wird sich die Blase, nach der Umlegung des Niveaus, demjenigen der beiden Zapfen nähern, welcher höher als der andere über dem

Horizonte liegt, und es ist klar, dass die Neigung der Umdrehungsachse, auf welcher das Niveau aufgestellt ist, genau gleich dem halben Bogen sein wird, um den sich die Mitte der Blase verrückt hat*). Bestimmt man auf diese Weise die Neigung der Umdrehungsachse gegen den Horizont, so wird man sich dadurch, weil das Niveau umgelegt worden ist, ganz frei von dem einen kleinen Fehler des Niveaus selbst machen, der schon in § 49, S. 102 als der erste der beiden Fehler des Niveaus angeführt wurde. Um sich ebenso von dem zweiten früher erwähnten kleinen Fehler zu befreien, muss man das Niveau immer auf die Zapfen auf dieselbe Weise und zwar so aufsetzen, dass die Füsse des Niveaus so nahe wie möglich vertical sind. Ebenfalls muss man auch die Neigung der Umdrehungsachse bei beiden sich entgegengesetzten horizontalen Richtungen des Fernrohrs bestimmen, und in der Rechnung das arithmetische Mittel aus diesen beiden Neigungen gebrauchen, weil man dadurch den Einfluss vermindert, den eine kleine Unregelmässigkeit in der Form der Zapfen auf die Neigung ausüben könnte.

Die Angabe der Theilung auf dem Niveau nimmt entweder so zu, dass alle Striche auf der gläsernen Röhre von einem ihrer Enden aus nach derselben Richtung ununterbrochen bis zum

---

*) Dieses ist streng richtig, wenn beide Zapfen der Umdrehungsachse des Fernrohrs gleiche Dicke haben, und wenn die Winkel, welche die Ausschnitte in den Füssen des Niveaus bilden, die auf die Zapfen aufgesetzt werden, bei beiden Füssen genau gleich sind. Wenn diese beiden Winkel aber einander nicht gleich sind, so ist es offenbar, dass dasjenige Ende des Niveaus, dessen Fuss den kleineren Winkel hat, höher als das andere Ende des Niveaus liegen wird, weil alsdann der engere Ausschnitt sich gegen den Zapfen eher, als der andere stemmen wird. Hierdurch wird also ein Fehler in der am Niveau abgelesenen Neigung der Umdrehungsachse hervorgebracht; wenn aber darauf das Niveau umgelegt wird, so wird dieser Fehler eine der vorigen entgegengesetzte Wirkung hervorbringen, so dass folglich, wenn die Neigung der Umdrehungsachse so bestimmt wird, wie wir es eben im Texte angegeben haben, diese vollkommen richtig erhalten wird.

anderen Ende fortgezählt werden, oder der Nullpunkt der Theilung befindet sich auf der Mitte der gläsernen Röhre und alsdann werden die Theilstriche nach entgegengesetzten Richtungen nach beiden Seiten der Röhre hin fortgezählt.

Im ersteren Falle muss man immer beim Gebrauche die Richtung bezeichnen, nach welcher die Theilung zunahm; z. B. wenn das Instrument im Meridiane aufgestellt ist, so muss man aufschreiben, ob die Theilung nach Osten oder nach Westen zunahm. Im anderen Falle aber, wenn die gläserne Röhre von der Mitte aus getheilt ist, schreibt man die Richtung der Ablesung für jedes Ende der Blase besonders auf.

1. Beispiel. *Die Neigung der Umdrehungsachse eines im Meridiane aufgestellten Instruments zu bestimmen, bei dessen zugehörigem Niveau der Nullpunkt der Niveautheilung auf der Mitte der gläsernen Röhre war.*

I. Objectiv im Norden.

		Niveautheile.		
A. Lage der Blasenenden	östlich	20 , 8	westlich	23 , 5
B. Niveau umgelegt	„	18 , 3	„	26 , 0
	Mittelzahlen	19,55		24,75

halber Unterschied = 2,60 Theile westlich.

II. Objectiv im Süden.

		Niveautheile.		
B. Lage der Blasenenden: . . .	östlich	18 , 0	westlich	25 , 8
A. Niveau umgelegt	„	21 , 0	„	23 , 0
	Mittelzahlen	19,50		24,40

halber Unterschied = 2,45 Theile westlich.

Hieraus findet man in der Annahme, dass beide Zapfen gleiche Halbmesser hatten, dass das westliche Ende der Umdrehungsachse höher als das östliche war, um:

2,60 Niveautheile
2,45
oder Mittelzahl . . 2,525

Da jeder Niveautheil schon vorher = 1″,529 gefunden wurde, so ist folglich das westliche Ende der Umdrehungsachse um 2,525 × 1″,529 = 3″,861 in Bogen höher als das östliche Ende.

2. Beispiel. *Die Neigung der Umdrehungsachse eines im Meridiane aufgestellten Instruments zu finden, bei welchem das zugehörige Niveau seinen Nullpunkt der Theilung am Ende hatte;* wobei ein Theil dieses Niveaus = 2″,350 in Bogen war.

I. Objectiv im Süden.

	Lage der Blasenenden		Ort der Mitte der Blase	
A. .	von 10,4 Theil.	bis 31,2 Theil.	nach Osten .	20,8 Niveauth.
B. umgelegt	6,0 „	„ 27,0 „	„ Westen	16,5 „
			halber Unterschied =	2,15 östlich.

II. Objectiv im Norden.

B.	6,5 .	27,4	nach Westen .	16,95
A. Nach der Umlegung .	10,7 .	31,4	nach Osten . .	21,05
			halber Unterschied =	2,05 östlich.

Nehmen wir hier wieder an, dass beide Zapfen gleich dick waren, so folgt, dass das östliche Ende der Achse höher als das westliche war, um:

2,15 Niveautheile,
2,05 „
Mittel 2,10 Niveautheile.

Da nun der 1. Theil des Niveaus = 2″,350 war, so ist folglich das östliche Ende der Umdrehungsachse um 4″,935 in Bogen höher als das westliche.

Die Buchstaben *A* und *B* bezeichnen hier die entgegengesetzten Lagen des Niveaus, und die in diesen Beispielen beob-

achtete Ordnung dient dazu, um die Resultate vom Einflusse einer kleinen Veränderung im Niveau selbst zu befreien.

Untersuchungen, welche sich auf die Gestalt und die verschiedene Dicke der Zapfen beziehen.

52. Es ist schon oben bemerkt worden, dass die Zapfen der horizontalen Umdrehungsachse des Instruments vollkommen genaue, gerade, kreisrunde Cylinder sein müssen, welche alsdann die Zapfenlager in einem Kreise berühren werden. Mit Hülfe des Niveaus wird es nun leicht sein, sich zu überzeugen, ob sie wirklich diesen Bedingungen genügen, indem man das Niveau auf die Zapfen aufsetzt, und das Objectivende des Fernrohrs so weit wie nur irgend möglich nach unten zu bewegt; bewegt man nun wieder das Fernrohr nach oben so weit zurück, als es die Füsse des Niveaus gestatten, und bemerkt alsdann, dass die Blase des Niveaus während dieser Drehung unbeweglich bleibt, so kann man mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass die Zapfen eine cylindrische Form haben*).

Weit genauer aber kann man die Gestalt der Zapfen mittelst eines sehr empfindlichen sogenannten Fühlhebels oder Fühlniveaus untersuchen; der eine Fuss dieses Fühlniveaus wird besonders für sich an dem Stutzpfeiler der horizontalen Umdrehungsachse des Instruments befestigt, der andere aber ist mit

*) Es ist leicht einzusehen, dass die Zapfen eine andere Gestalt haben könnten, nur müsste sie so beschaffen sein, dass die Durchschnitte beider Zapfen, welche durch eine zur Umdrehungsachse senkrechte Ebene gebildet werden. Curven von vollkommener Gleichheit, und symmetrisch in Beziehung auf die Umdrehungsachse gelegen sein müssten; denn in diesem Falle würde sich allerdings die Blase des Niveaus bei der Umdrehung des Fernrohrs nicht bewegen. Das genaue Zusammentreffen aller dieser Bedingungen aber wird sich in der Praxis niemals ereignen, und daher kann man keine andere Figur als die erwähnte cylindrische Kreisform annehmen.

dem Zapfen in Berührung; wenn nun das Fernrohr um seine Achse gedreht wird, und hierbei die Blase des Niveaus sich nicht bewegt, so ist dieses ein sicherer Beweis, dass der Zapfen das Pfannenlager in einem Kreisumfang berührt. Dieser Apparat wird aber nur bei der Untersuchung grösserer Instrumente gebraucht, weil er sich sehr selten in den Händen desjenigen befinden wird, welcher mit kleinen Reiseinstrumenten beobachtet, und deswegen wollen wir hier auch nicht näher auf diesen Punkt eingehen.

53. Wenn beide Zapfen zwar cylindrisch gestaltet sind, an Durchmesser aber verschieden sein sollten, so wird zwar die Blase des Niveaus, wenn das Niveau auf diese Zapfen aufgesetzt worden ist, bei der Drehung des Fernrohrs, ihren Ort nicht verändern, aber die Neigung der Umdrehungsachse, welche mittelst des Niveaus auf diejenige Weise bestimmt worden ist, wie wir es in § 51, S. 110 gezeigt haben, jedoch unrichtig sein; denn wenn z. B. die Umdrehungsachse, oder die Linie, welche die Mittelpunkte derjenigen Kreise verbindet, in welchen die Zapfen die Pfannenlager berühren, wirklich horizontal sein sollte, so würde, im Falle die Zapfen ungleich wären, das Niveau dennoch eine gewisse Neigung anzeigen, und dasjenige Ende der Achse, welches am dicksten wäre, würde höher als das andere zu liegen scheinen. Es ist daher nöthig, die Art und Weise zu untersuchen, wie man den Unterschied der Durchmesser der Zapfen bestimmen kann, und ferner auch zu zeigen, wie man alsdann die Correction für die Neigung der Umdrehungsachse, die von dieser Differenz der Durchmesser abhängt, bei der directen Ablesung des Niveaus anbringen muss, um die wahre Neigung der Umdrehungsachse zu erhalten.

Wir wollen also annehmen, dass die Zapfen Cylinder von ungleichem Durchmesser sind, welche in den winkelhakenförmigen Pfannenlagern RAQ und $R'A'Q'$ (Fig. 22, Taf. I) liegen, die gewöhnlich so eingerichtet sind, dass der Winkel RAQ, welchen die beiden Ebenen bilden, die den einen Zapfen

an den Stellen berühren, wo er auf seinem Lager ruht, dem Winkel $R'A'Q'$ gleich ist, welcher von ähnlichen Ebenen gebildet wird, die den anderen Zapfen berühren. Der rechtsliegende Zapfen habe den grösseren Durchmesser, und tangire sein Pfannenlager in zwei Punkten des Kreisumfanges RQG, dessen Centrum sich in C befinde, und dessen Radius $= CQ = CG = R$ sei. Der andere Zapfen tangire das linke Pfannenlager in zwei Punkten des Kreisumfanges $Q'R'i'$, dessen Centrum in B', und dessen Radius $= Q'B' = gB' = r$ sei; wir nehmen wie schon erwähnt $r < R$ an. Das Niveau sei auf seinen winkelhakenförmigen Füssen auf den Zapfen gestellt, und es seien K, N' die Scheitel der Winkel FKG und gNi und in welchen sich die Ebenen schneiden, die die Zapfen in denselben Punkten berühren, auf welchen die Füsse des Niveaus stehen. Die Winkel FKG und $gN'i$ können wir als gleich annehmen, weil bei der Bestimmung der Neigung der horizontalen Umdrehungsachse durch die Umlegung des Niveaus, wie wir schon in § 51, S. 110 gezeigt haben, der Einfluss dieser Ungleichheit verschwindet.

Vermittelst des Niveaus finden wir die Neigung der Linie KN' gegen den Horizont, die wahre Umdrehungsachse des Fernrohrs ist aber die Linie $B'C$, welche die Mittelpunkte der Kreise FQG und $R'ig$ verbindet, in welchen die Zapfen die Pfannenlagen berühren; es wird daher die mittelst des Niveaus unmittelbar gefundene Neigung der Umdrehungsachse um den kleinen Winkel $KN'n$, welchen die Linie KN' mit einer Linie $N'n$ bildet, die mit der Umdrehungsachse $B'C$ parallel ist und durch den Punkt N' geht, unrichtig sein. Um nun diesen Winkel finden zu können, bestimmt man zuerst nach der in § 51, S. 110 auseinandergesetzten Methode die Neigung der Linie $N'K$ gegen den Horizont, und wir wollen z. B. annehmen, dass sich der dickere Zapfen auf dem rechtsliegenden Pfannenlager befinde. Darauf nimmt man das Niveau herunter und legt die horizontale Umdrehungsachse des Fernrohrs so um, dass der vorhin rechts-

liegende Zapfen nunmehr im linken Pfannenlager aufliegt. Ist dieses geschehen, so bestimmt man mittelst des Niveaus die Neigung der Linie $K'N$, welche gegen die neue wahre Umdrehungsachse $C'B$ nach der entgegengesetzten Seite, um denselben Winkel geneigt sein wird, um welchen die Linie KN' gegen die frühere Lage der Umdrehungsachse $B'C$ geneigt war. Dadurch kann man nun den Winkel $KON = u$ finden, wo u den Unterschied in den Neigungen der Linien $N'K$ und $K'N$ gegen den Horizont ausdrückt. Dieser Winkel wird immer klein sein, und deswegen kann man $u = \frac{KN}{ON \sin 1''}$ setzen; nimmt man darauf an, dass $FKG = 2f = gN'i$ und $QAR = Q'A'R' = 2g$ ist, und bemerkt ferner, dass bei allen Instrumenten die Winkelhaken an den Füssen des Niveaus sowohl, als an den Pfannenlagern auf eine symmetrische Weise von der Verticalebene halbirt werden, welche durch die Umdrehungsachse des Fernrohrs und die Mitten der Zapfen geht, so folgt, dass $CKG = f$ und $CAQ = g$ ist; mithin hat man endlich aus den Dreiecken KCG und QAC, welche bei G und Q rechtwinklig sind, sowie auch aus den Dreiecken $B'N'g$ und $B'Q'A'$, welche bei g und Q' rechtwinklig sind, ohne Weiteres:

$$KN = KC + CA - AB - BN = KC + CA - A'B' - B'N'$$

$$= \frac{R}{\sin f} + \frac{R}{\sin g} - \frac{r}{\sin f} - \frac{r}{\sin g};$$

bezeichnet man nun ON durch L, so wird:

$$u = \frac{(R-r)}{L . \sin 1''} \cdot \left(\frac{1}{\sin f} + \frac{1}{\sin g}\right)$$

$$R - r = u . L . \sin 1'' . \left(\frac{\sin g . \sin f}{\sin g + \sin f}\right)$$

Auf diese Weise kann man nun den Unterschied zwischen den Halbmessern der Zapfen in irgend einem beliebigen Längenmasse ausgedrückt finden. Wir sehen zugleich, dass man zur Bestimmung der wahren Neigung der Umdrehungsachse die unmittelbare Niveauablesung um den kleinen Winkel $KN'n = x$ verbessern muss; nun ist aber $N'n$ sehr nahe $= N'K = 2L$ und $nC = N'B'$; folglich:

$$\pm x = \frac{KC - N'B'}{2L \sin 1''} = \left(\frac{R}{\sin f} - \frac{r}{\sin f}\right) \cdot \frac{1}{2L . \sin 1''}$$

$$\text{oder } \pm x = \tfrac{1}{2} u \cdot \frac{\sin g}{\sin f + \sin g}$$

Damit man nun weiss, welches Zeichen man bei dieser Correction gebrauchen muss, muss man bedenken, dass die Ungleichheit der Zapfen die Wirkung hat, dass das Niveau dasjenige Ende der horizontalen Umdrehungsachse zu hoch angiebt, an welchem der dickere Zapfen sich befindet.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir hier die Zapfenungleichheit bei einem Durchgangsinstrumente untersuchen, welches dem früher beschriebenen ähnlich war. Diese Untersuchung wurde im Jahre 1843 zu Kronstadt angestellt.

Das Instrument war im Meridiane aufgestellt, und folglich lag die Umdrehungsachse in der Richtung von Osten nach Westen; an einem der Zapfen dieser Achse befand sich der Aufsuchungskreis, oder ein in Grade eingetheilter Verticalkreis; um die Zapfen nicht mit einander zu verwechseln, wollen wir jedesmal bezeichnen, ob der erwähnte Verticalkreis nach Osten oder Westen umgelegt war. Der Nullpunkt des Niveaus war auf der Mitte der gläsernen Röhre. Die Buchstaben *A* und *B* beziehen sich auf die bei der Umlegung entgegengesetzten Lagen des Niveaus.

Nummer der Versuche	Lage des Verticalkreises.	Ablesung an den Enden der Blase. *Oestlich.*	*Westlich.*	Höhe des *westlichen* Zapfens auf der Niveautheilung.	Unterschied = *u*
1.	im Westen	A. 13,1 . . .	13,2	+ 0,42	Theile 4,50
		B. 12,4 . . .	14,0		
	im Osten	B. 8,4 . . .	18,4	+ 4,92	
		A. 8,2 . . .	17,9		
2.	im Osten	A. 8,3 . . .	18,8	+ 5,60	5,15
		B. 7,2 . . .	19,1		
	im Westen	B. 12,0 . . .	13,6	+ 0,45	
		A. 13,0 . . .	13,2		
3.	im Westen	A. 13,0 . . .	13,6	+ 0,52	4,53
		B. 12,5 . . .	14,0		
	im Osten	B. 8,3 . . .	18,2	+ 5,05	
		A. 8,0 . . .	18,3		

Die Entfernung zwischen den Füssen des Niveaus war $= 2L = 10{,}85$ englische Zoll.

Hieraus sieht man, dass, obgleich bei beiden Lagen des Instruments der westliche Zapfen immer höher als der östliche lag, dennoch diese Erhebung am grössten war, sobald der Verticalkreis nach Osten umgelegt war; folglich hatte der Zapfen, welcher am Verticalkreis ist, einen kleineren Durchmesser als der entgegengesetzte. Im Mittel findet man $u = 4{,}73$ Niveautheile, und da nun ein Niveautheil $= 1'',68$ in Bogen war, so wird $u = 7'',95$ in Bogen oder $0^s,53$ in Zeit. Bei diesem Instrumente betrug der Winkel, welchen die inneren Oberflächen an den Füssen des Niveaus mit einander bildeten, oder der Winkel $2f$, die Grösse von 85°. Der Winkel dagegen, welchen die inneren Flächen an den Pfannenlagern bildeten, in denen die Zapfen der Achse des Fernrohrs lagen, war $= 91° = 2g$. Also ist der Fehler der unmittelbar aus den Niveauablesungen abgeleiteten Neigung der Achse, wie es in § 51, S. 110 gezeigt wurde, oder:

$$x = \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{0,53 \,.\, \sin 45° \, 30'}{\sin 45° \, 30' + \sin 42° \, 30'} = \mp 0^s,14 \text{ in Zeit.}$$

In unserem Beispiel gilt das Zeichen (—), wenn der Aufsuchungskreis im Osten war; (+) dagegen, wenn er nach Westen stand; hier ist $2L = 10{,}85$ englische Zoll, folglich wird:

$R - r$ sehr nahezu $= 0{,}00007$ englische Zoll.

Correction der verschiedenen Theile des Fernrohrs am Durchgangsinstrumente.

Correction des Prismas.

54. Die Hauptgesichtslinie oder die Collimationslinie wird immer durch die Richtung desjenigen Lichtstrahls bestimmt,

welcher durch den Mittelpunkt des Objectivs geht und den mittleren Verticalfaden genau in der Mitte zwischen den beiden Horizontalfäden trifft. Im Fernrohre unseres Durchgangsinstruments werden aber die Lichtstrahlen, ehe sie ins Ocular gelangen, von der spiegelnden Fläche des Prismas $\pi\pi$ (Fig. 1, Taf. II) reflectirt, und daher muss dieses Prisma so gestellt sein, dass die Bilder der durch das Fernrohr gesehenen Gegenstände nicht verzerrt erscheinen, und dass ferner die Hauptgesichtslinie bei der Bewegung des Fernrohrs um seine Achse eine zu dieser Achse senkrechte Ebene beschreibt.

Die erste dieser Bedingungen wird erfüllt, wenn die Lichtstrahlen die beiden brechenden Seiten des Prismas unter einem rechten Winkel treffen, und wenn die Hauptgesichtslinie sich in derselben Ebene befindet, welche durch die Umdrehungsachse des Fernrohrs und durch eine auf der spiegelnden Seite des Prismas senkrechte Linie geht; denn sonst würde man nie präcise Bilder sehen können, auch wenn das Fernrohr ganz gut in Bezug auf den Focus eingestellt wäre. Richtet man daher das Fernrohr auf einen hellen Stern, und zeigt sich sein Bild nicht völlig rund und scharf, sondern nach einer Seite hin verlängert, so muss das Prisma um die Achse des Objectivrohrs G (Fig. 1, Taf. II) etwas gedreht werden. Diese Drehung geschieht durch die beiden länglichen Schrauben δ, δ, welche durch die Seiten des Cubus EE hindurchgehen und sich an das kleine, mit der Unterlage T des Prismas $\pi\pi$ fest verbundene Parallelepipedon γ anstemmen; löst man die eine dieser Schrauben und zieht die andere fest an, so kann man dem Prisma $\pi\pi$ die richtige Lage geben, bei welcher das Bild des Sterns am schärfsten und gleichförmigsten begrenzt erscheint. W. v. Struve hielt es am sichersten, erst durch Drehung in einem gewissen Sinne ein etwas unregelmässiges Bild zu erzeugen; dann aber durch eine entgegengesetzte Drehung eine ebenso grosse Abweichung des Bildes im anderen Sinne zu veranlassen. Den Unterschied beider Stellungen kann man darauf

durch die Anzahl der Umgänge einer der Schrauben δ, δ messen und alsdann den Einsatz, der das Prisma trägt, in die Mitte zwischen beiden Stellungen vermittelst derselben Schrauben δ, δ bewegen und dort feststellen. Diese Correction ist nicht so ganz leicht zu bewerkstelligen und erfordert viel Geschicklichkeit; meistens bringen jedoch die Künstler selbst das Prisma $\pi\pi$ in dieser Beziehung schon in die gehörige Lage; und deshalb muss man nicht ohne absolute Nothwendigkeit die Schrauben δ, δ anrühren.

Um sich zu überzeugen, ob die Hauptgesichtslinie senkrecht zur Umdrehungsachse des Fernrohrs steht, richtet man das Fernrohr auf einen irdischen Gegenstand, befestigt dann den beweglichen Theil des Instruments durch die Druckschraube h' (Fig. 1, Taf. II), welche sich an dem Horizontalkreise AA befindet, und bringt darauf mit Hülfe der Mikrometerschraube M den mittleren Verticalfaden zur Coincidenz mit einem bestimmten Punkte des Gegenstandes. Dann nimmt man vorsichtig die Umdrehungsachse DD des Fernrohrs aus den Pfannenlagern heraus und legt sie so um, dass der vorher rechts liegende Zapfen nun links liegt. Wenn man nun das Fernrohr wieder auf den Gegenstand richtet und dabei bemerkt, dass der Mittelfaden mit demselben Punkte des Gegenstandes wie vorher zusammentrifft, so ist die Gesichtslinie senkrecht zur Umdrehungsachse. Im entgegengesetzten Falle aber kann man die Neigung der spiegelnden Seite des Prismas $\pi\pi$, durch Lösung der Schraube β (Fig. 1, Taf. II) und durch die Wirkung der Schrauben α, α, α ändern, indem man zwei von diesen letzteren löst und die dritte anzieht, oder umgekehrt; so dass das Bild des Gegenstandes dem Mittelfaden um die Hälfte seiner Entfernung von diesem Faden näher kommt*); alsdann wird das Prisma berichtigt sein. Mit einem

*) Um das Bild sicher auf die Hälfte seiner Entfernung vom Faden zu bringen, kann man, ehe die Schrauben β und α, α, α berührt werden, einen der Verniere am Horizontalkreise ablesen; dann mittelst der Mikrometer-

Male wird es schwer sein, dieses vollkommen zu bewerkstelligen; deshalb bringt man erst den Mittelfaden zur Coincidenz mit dem Bilde des beobachteten Gegenstandes, vermittelst der Mikrometerschraube *M*, legt dann die horizontale Umdrehungsachse *DD* wieder um, und verfährt von neuem ebenso, wie wir oben beschrieben haben; diese Versuche setzt man so lange fort, bis endlich vor und nach der Umlegung der Achse der Mittelfaden sehr nahezu mit demselben Punkte des beobachteten Gegenstandes zusammentrifft, worauf man die Schraube β wieder fest anzieht. Ueberhaupt muss man stets sorgfältig darauf achten, dass alle Correctionsschrauben gehörig angezogen sind, weil hiervon die Unveränderlichkeit des Prismas nn abhängt, welche durchaus nothwendig ist, um die Schwankungen der Gesichtslinie zu vermeiden.

Correction der Fadenplatte oder des Fadennetzes.

55. Wir haben schon früher § 31, S. 61 gezeigt, wie man die Fadenplatte in den gemeinschaftlichen Brennpunkt (Focus) der Objectiv- und der Ocularlinse einstellt. Ausserdem muss man aber das Fadennetz noch so stellen, dass bei der richtigen, horizontalen Aufstellung des Instruments (§ 51, S. 110) zwei Fäden parallel mit der horizontalen Umdrehungsachse des Fernrohrs, die anderen fünf oder sieben Fäden aber senkrecht zu dieser Achse werden. Diese Berichtigung kann man leicht mit Hülfe eines irdischen Gegenstandes bewerkstelligen, auf welchen man das Fernrohr so richtet, dass das Bild des Gegenstandes am mittleren Verticalfaden in der Mitte des Raumes zwischen beiden Horizontalfäden erscheint. Bewegt man nun den oberen Theil des Instruments in horizontaler Richtung, bis das Bild des

schraube *M* den Mittelfaden mit dem Bilde zusammenfallen lassen, und noch einmal an demselben Verniere ablesen. Stellt man nun diesen Vernier auf die Mittelzahl zwischen beiden Ablesungen, so wird das Bild halb so weit entfernt vom Faden als vorher sein.

Gegenstandes an den Rand des Gesichtsfeldes gebracht worden ist, so kann man hierbei gleich bemerken, ob es immer in der Mitte zwischen beiden Horizontalfäden geblieben ist. War dieses nicht der Fall, so muss man eine der Schrauben *q* (Fig. 1, Taf. II), die durch den Bügel *p* gehen, lösen und mit der anderen das äussere Röhrchen *m*, in welchem sich das Fadennetz befindet, um die feste Röhre *n* so lange drehen, bis das Bild des Gegenstandes genau in die Mitte zwischen beide Horizontalfäden gestellt ist; und nun würde die Lage der Fadenplatte berichtigt sein, wenn man annehmen könnte, dass der Winkel zwischen den sogenannten Horizontal- und Verticalfäden wirklich 90° wäre. Da aber dieses nie in aller Strenge stattfindet, so ist es beim Durchgangsinstrument viel wichtiger, die Lage der Verticalfäden genau zu berichtigen, oder sie einer der Umdrehungsachse des Fernrohrs parallelen Linie senkrecht zu stellen. Diese Berichtigung wird erreicht sein, wenn man die Fadenplatte so stellt, dass der mittlere Verticalfaden bei der Bewegung des Fernrohrs um seine Umdrehungsachse fortwährend denselben irdischen Gegenstand schneidet. Eine Bewegung der Schrauben *q* wird jedoch meistentheils die Richtung der Hauptgesichtslinie etwas ändern, weshalb es nöthig sein wird, die feine Berichtigung der Schrauben *a*, *a*, *a* am Prisma so lange zu verschieben, bis an den Schrauben *q* nichts mehr zu ändern ist.

Man kann auch die Horizontalfäden mit Hülfe von astronomischen Beobachtungen richtig stellen. Die Sterne in der Nähe des Meridians ändern ihre Höhe sehr wenig, und wenn das Fernrohr im Meridiane aufgestellt ist, so wird ein Aequatorialstern im Gesichtsfelde beinahe eine horizontale, gerade Linie beschreiben; tritt also ein solcher Stern in das Gesichtsfeld mitten zwischen den Horizontalfäden ein, so muss er, wenn die Fäden horizontal sind, auch beim Austritte aus dem Gesichtsfelde mitten zwischen beiden Horizontalfäden sich befinden; wenn der Stern aber beim Austritte aus dem Gesichtsfelde nicht mehr in dieser Mitte ist, so werden die Fäden eine

Neigung gegen den Horizont haben, welche, wie schon gezeigt wurde, leicht zu berichtigen ist.

Correction des verticalen Höhenkreises.

56. Wenn das Instrument im Meridiane aufgestellt ist und der Verticalkreis sich im Westen befindet, so wird seine Gradtheilung von der Richtung des Zeniths aus nach dem Südpunkte des Horizonts u. s. w. bis 360° abnehmen; da aber der Verticalkreis sich zugleich mit dem Fernrohre dreht, der Vernier aber unten fest ist, so wird die Ablesung nach der eben erwähnten Richtung zunehmen. Damit man nun das Fernrohr auf eine gegebene Zenithdistanz einstellen kann, muss man für jeden der Verniere, die an beiden Lagerträgern einzeln befestigt sind, den entsprechenden Ort des Zeniths auf dem Verticalkreise oder denjenigen Punkt der Theilung bestimmen, auf welchen der Vernier weist, wenn die optische Achse des Fernrohrs genau auf das Zenith gerichtet ist. Um die beiden Verniere zu unterscheiden, wollen wir den einen mit I, den anderen mit II bezeichnen. Wünscht man nun den Ort des Zeniths auf dem Kreise zu finden, wenn er gegen den Vernier No. I steht, so stellt man zuerst das Instrument mit Hülfe des Niveaus horizontal (§ 51, S. 110), und richtet darauf das Fernrohr auf einen gut sichtbaren terrestrischen Gegenstand, so dass dieser an dem Mittelfaden in der Mitte des Raumes zwischen den beiden horizontalen Fäden erscheint; darauf liest man die Angabe des Verticalkreises an diesem Verniere ab, und schreibt zugleich auf, auf welcher Seite vom Beobachter aus, dessen Gesicht auf den Gegenstand gerichtet ist, der Verticalkreis sich befand. Darauf löst man die Druckschraube h' am Horizontalkreise und dreht den ganzen oberen Theil des Instruments um 180° im Azimuth; wenn nun der Verticalkreis vorher auf der linken Seite war, so wird er sich jetzt zur rechten des Beobachters befinden; und indem man das Fernrohr wieder auf denselben Gegenstand wie vorher richtet, und auch ganz ebenso

wie zuerst verfährt, kann man wiederum die Grade, Minuten u. s. w. auf dem Verticalkreise am Vernier No. I ablesen. Bezeichnet man die Kreisablesung, wenn der Verticalkreis sich links vom Beobachter befand, durch L, wenn er sich dagegen auf der rechten Seite des Beobachters befand, durch R, so erhält man bei einem Instrumente, dessen Kreistheilung, wie bei dem unsrigen, von rechts nach links auf dem oberen Theile des beweglichen Kreises zunahm:

Ort des Zeniths . . . . . $= \frac{1}{2}(R+L)$

Zenithdistanz des Gegenstandes $= \frac{1}{2}(R-L)$

Hat man nun den Ort des Zeniths am Verticalkreise gefunden, wenn dieser sich beim Vernier No. I befindet; so legt man die horizontale Umdrehungsachse DD (Fig. 1, Taf. II) um; alsdann wird der Zapfen, welcher vorher auf dem rechten Zapfenlager ruhte, nunmehr auf dem linken Zapfenlager ruhen, und deshalb der Verticalkreis sich beim Vernier No. II befinden; in dieser neuen Lage bestimmt man nun ebenso wie vorher den Ort des Zeniths.

Wenn nun auf diese Weise der Ort des Zeniths bekannt geworden ist, und man wünscht das Fernrohr auf eine gegebene Zenithdistanz einzustellen, so muss man zu dieser Zenithdistanz den Ort des Zeniths zulegen, wenn der Verticalkreis sich auf der einen Seite, oder diese Zenithdistanz von dem zugehörigen Orte des Zeniths abziehen, wenn der Verticalkreis sich auf der anderen Seite zugleich mit demselben Verniere befand. Wird alsdann das Fernrohr so gerichtet, dass der Vernier am Kreise der gefundenen Summe oder Differenz der Grade, Minuten u. s. w. entspricht, so wird das Fernrohr auf die Zenithdistanz eingestellt sein.

Bei unserem Instrumente konnte man, so wie es auch bei vielen anderen der Fall ist, den Ort des Zeniths verändern und sich dadurch von dieser Berechnung ganz frei machen, indem man ganz einfach den Ort des Zeniths, wenn der Kreis sich bei einem der beiden Verniere befand, z. B. bei No. I, auf 0° 0′

bringen konnte. Der Höhenkreis wird nämlich durch eine Schraube L festgehalten (Fig. 1, Taf. II), und wenn man diese löst, so kann man den Verticalkreis mit der Hand umdrehen; richtet man alsdann das Fernrohr auf einen Gegenstand, dessen Zenithdistanz schon gefunden worden ist, und befestigt das Fernrohr an der Achse durch die Schraube K', so kann man den Verticalkreis so umdrehen, dass das Vernier No. I die Anzahl von Graden, Minuten u. s. w. angiebt, welche der Zenithdistanz des Gegenstandes gleich sind; dann wird der Ort des Zeniths auf dem Kreise $= 0°0'$ sein. Alsdann zieht man die Schraube L am Verticalkreise wieder fest an, und bestimmt der grösseren Sicherheit wegen den Ort des Zeniths noch einmal auf dieselbe Weise wie vorher. Darauf legt man die horizontale Umdrehungsachse des Instruments um, und sucht den Ort des Zeniths, wenn der Verticalkreis sich beim Vernier No. II befindet; meistens jedoch wird alsdann dieser Ort ebenfalls nahezu $0°0'$ sein, und wenn man alsdann die Platte des Verniers ein wenig verschiebt, welches durch eine an ihr befindliche Schraube geschieht, so kann man leicht den Ort des Zeniths auch hier genau auf $0°0'$ stellen.

Beispiel. Indem man das Fernrohr auf das Kreuz eines entfernten Kirchthurmes richtete, wurden folgende Ablesungen am Höhenkreise gemacht:

Am Vernier No. I bei Verticalkreis rechts . $R = 0°31',5$
„ „ *No. I bei Verticalkreis links* . $L = 181\ 52,5$

Wir nehmen hierbei an, dass das Gesicht des Beobachters nach dem Gegenstande gewendet war; alsdann muss aber nach der Ordnung der Zunahme der Vernierablesungen R grösser als L werden, und folglich hier statt $0°31',5$ der Werth $360°31',5$ gesetzt werden, indem man einen Vollkreis oder 360° zulegt; auf diese Weise wird nun:

Ort des Zeniths . . . . $= \frac{1}{2}(R+L) = 271°12',0$
Zenithdistanz des Kreuzes $= \frac{1}{2}(R-L) = 89\ 19,5$

Wenn nun der Ort des Zeniths $= 0°0'$ oder $360°0'$ wäre,

und der Verticalkreis sich auf der rechten Seite befände, so müsste das Vernier der Ablesung 89° 19′,5; wenn sich der Verticalkreis aber auf der linken Seite befände, der Ablesung 270° 40′,5 entsprechen. Man löste nunmehr die Schraube *L* (Fig. 1, Taf. II), richtete das Fernrohr genau auf den vorigen Gegenstand und befestigte darauf das Fernrohr für sich durch die Klemme *K′*; unter der Annahme, dass der Verticalkreis auf der linken Seite lag, musste man ihn alsdann so weit mit der Hand umdrehen, bis das Vernier No. I die Ablesung 270° 40′,5 angab, und alsdann wurde der Verticalkreis wieder durch die Schraube *L* festgestellt. Nachdem dieses geschehen war, fand man für die Correction des wiederum bestimmten Orts des Zeniths sehr nahe den Werth 0° 0′.

Darauf wurde die Horizontalachse des Instruments umgelegt, und dadurch wurde dann der Ort des Zeniths gefunden, als der Verticalkreis sich beim Vernier No. II befand; bei dieser Lage des Kreises beobachtete man nämlich folgendermassen:

Am Vernier No. II, bei Verticalkreis rechts $R =$ 89° 19′,0
„ „ *No. II, bei Verticalkreis links* $L =$ 270 38,5

hieraus:

Ort des Zeniths am Verticalkreise $= \frac{1}{2}(R + L) =$ 359° 58′,7
Zenithdistanz des Kirchenkreuzes $= \frac{1}{2}(R - L) =$ 89 20,2

Der Ort des Zeniths bei dieser Lage des Kreises weicht von dem bei seiner vorigen Lage = 0° 0′ gefundenen um nahe 1′ ab; um nun die Anzahl der Grade und Minuten zu finden, auf welche man das Vernier No. II am Kreise einstellen muss, um das Fernrohr auf einen bestimmten Gegenstand zu richten, muss man die mit Hülfe der gegebenen Zenithdistanz und einem angenommenen Orte des Zeniths = 0° 0′ oder 360° 0′ berechnete Kreisablesung um die Zahl 1′,3 verkleinern.

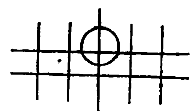
Ueber die Einstellung des Instruments sowohl in die Ebene des Meridians, als auch in eine beliebige andere Verticalebene.

57. Zur Einstellung des Instruments in den Meridian giebt es mehrere verschiedene Methoden, wobei es sich aber von selbst versteht, dass das Instrument schon vorher so aufgestellt sein muss, dass seine verticale Umdrehungsachse auch wirklich vertical ist (§ 51, S. 109).

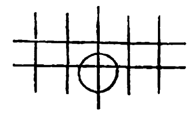
1. Methode. Wir wollen zuerst annehmen, dass der Beobachter weder die genaue Breite des Orts kennt, an dem er sich befindet, noch den Stand seines Chronometers genau ermittelt hat. Aus einer guten Landkarte, oder auch auf eine andere Weise kann er aber wenigstens die genäherte Länge und Breite seines Beobachtungsortes finden, und ein Fehler von einigen Minuten in diesen Elementen wird keinen grösseren Fehler auf die Einstellung des Instruments in den Meridian als ungefähr 2 oder 3 Bogenminuten hervorbringen; ebenso wird man auch das Chronometer bis auf 3^s oder 4^s in Zeit berichtigen können, und dieses genügt schon, um nachher das Instrument genauer aufzustellen und eine zu allen Zwecken brauchbare Beobachtungsreihe anzufangen.

Um dieses am Tage bewerkstelligen zu können, macht man eine Beobachtung der Sonne, wenn sie sich ausserhalb des Meridians befindet, wobei es am besten ist, die Sonne zwischen ihrem Aufgange und ihrem Durchgange durch die östliche Seite des ersten Verticals, oder auch zwischen ihrem Durchgange durch die westliche Seite des ersten Verticals (§ 1, S. 3) und ihrem Untergange zu beobachten; jedoch wird dieses nicht immer möglich sein. Alsdann richtet man das Fernrohr zuerst so, dass der eine der beiden Sonnenränder (z. B. der obere) genau in die Mitte des Raumes zwischen die beiden Horizontalfäden eintritt, und zwar zugleich auf solche Weise,

dass der mittlere Verticalfaden so genau wie nur irgend möglich das kleine Segment der Sonnenscheibe, welches zwischen den beiden Horizontalfäden eingeschlossen ist, halbirt; siehe die folgende Figur:



Darauf liest man die Angaben des Verniers an dem Vertical- und Horizontalkreise ab, und wenn man zu gleicher Zeit das Chronometer zu berichtigen wünscht, so bemerkt man ebenfalls seine Angabe im Moment der genauen Einstellung. Auf ähnliche Weise beobachtet man auch den unteren Rand der Sonne, wie in nachstehender Figur:



Nachdem dieses geschehen ist, dreht man den oberen beweglichen Theil des Instruments um 180° auf dem Horizontalkreise herum; dann wird der Verticalkreis sich in entgegengesetzter Lage befinden (z. B. jetzt links liegen, wenn er vorher auf der rechten Seite des Beobachters lag), und in dieser neuen Lage des Instruments wiederholt man die Beobachtungen beider Ränder der Sonne, auf ähnliche Weise wie vorher, nur mit dem Unterschiede, dass man jetzt in entgegengesetzter Ordnung wie früher verfährt, und mit demjenigen Rande der Sonne zuerst anfängt, mit welchem man vorher aufhörte. Hat man ein Barometer und Thermometer, so liest man ebenfalls den Stand dieser Instrumente ab, um die Strahlenbrechung genau berechnen zu können; übrigens wird in den meisten Fällen die mittlere Strahlenbrechung schon genügen.

Nachdem man den Ort des Zeniths am Verticalkreise gefunden hat, berechnet man die jeder der Einstellungen entsprechende scheinbare Zenithdistanz des Ober- und Unterrands

der Sonne, und aus diesen vier scheinbaren Zenithdistanzen nimmt man alsdann das arithmetische Mittel, welches wir $= p$ setzen wollen; ferner sei die zugehörige Strahlenberechnung $= \varrho$, die Horizontalparallaxe der Sonne $= \pi$, und die wahre Zenithdistanz des Sonnencentrums $= z$; wir erhalten alsdann für das Mittel der Beobachtungszeiten:

$$z = p + \varrho - \pi \sin (p + \varrho).$$

Nun kann man immer voraussetzen, dass der Beobachter ungefähr die Zeit kennt, zu welcher er die Beobachtungen anstellte, nämlich ungefähr auf eine Viertel- oder auch auf eine halbe Stunde, und es sei diese genäherte mittlere Zeit der Beobachtungen $= (\tau)$. Wenn alsdann die genäherte in Zeit ausgedrückte Länge des Beobachtungsorts von Berlin aus gezählt $= l$ ist, so wird $(\tau) \pm l$ die mittlere Zeit sein, welche in Berlin bei der Mitte der Beobachtungen gezählt, wurde; $(+)$ wird gebraucht, wenn die Länge westlich, $(-)$ dagegen, wenn die Länge östlich von Berlin ist. Für diese Zeit $(\tau) \pm l$ findet man nun aus dem Berliner astronomischen Jahrbuche die entsprechende Declination des Sonnencentrums $= \delta$ *), und kann alsdann leicht aus dem sphärischen Dreiecke, welches durch das Zenith, durch das Sonnencentrum und durch den Pol des Aequators gebildet wird, das Azimuth des Sonnencentrums $= a$ nach der folgenden Formel berechnen:

$$\cos a = \frac{\sin \delta - \cos z \sin \varphi}{\cos \varphi \sin z};$$

wo φ die Breite des Orts bezeichnet, und das Azimuth von Norden aus gezählt ist; aus dieser Formel folgt ferner:

$$\sin {}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\cos q \sin (q - \delta)}{\cos \varphi \sin z}}; \text{ wo } q = \frac{\varphi + \delta + z}{2}$$

gesetzt ist.

Da wir im Voraus wissen, auf welcher Seite des Meridians die Sonne beobachtet wurde, so können wir folglich über die

*) Hat man das Berliner astronomische Jahrbuch nicht zur Hand, so bedient man sich des Nautical Almanac oder der Connaissance des temps.

Bedeutung von $sin \frac{1}{2} a$ nie im Zweifel sein, ferner muss $\frac{1}{2} a$ immer $< 90°$ sein, und die Azimuthe müssen alsdann östlich oder westlich gezählt werden.

Hierauf nimmt man die halbe Summe aus den beiden Ablesungen am Horizontalkreise bei der ersten Lage des Verticalkreises und ebenso die halbe Summe der Ablesungen, welche in den beiden Beobachtungen bei der anderen Lage des Verticalkreises, am Horizontalkreise gemacht wurden; legt man alsdann zu dieser letzteren Halbsumme 180° hinzu, oder zieht 180° von ihr ab, im Falle sie 360° übersteigen sollte, so können wir das arithmetische Mittel aus der halben Summe der ersten beiden Ablesungen und der um 180° veränderten halben Summe der beiden anderen Ablesungen nehmen, welches wir $= A$ setzen wollen; alsdann ist offenbar $A \pm a$ die Mittelzahl für die genäherte Lage des Meridians, oder mit anderen Worten die Anzahl der Grade und Minuten auf dem Horizontalkreise, welche das Mittel der Ablesungen aus den Vernieren, die sich an diesem Kreise befinden, zeigen müsste, wenn die optische Achse des Instruments genähert die Ebene des Meridians beschriebe. Das Azimuth ist hier von Norden aus nach beiden Seiten des Meridians gezählt, und wenn die Theilung auf dem Horizontalkreise von links nach rechts wächst, so muss man (+) für die nachmittägigen und (—) für die vormittägigen Beobachtungen brauchen.

Wünscht man ausserdem noch das Chronometer zu berichtigen, so nimmt man das arithmetische Mittel aus den bei den einzelnen Beobachtungen aufgeschriebenen Zeitangaben; und es sei dieses Mittel $= T$, der entsprechende Stundenwinkel des Sonnencentrums aber $= 15\,t$ in Graden, so wird:

$$sin\ 15\,t = \frac{sin\ a\ sin\ z}{cos\ \delta} \text{ oder } cos\ \frac{15\,t}{2} = \sqrt{\frac{cos\ q\ cos\ (q - z)}{cos\ \varphi\ cos\ \delta}}$$

Diese letztere Formel wird alsdann vorzüglich gebraucht, wenn $15\,t$ nahe an 90° ist. Wenn nun die Beobachtungen Nachmittags angestellt werden, so wird t die wahre Sonnenzeit selbst ausdrücken; wenn aber die Beobachtungen des Vormittags

gemacht worden sind, so wird die wahre Sonnenzeit $= 24^h - t$ sein; nimmt man darauf den Unterschied zwischen T und dieser berechneten wahren Sonnenzeit, so erhält man dadurch die Chronometercorrection in Beziehung auf wahre Sonnenzeit.

Beispiel. In Stawropol, dessen genäherte nördliche Breite $\varphi = 45° 3'$, und östliche Länge von Greenwich $l = 2^h 48^m$ ist, wurde das Instrument in den Meridian durch folgende Beobachtungen am 9. Januar 1837 gestellt:

		Ablesung am Verticalkreise:	Ablesung am Horizontalkreise:
	I. Verticalkreis links.		
Beobachteter Rand der Sonne	*unterer*	280° 42',0	340° 36',5
	oberer	281 55,0	341 17,5
	II. Verticalkreis rechts.		
Beobachteter Rand der Sonne	*oberer*	77° 20',0	158° 13',5
	unterer	77 29,5	159 21,0

Quecksilberhöhe im *Barometer* = 320,40 Pariser Linien, Ablesung am *äusseren Thermometer* = + 0°,3 Reaumur.

Die genäherte wahre Sonnenzeit der Mitte der Beobachtungen kann man ungefähr $= 21^h 20^m$ annehmen, die entsprechende Greenwicher Zeit war also 1837 Januar $9^d 18^h 32^m$, und hierfür findet man aus dem Nautical Almanac die Declination des Sonnencentrums $\delta = -21° 59'$ d. h. südlich. Der Ort des Zeniths war = 359° 58',7 am Verticalkreise, und aus unseren Beobachtungen findet man folgende scheinbare Zenithdistanzen der Sonne:

Unterrand ⊙ . .	79° 16',7	Oberrand ⊙ . .	= 77° 21',3
Oberrand ⊙ . .	78 3,7	*Unterrand* ⊙ . .	= 77 30,8

arithmetisches Mittel der scheinbaren Zenithdistanzen des ⊙ Centr.		= 78° 3',2
Strahlenbrechung minus Parallaxe		= 4,3
Wahre Zenithdistanz des ⊙ Centrums . . .	z	= 78° 7',5
Breite	φ	= 45 3,0
Declination des Sonnencentrums	δ	= −21 59,0
Summe	$2q$	= 101° 11',5

$\log \cos q$ . . $= 9{,}80263$ . . . . $q = 50^\circ 35',7$
$\log \sin (q - \delta) = 9{,}97961$ . . . . . . $q - \delta = 72\ 34,7$
$comp. \log \cos \varphi = 0{,}15089$
$comp. \log \sin z = 0{,}00940$
Summe $= 19{,}94253$
Halbe Summe $= 9{,}97127$ . . $\sin \frac{a}{2}$. $\frac{1}{2} a = 69^\circ 23',2$

$a = 138^\circ 46'4$ = Nordöstliches Azimuth der Sonne.

Halbe Summe der Ablesungen am Horizontalkreise:

I. *Beim Verticalkreis links:* II. *Beim Verticalkreis rechts:*

$340^\circ 57',0$ $158^\circ 47',2$

$$A = \frac{340^\circ 57',0 + (180^\circ + 158^\circ 47',2)}{2} = 339^\circ 52',1$$

Azimuth a (*östliches*) . . . . $= -138\ 46,4$
Ort des Meridians am Horizontalkreise $= 201^\circ\ 5',7$ *von Norden.*

Wenn man daher den oberen Theil des Instruments so stellt, dass das Mittel der Vernierablesungen am Horizontalkreise $= 201^\circ 5',7$ ist, so wird das Instrument genähert in den Meridian eingestellt sein.

Wenn man nun noch das Azimuth irgend eines beliebigen terrestrischen Gegenstandes bestimmt hätte, so könnte man leicht mittelst dieses letzteren das Instrument auch in der Folge in den Meridian stellen. Desshalb muss man vor dem Anfange und nach der Beendigung der oben erwähnten Beobachtungen das Fernrohr auf diesen Gegenstand richten, indem man ihn dabei so in die Mitte zwischen die beiden Horizontalfäden stellt, dass er von dem mittleren Verticalfaden in zwei Hälften getheilt wird. Man liest darauf die Angabe der Verniere am Horizontalkreise in beiden Lagen des Verticalkreises ab. Auf diese Weise wurde nun der westliche Gipfel des Berges Elbruz aus Stawropol beobachtet, und es wurden dabei folgende Mittelzahlen für die Angaben der Verniere am Horizontalkreis gefunden:

I. *Verticalkreis links* II. *Vertikalkreis rechts*

$10^\circ 12',5$ $190^\circ 12',0$

Zieht man nun von dieser letzteren Ablesung $180^\circ 0',00''$ ab, so

wird sie $= 10° 12',0$, und alsdann ist das arithmetische Mittel, zwischen $10° 12',5$ und $10° 12',0$, sehr nahe $= 10° 12',2$; bei unserem Instrumente nahm die Theilung auf dem Horizontalkreise von links nach rechts zu, oder von Norden nach Osten, so dass folglich das nordöstliche Azimuth der Spitze des Elbruz $= (360° + 10° 12',2) - 201° 5',7 = 169° 6',5$ wird, welcher Werth bis auf $1'$ mit dem genauen Azimuthe übereinstimmte, welches aus einer anderen Beobachtungsreihe gefunden wurde.

Um die vorläufige Berichtigung des Chronometers zu ermitteln, wurde der Stundenwinkel der Sonne berechnet; und man findet nun leicht aus irgend einer der beiden angegebenen Formeln, dass bei der Mitte der Beobachtungen der östliche Stundenwinkel der Sonne $= 2^h 56^m 16^s$ in Zeit war; folglich wird alsdann die wahre Sonnenzeit $= 21^h 3^m 44^s$ werden, und vergleicht man diese mit dem arithmetischen Mittel aus den bei unseren vier Beobachtungen bemerkten Chronometer zeiten, so erhält man dadurch die genäherte Chronometercorrection in Bezug auf wahre Sonnenzeit.

58. 2. Methode. Wenn man die Chronometercorrection und auch den Gang des Chronometers gegen Sonnen- oder Sternzeit schon kennt, so kann man dadurch leicht berechnen, welche Zeit das Chronometer bei dem Meridiandurchgange irgend eines Fundamentalsterns angeben müsste; richtet man darauf das Fernrohr auf die Meridianzenithdistanz des Sterns $= \varphi - \delta$ oder $\delta - \varphi$, wo δ die Declination des Sterns und φ die Breite des Beobachtungsorts bezeichnet, so kann man einige Minuten vor dem vorläufig berechneten Eintritte des Sterns in den Meridian, den oberen beweglichen Theil des Instruments zuerst mit der Hand bewegen, bis der Stern nahe am verticalen Mittelfaden steht. Alsdann schraubt man den oberen Theil des Instruments durch die Klemmschraube ganz fest, und kann darauf durch die Wirkung der Mikrometerschraube den Stern immer bis zu dem vorausberechneten Augenblicke der Meridianpassage mit dem verticalen Mittelfaden in Berührung

halten, in welchem Augenblicke man mit der Drehung der Mikrometerschraube aufhört. Will man statt eines Sterns die Sonne beobachten, so berechnet man sich den Durchgang des Sonnencentrums durch den Meridian im Voraus (d. h. die Chronometerzeit im wahren Mittag); zieht man alsdann die erhaltene Zeit, die Grösse $\mu . \frac{r \sec \delta\odot}{15}$ ab, wo r der Halbmesser der Sonne in Bogen, $\delta\odot$ die Declination des Sonnencentrums, und μ das Verhältniss einer Chronometersecunde zu einer Secunde wahrer Zeit ist, so erhält man die Zeit des Eintritts des westlichen Sonnenrandes in den Meridian, und legt man zum wahren Chronometermittag den Werth $\mu . \frac{r \sec \delta\odot}{15}$ hinzu, so findet man dadurch den Meridiandurchgang des östlichen Sonnenrandes.

Gut ist es, das Instrument zuerst nach dem westlichen Rande aufzustellen, und alsdann diese Aufstellung nach dem östlichen zu berichtigen.

Uebrigens kann man ebenso auch das Instrument in den Meridian einstellen, wenn man den Durchgang eines Sterns, oder auch beider Ränder der Sonne durch die Verticalfäden, bei der Aufstellung des Instruments ausserhalb des Meridians beobachtet; hierzu ist es nur nöthig, aus diesen Beobachtungen, für deren Zeiten der Stundenwinkel des Sterns bekannt ist, da die Chronometercorrection als genähert bekannt angenommen wird, und zugleich aus der Breite des Beobachtungsorts und der Declination des Sterns, das Azimuth des Sterns nach den Formeln (2), (3) oder auch nach (6), (7) § 6, S. 17 zu berechnen, und darauf das Instrument so in den Meridian einzustellen, wie wir es oben gezeigt haben. Um den Einfluss des Fehlers im Stundenwinkel auf die Berechnung des Azimuths zu eliminiren, (welcher Fehler im Stundenwinkel bedeutend werden kann, wenn das Chronometer schlecht berichtigt ist), muss man einen Stern in der Nähe des Pols des Aequators, vorzüglich aber den Polarstern (*a Ursae minoris*) selbst, beobachten; weil dessen Azimuth sich sehr

langsam mit der Zeit ändert, und deswegen ein Fehler im Chronometer nur sehr geringen Einfluss bei der Einstellung des Instruments in den Meridian, oder in irgend eine andere bestimmte Verticalebene durch diesen Stern ausübt. Wenn der Beobachter beabsichtigt, während mehrerer Tage an demselben Orte zu verbleiben, so ist es sehr zweckmässig, sich eine kleine Ephemeride für den Polarstern, nach den Formeln:

$$tg\,a = \frac{\sin t}{\cos\varphi\, tg\,\delta - \cos t \sin\varphi} \text{ und } \sin z = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin a}$$

anzufertigen, wo φ die Breite des Beobachtungsortes, δ die Declination des Sterns, a das von Norden aus gezählte Azimuth, z die wahre Zenithdistanz des Sterns, und t den Stundenwinkel des Sternes in Graden bedeutet; dann ist also $\frac{t}{15}$ der in Zeit ausgedrückte Stundenwinkel. Diese Ephemeride berechnet man sich unmittelbar für jede 30^m in Zeit, vom Stundenwinkel 0^h an bis zu 12^h; alsdann kann man durch Interpolation das Azimuth a und die Zenithdistanz z für jede 10^m in Zeit einschalten; die Stundenwinkel von 12^h bis 24^h entsprechen ganz denselben Oertern des Sterns auf der Ostseite des Meridians, wie die Stundenwinkel von 12^h rückwärts bis 0^h auf der Westseite. Es versteht sich von selbst, dass der Beobachter die Ephemeride nur für diejenigen Stunden zu berechnen braucht, während welcher er Beobachtungen zu machen beabsichtigt. Zur bequemeren Berechnung des Azimuths des Polarsterns hat Struve eine besondere Tafel construirt, welche am Ende dieses Werkes angegeben und zugleich so eingerichtet ist, dass sie die für die jetzige Zeit geltende Lage dieses Sterns zur Grundlage hat.

Stellt man das Fernrohr auf die Zenithdistanz des Polarsterns ein, und bringt dann durch die Drehung des ganzen beweglichen Theiles des Instruments, das Fernrohr in das Azimuth dieses Sternes, so wird man ihn im Gesichtsfelde des Fernrohrs erblicken*); darauf muss man mit Hülfe der Mikrometerschraube

*) Um den Stern des Nachts bequem zu finden, muss man das Fernrohr,

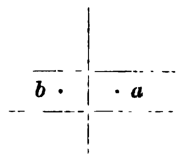
dem Fernrohre eine solche Richtung gegeben, dass das Bild des Sterns genau mit dem Mittelverticalfaden zusammenfällt, und zwar muss dieses nahezu in der Mitte zwischen beiden Horizontalfäden geschehen. Liest man die Chronometerzeit im Moment dieser Beobachtung ab, und die Verniere am Horizontalkreise ebenfalls, so kann man alsdann die der Chronometerzeit entsprechende Sternzeit $= S$ berechnen, wodurch der Stundenwinkel des Sterns $= S - AR$ bekannt wird (hier bezeichnet AR wie früher die gerade Aufsteigung des Sterns in Zeit); mit diesem Winkel findet man aus der vorherberechneten Ephemeride das Azimuth des Sternes zur Zeit der Beobachtung, und dann wird es leicht sein, den Ort des Meridians auf dem Horizontalkreise zu bestimmen, und das Fernrohr in jede beliebige Verticalebene einzustellen.

---

auf die gehörige Zenithdistanz einstellen, und nach dem Augenmasse in die Verticalebene des Sterns bringen; sollte alsdann der Stern noch nicht im Gesichtsfelde erscheinen, so braucht man nur den oberen Theil des Instruments langsam hin und her zu bewegen, bis man den Stern in der Mitte der Gesichtsfeldes erblickt. Wenn man aber den Stern bei Tage aufsucht, so muss zuerst das Instrument mit Hülfe des Niveaus richtig aufgestellt werden § 51, S. 110); alsdann muss man das Fernrohr auf einen terrestrischen Gegenstand, dessen Azimuth schon bekannt ist, richten und die Verniere am Horizontalkreise ablesen; legt man zu dieser Ablesung das nordwestliche Azimuth des Gegenstandes hinzu, oder zieht das nordöstliche Azimuth desselben davon ab, so erhält man den Ort des Meridians auf dem Horizontalkreise des Instruments. Bewegt man nun den oberen Theil des Instruments, vom Orte des Meridians ab, dem Sterne um so viel zu, als das Azimuth des Sterns beträgt, so wird das Fernrohr dadurch in die Verticalebene des Sterns gelangen, und man braucht dann nur das Fernrohr durch den Verticalkreis auf die gehörige Zenithdistanz einzustellen, um den Stern, wenn er überhaupt hell genug ist, sogleich im Gesichtsfelde des Fernrohrs zu erblicken. Sterne erster und zweiter Grösse, die hoch über dem Horizonte stehen, wird man in unserem beschriebenen Instrumente bei Tage zu jeder Zeit stets sehen können; sowie auch beinahe immer den Polarstern, ausser in dem Falle, wenn die Zeit der Beobachtung sehr nahe am Mittag ist.

Von der Art und Weise, wie man den Durchgang eines Sterns durch die Fäden beobachten muss.

59. Ist das Fernrohr in den Meridian eingestellt, so kann man nach einiger Uebung den Durchgang eines dem Aequator nahen Sterns durch jeden der Verticalfäden mit einer Genauigkeit von 0,1 Secunde in Zeit wahrnehmen; aber diese Schätzung der Bruchtheile der Secunde hängt sowohl vom Ohre als auch vom Auge ab. Wir wollen nun zuerst annehmen, dass man diese Durchgänge nach einer Uhr beobachtet, deren Pendelschläge ganze Secunden angeben. Ehe der Stern den Faden erreicht, sieht man nach der Uhr, und zählt die Secunden im Kopfe mit den Schlägen der Uhr fort, indem man zugleich die Bewegung des Sterns in der Mitte zwischen den beiden Horizontalfäden des Fernrohrs verfolgt. Meistens wird man bemerken, dass bei einem gewissen Pendelschlage der Stern noch vor dem Faden sich befindet; bei dem folgenden Schlage aber schon durch den Faden gegangen ist. Behält man im Gedächtnisse, wie der Stern genau bei diesen Schlägen vor dem Faden und jenseits desselben stand, so kann man die beiden Intervalle nach Augenmass mit einander vergleichen und dadurch auf den Secundenbruch schliessen, welchen man zu den vor dem Antritte an den Faden gezählten Secunden zulegen muss, um die genaue Zeit des Durchgangs zu erhalten. Wir wollen z. B. annehmen, dass wir 33^s zählten, als der Stern vor dem Faden in a (siehe folgende Figur)



war, und dass bei dem 34. Secundenschlage der Stern jenseits des Fadens in b stand; nach Augenmass geschätzt, verhält sich nun der Abstand des Fadens von a zu seinem Abstande von b

wie 2 : 3 = 4 : 6; und da die Summe beider Abstände des Sterns vom Faden in einer Secunde durchlaufen worden ist, so muss bei 33″,4 Uhrzeit der Stern durch den Faden gegangen sein.

Bei Chronometern schlägt die Unruhe gewöhnlich Bruchtheile von Zeitsecunden, z. B. $0^s,33$; $0^s,4$ oder $0^s,5$; in diesem Falle verfährt man beim Beobachten auf folgende Weise: wenn die Chronometerschläge sich nach jeder halben Secunde wiederholen, so lässt man regelmässig einen Schlag um den andern weg und zählt nur die vollen Secunden; dann kann man die Sterndurchgänge ebenso beobachten, wie wir vorhin gezeigt haben. Entspricht aber jeder Chronometerschlag einem Theile der Secunde, der von $0^s,5$ verschieden ist, so zählt man mit dem Chronometer fort, und fängt alsdann in demjenigen Augenblicke Null zu zählen an, wenn der Stern so nahe vor dem Faden ist, dass bei dem darauffolgenden ersten Schlage er schon durch den Faden gegangen ist; bemerkt man ausserdem die beiden Orte des Sterns vor und hinter dem Faden, oder bei dem nullten und ersten Schlage des Chronometers, und zählt die Schläge weiter fort, bis man die Angabe auf dem Chronometer bei einer runden Secunde abliest, so muss man alsdann die gezählten Schläge und Bruchtheile des Schlages von der abgelesenen Angabe abziehen, um die Zeit des Durchgangs zu erhalten. Hierbei wird der Bruch nach dem Augenmasse geschätzt, wie eben erwähnt ist. Auf diese Weise kann man den Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Chronometerschlägen in vier Theile theilen. Wenn z. B. das Chronometer $0^s,4$ schlägt und wir erhalten den Durchgang des Sterns durch den Faden = $5^h\,10^m\,20^s - 6\frac{3}{4}^{\text{Schläge}}$, so muss der Stern genau um $5^h\,10^m\,20^s - 2^s,7 = 5^h\,10^m\,17^s,3$ Chronometerzeit durch den Faden gegangen sein.

Auf ähnliche Weise bemerkt man auch die Zeit am Chronometer bei jeder anderen astronomischen Beobachtung. Die Anzahl der Theile, welche zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schlägen eines

Chronometers enthalten sind, können wir dadurch bestimmen, dass wir die Anzahl der Schläge zählen, welche in dem Zeitraume enthalten sind, in dem der Secundenzeiger zwei aufeinanderfolgende Male mit der Secundentheilung auf dem Zifferblatte genau zusammenfällt; noch sicherer ist es, die Schläge während einer ganzen Minute fortzuzählen und dadurch den Werth eines Schlages zu bestimmen. Bei einigen Chronometern ist der Secundenzeiger etwas excentrisch auf dem Kreise befestigt, an dessen Umfange die Secundentheilung durch Punkte oder Striche angebracht ist; bei solchen Chronometern werden in Folge der Excentricität, gleiche Bewegungen des Zeigers nicht gleichen Theilen des Umfanges entsprechen, mithin also auch ein Fehler in der Angabe des Chronometers enthalten sein; in diesem Falle muss man sich eine kleine Tabelle zur Correction der Chronometerangaben entwerfen. Desshalb zählt man die Schläge von derjenigen Zeit an, wann der Zeiger 0^s bis zu den Zeiten, wo er 10^s, 20^s, 30^s, 40^s, 50^s und 60^s zeigt, oder überhaupt bis zu einer jedesmaligen vollen Zahl von Secunden; weiss man alsdann den Bruch der Secunde, welchen das Chronometer schlägt, so kann man die gezählten Schläge in Secunden und Theile einer Secunde verwandeln, und auf diese Weise die entsprechenden Berichtigungen bei den verschiedenen Angaben des Zeigers erhalten.

Die Ungenauigkeit der beobachteten Zeit des Durchgangs eines Sterns durch den Verticalfaden hängt im Allgemeinen von drei Ursachen ab: 1) vom Gehörfehler, welcher bei demselben Beobachter für jeden beobachteten Stern constant bleibt, und den wir durch a bezeichnen wollen; 2) vom Zustande der Unruhe der Bilder oder vom Zittern der Sterne und 3) vom Gesichts- oder Schätzungsfehler. Bezeichnet man nun durch b und c, in Theilen einer Zeitsecunde, die durch das Zittern der Sterne und durch die Ungenauigkeit des Augenmasses entstandenen Fehler, so ist b für alle Fernröhre derselbe, und in der Nähe des Horizonts am grössten; der

Schätzungsfehler c aber wird desto kleiner, je mehr das Fernrohr vergrössert; sonst nimmt der Einfluss dieser beiden Fehler mit der Langsamkeit der Bewegung des Sterns oder mit der Secante der Declination desselben zu, und wird auch desto grösser, je schiefer der Declinationsparallel des Sterns den Verticalfaden durchschneidet; er wächst also auch mit der Cosecante des Winkels, welchen der Verticalfaden mit der Bewegung des Sterns macht. Hieraus folgt, dass der Einfluss, den b und c auf die Beobachtung des Durchgangs eines Sterns durch den Verticalfaden ausüben kann, sich überhaupt durch: $\pm\, b.sec\,\delta\, sec\, q$ und $\pm\,\frac{n}{m}\cdot c.sec\,\delta\, sec\, q$ ausdrücken lässt; wo δ die Declination des Sterns bedeutet; q den Winkel zwischen dem Declinationskreise und dem Höhenkreise des Sterns; n die Vergrösserungskraft desjenigen Fernrohrs, für welches man den numerischen Werth von c bestimmt, oder durchschnittlich angenommen hat; m die Vergrösserung eines anderen Fernrohrs, mit dem man beobachtet; und $15b$ und $15c$ können dabei als Bögen eines grössten Kreises, auf welchem die Fäden senkrecht stehen, betrachtet werden. Die Zeichen $\pm$ bleiben unbestimmt, weil man nicht im Voraus wissen kann, auf welcher Seite die Fehler liegen, alsdann aber erhält man nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung für den wahrscheinlichen Fehler w des Durchgangs folgenden Ausdruck:

$$w = \sqrt{a^2 + \left\{b^2 + \frac{n^2}{m^2}\cdot c^2\right\} sec^2\,\delta\, sec^2 q}$$

Interessante hierher gehörige Bemerkungen von Bessel kann man im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1823, S. 166 nachlesen.

Ist das Fernrohr im Meridiane aufgestellt, so ist $q = 0$ oder $= 180°$; mithin $sec\, q \pm 1$, und die Genauigkeit des beobachteten Durchgangs grösser als in jedem anderen Verticale, was auch daraus erhellt, dass in diesem Falle der Stern die Verticalfäden senkrecht durchschneidet und sich am schnellsten vom Faden entfernt. Als Beispiel wollen wir $a = 0^s{,}07$; $b = 0^s{,}03$

und c, bei einer 180maligen Vergrösserung $= 0^s{,}02$ annehmen, und die wahrscheinlichen Fehler der Durchgänge der Sterne von verschiedenen Declinationen durch die Verticalfäden zweier, im Meridiane aufgestellten Fernröhre berechnen, von denen das eine 180, das andere 30mal vergrössert. Wir finden bei der

Declination δ	Fehler bei Vergrösserung $= 180$	Fehler bei Vergrösserung $= 30$	Verhältniss der Fehler
0° 0′	. . 0^s079	0^s142 . .	1 : 1,8
30 0	. . 0,081	0,159 . .	1 : 2,0
60 0	. . 0,100	0,257 . .	1 : 2,6
80 0	. . 0,219	0,716 . .	1 : 3,3
88 27	. . 1,335	4,573 . .	1 : 3,4

Also für Sterne von 0° bis 40° Declination gewährt die sechsmalige stärkere Vergrösserung nur eine doppelte Sicherheit des Durchgangs; bei dem Polarstern nur eine dreiundeinhalbfache.

Bestimmung des Abstands der Seitenfäden vom Mittelfaden.

60. Um die Beobachtungen vervielfältigen zu können, spannt man gewöhnlich 5 oder 7 Verticalfäden im Brennpunkte des Fernrohrs auf. Wenn man sich nun zwei auf die Mitte des Objectivs einfallende Strahlen denkt, die nach dem Seitenfaden und dem Mittelfaden gehen, und diese beiden Verticalfäden in der Mitte zwischen beiden Horizontalfäden durchschneiden, oder im Falle eines gebrochenen Fernrohrs von der spiegelnden Fläche des Prismas reflectirt, zu den genannten Verticalfäden gelangen, so werden sie die Richtungen zweier, durch bestimmte Punkte des Seiten- und Mittelfadens gehenden Gesichtslinien darstellen.

Der Winkel zwischen diesen beiden Gesichtslinien heisst der Fadenabstand; er ist also der Winkel zwischen den Achsen der einfallenden Strahlenkegel, durch welche die mit den Seiten- und Mittelfäden zusammenfallenden Bilder erzeugt werden. Die Grösse solcher Winkel kann man entweder mit Hülfe von Winkelmessinstrumenten nach der Gauss'schen Methode bestimmen, oder auch durch astronomische Beobachtungen ermitteln.

1. Methode nach Gauss. Aus der Theorie des astronomischen Fernrohrs ist es bekannt, dass, wenn ein leuchtender Punkt sich in dem Hauptbrennpunkte des Objectivs befindet, alsdann auch die von jenem Brennpunkte auf die Objectivlinse einfallenden divergenten Strahlen aus dieser Linse, parallel der Linie, welche die Mitte des Objectivs mit dem Brennpunkte verbindet, austreten werden. Wenn man also das Ocularende des Fernrohrs gegen das Tageslicht wendet, und in der Nähe einen Theodoliten so aufstellt, dass das Objectiv seines Fernrohrs auf das Objectiv des Durchgangsinstruments gerichtet ist, und die optischen Achsen beider Fernröhre nahezu zusammenfallen, so werden die Strahlen, welche von jedem, im Brennpunkte des Durchgangsrohrs befindlichen Faden ausgehen, nach ihrem Durchgange durch die Objectivlinse untereinander parallel auslaufen, das Objectiv des Theodolitenrohrs treffen und im Brennpunkte dieses letzteren das Bild des erwähnten Fadens erzeugen. Daher wird man im Gesichtsfelde des Theodolitenfernrohrs das Fadennetz des Durchgangsinstruments deutlich sehen können, und folglich auch die Winkelabstände zwischen dem Mittelfaden und den Seitenfäden jenes Netzes mit Hülfe des Theodoliten auf dieselbe Weise messen können, wie man überhaupt Winkel misst.

Das gegen das Licht gewendete Ocular bringt keine andere Wirkung hervor, als dass es das Licht auf die Fäden fallen lässt, und wird also nur desshalb auf dem Fernrohre beibehalten, damit die Fäden nicht staubig werden; je schwächer seine Vergrösserung ist, desto mehr Licht gelangt zu den Fäden. Es ist vortheil-

haft, wie Herr Professor Knorre bemerkt, den Theodoliten und das Durchgangsinstrument auf denselben Tisch zu stellen, welcher nicht einmal absolut fest zu stehen braucht, wenn nur die Tischplatte solide genug ist, um keine veränderliche Biegung derselben während der Winkelmessung befürchten zu müssen. Da man nach der Gauss'schen Methode nicht den Fadenabstand selbst, sondern die Projection desselben auf den Horizont bestimmt, so ist es nöthig, um daraus den Fadenabstand zu berechnen, die Neigung des Theodolitenfernrohrs gegen den Horizont zu kennen; in unserem Falle sind nun die Winkel sowohl, als ihre Projectionen sehr klein, und wenn wir den Fadenabstand durch F, seine unmittelbar gemessene Projection durch F', die Neigung der Gesichtslinie durch h, oder die Zenithdistanz des durch das Theodolitenfernrohr gesehenen Netzes des Passageninstruments durch z bezeichnen, so erhält man mit hinlänglicher Genauigkeit:

$$F = F' \cos h = F' \sin z;$$

z kann man aus der Ablesung auf dem Verticalkreise des Theodoliten oder des Durchgangsinstruments ableiten; dazu ist es nur nöthig, den Ort des Zeniths auf diesem Kreise zu kennen.

Beispiel. Nach dieser Methode wurden die Fädenabstände bei einem kleinen Ertel'schen Universalinstrumente mit Hülfe eines andern ähnlichen Instruments durch mehrere Mal wiederholte Versuche bestimmt; da nun das, zur Messung der Winkel angewandte Instrument nicht nach der Repetitionsmethode eingerichtet war, so bestand jede einzelne Bestimmung: 1) in einer Einstellung auf den Mittelfaden, 2) in einer Einstellung auf den Seitenfaden und 3) in einer neuen Einstellung auf den Mittelfaden. Hierbei wurden jedesmal die Verniere am Horizontalkreise abgelesen und mittelst eines Versicherungsrohrs die unveränderte Lage des Winkelmessinstruments geprüft.

Horizontaler Abstand des Mittelfadens (des 4. im Netze).

Vom	I. Seitenfaden	16′ 43″,0	Neigung des Lichtstrahles gegen den Horizont = 8° 21′ = *h*.
„	II. „	12 20 , 0	*Beispiel der Berechnung für Faden I:*
„	III. „	8 2 , 0	
„	V. „	8 43 , 4	*log*(16′43″,0=1003″)=3,00130
„	VI. „	12 40 , 0	*log cos* 8° 21′ =9,99537
„	VII. „	17 1 , 5	*log* (16′ 32″,36) =2,99667

Hieraus folgen nun: die wahren Fädenintervalle in Bogen: 16′ 32″,4; 12′ 12″,1; 7′ 56″,9; 8′ 37″,8; 12′ 31″,9; 16′ 50″,7 oder 66^s,16; 48^s,81; 31^s,80; 34^s,52; 50^s,13; 67^s,38 in Zeit.

Die Ordnung der Fäden war eine solche, dass, wenn das Instrument sich im Meridiane befand und der Verticalkreis im Westen war, alsdann der Stern in seiner oberen Culmination zuerst an den ersten, dann an den zweiten Faden u. s. w. in erwähnter Reihenfolge tritt. Diese Methode braucht man vorzüglich in dem Falle, wenn schlechtes Wetter oder andere ungünstige Umstände es verhindern, folgende Methode anzuwenden:

2. Methode. Sie besteht darin, die Durchgangszeiten eines Sterns durch die Verticalfäden zu beobachten, und am bequemsten findet man die Fädenabstände, wenn das Fernrohr im Meridiane aufgestellt sei. Es sei nun der grösste Kreis PZS der Meridian (Fig. 23); S der Ort des Sterns zur Zeit seines Antritts an den verticalen Mittelfaden, welcher als in der Meridianebene liegend, angenommen wird; S' der Ort des Sterns bei seinem Antritte an einen Seitenfaden, und zwar müssen alle Antritte in denjenigen Punkten der Fäden beobachtet werden, welche in der Mitte des Raumes zwischen den beiden Horizontalfäden liegen. Der Bogen SS' ist dann ein Theil eines auf dem Meridiane in S senkrecht stehenden grössten Kreises der Sphäre; der Bogen SS' drückt also den Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden aus, welchen wir durch $15f$ bezeichnen wollen. Es sei nun P der Pol des Aequators, so wird in dem

bei S rechtwinkligen sphärischen Dreiecke PSS' die Seite $SS' = 15f$, $PS' = 90° - \delta$, wo δ die Declination des Sterns ist, und der Winkel $SPS' = 15l$, wo l die Sternzeit ausdrückt, welche zwischen dem Antritte des Sterns an den Mittel- und Seitenfaden verflossen ist; aus dem sphärischen Dreiecke PSS' folgt aber alsdann:

$$\sin 15f = \sin 15l . \cos\delta \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Der Winkel $15f$ ist immer sehr klein und übersteigt selten $15'$ in Bogen, folglich kann man anstatt $\sin 15f$ immer $15f \sin 1''$ setzen; dagegen wächst l immer zugleich mit der Zunahme der Declination, und kann bei Sternen, die nur anderthalb Grad vom Pole entfernt sind, sogar $38^m,2$ in Zeit oder $9°33'$ in Bogen betragen. Jedoch wird es immer ausreichen, wenn man annimmt, dass:

$$\begin{aligned}\sin 15\,l &= 15\,l \sin 1'' - \tfrac{1}{6}(15\,l \sin 1'')^3 + \quad . \quad . \quad . \\ &= 15\,l \sin 1'' - 15 \sin 1'' . 37{,}5 \sin^2 1''\, l^3\end{aligned}$$

folglich überhaupt:

$$f = l\cos\delta - 37{,}5 \sin^2 1'' . l^3 \cos\delta \quad . \quad . \quad (2)$$

Bei Sternen, deren Declination kleiner als 80° ist, kann man das letzte Glied auf der rechten Seite der Gleichung immer vernachlässigen. Wenn wir dieselben Bezeichnungen wie am Ende des § 59, S. 140 beibehalten, so kann man den wahrscheinlichen Fehler einer Bestimmung des Abstandes zweier Fäden durch Meridianbeobachtungen folgendermassen ausdrücken:

$$\sqrt{2} . \sqrt{a^2 \cos^2\delta + b^2 + \frac{n^2}{m^2} c^2}$$

Der Werth von l wird unmittelbar aus astronomischen Beobachtungen abgeleitet, indem man die Zeitintervalle zwischen dem Antritte des Sterns an den Mittelfaden und an die Seitenfäden mittelst des Chronometers beobachtet und in Sternzeit ausdrückt; desshalb muss auch der Gang des Chronometers gegen Sternzeit bekannt sein. Die Gleichung (2) zeigt uns, dass ein gewisser Fehler in l um so weniger Einfluss auf die Bestimmung von f ausübt, je grösser die Declination δ wird, und obgleich

wir wissen, dass mit der Annäherung der Sterne an den Pol die Beobachtungsfehler des Durchgangs zunehmen, so folgt doch, wie Herr Professor Knorre bemerkt, aus dem Ausdrucke des wahrscheinlichen Fehlers einer Bestimmung des Fadenstandes f, dass selbst bei Fernröhren, welche nur 30 bis 50 Mal vergrössern, ein einziger Durchgang des Polarsterns den Abstand f merklich genauer giebt, als der Durchgang eines Aequatorialsterns, vorausgesetzt, dass das Instrument völlig feststeht. Wenn das Instrument aber keine sehr feste Aufstellung hat, so wird man gezwungen, Sterne zu vermeiden, die sehr nahe am Pole liegen, wegen der zu langen Dauer der Beobachtungen, und der in dieser Zwischenzeit möglichen bedeutenden Aenderung in der Lage des Instruments. Sterne von 70° bis 80° Declinationen sind sehr bequem zur Bestimmung der Fädenabstände.

61. Gewöhnlich bezeichnet man die Fäden mit 1., 2., 3. u. s. w., in der Ordnung wie sie von einem Sterne bei der oberen Culmination durchlaufen werden, wenn dieser sich scheinbar von Osten nach Westen bewegt; bei der unteren Culmination gehen die Sterne in umgekehrter Ordnung durch die Fäden, indem ihre scheinbare tägliche Bewegung alsdann von Westen nach Osten ist, und treten zuerst an den letzten Faden und darauf an alle übrigen. Bei der Bezeichnung der Ordnung der Fäden muss man zugleich die Lage eines der beiden Enden der horizontalen Umdrehungsachse des Fernrohrs mit angeben; z. B. kann man hierzu das Ende der Achse wählen, an welchem der Höhenkreis befestigt ist, und die Ordnung der Fäden so angeben, dass dabei dieser Kreis sich im Westen umdrehte; bei jeder Beobachtung muss man alsdann immer die Lage angeben, in welcher sich der Kreis befand.

62. Folgendes Beispiel wird als Erläuterung zur Berechnung der Fädenintervalle dienen können.

Vom 26. Mai bis zum 13. Juni des Jahres 1843 wurden mehrere Male nach dem Chronometer Haut No. 19 die Durchgänge des Sterns ξ *Ursae minoris* durch die Verticalfäden eines

im Meridiane aufgestellten Instruments beobachtet. Aus vielen Beobachtungen fand man, dass bei der oberen Culmination und als der Höhenkreis des Instruments im Westen war, die Unterschiede der Zeiten zwischen den Antritten des Sterns an die Fäden:

III und I, III und II, IV und III, V und III, waren
$169^s,14$ $92^s,13$ $79^s,40$ $164^s,03$ Chronometerzeit.

Das Chronometer Haut No. 19 verspätete sich täglich um $2^s,50$ gegen Sternzeit, und folglich hat man für die oben angegebenen Differenzen in Sternzeit:

$I = 169^s,144$ . . $92^s,133$ . . $79^s,402$ . . $164^s,034$.

Zur Zeit der Mitte der einzelnen Beobachtungen, oder am 4. Juli 1843 war die Declination von ξ *Ursae minoris* $= 78°\ 16'25''$; multiplicirt man daher die vier zuletzt angegebenen Zahlen mit $\cos 78°16'25''$, so erhält man mit Hülfe einer logarithmischen Rechnung folgende, in Zeitsecunden ausgedrückte Fädenintervalle, bei Verticalkreis im Westen:

$f' = 34^s,381$; $f'' = 18^s,725$; $f^{IV} = 16^s,138$; $f^{V} = 34^s,338$.

Wenn die Umdrehungsachse umgelegt worden wäre, so würde die Reihenfolge der Fäden eine umgekehrte werden; das heisst der erste Faden würde alsdann mit dem mittleren (dritten), um $33^s,338$ in Zeit vorausgehen, der zweite darauf folgende dem Werthe $16^s,138$ entsprechen u. s. w.

Bei solchen Sternen, die sehr nahe am Pole sind, muss man die Declination recht genau kennen; z. B. beim Polarsterne, welche ungefähr $1°\ 30'$ vom Pole absteht, muss man die Declination bis auf eine halbe Bogensecunde genau wissen; wenn aber die Declination des beobachteten Sterns kleiner als 45° ist, so macht ein Fehler von $1'$ in Bogen in der Declination beinahe nichts aus.

Bestimmung des Collimationsfehlers.

63. Wir haben schon früher gezeigt, auf welche Weise man die optische Achse des Fernrohrs berichtigen kann; aber dessenungeachtet wird noch immer ein kleiner Fehler übrig bleiben, welcher darin besteht, dass die Hauptgesichtslinie, welche vom Objective aus nach dem verticalen Mittelfaden geht, etwas gegen die Senkrechte auf der horizontalen Umdrehungsachse des Fernrohrs geneigt sein wird; diese Neigung wird gewöhnlich der Collimationsfehler genannt. Man kann ihn auf mehrerlei Weisen, ähnlich denjenigen bestimmen, mittelst derer man die Fädenintervalle bestimmte.

I. Methode. Man stellt das Durchgangsinstrument und den Theodoliten auf feste Unterlagen, am besten auf denselben Tisch, und stellt beide Instrumente in horizontaler Lage mit Hülfe des Niveaus auf (§ 51, S. 110), indem man dabei ihre Objective gerade gegen einander wie in § 60, S. 142 kehrt. Darauf befestigt man die Druckschraube auf dem Horizontalkreise bei beiden Instrumenten, und richtet mittelst der Mikrometerschraube am Horizontalkreise des Theodoliten den Mittelverticalfaden dieses Instruments genau auf den Mittelfaden im Fernrohre des Durchgangsinstruments, indem man nachher die Angaben der Verniere am Horizontalkreise des Theodoliten abliest. Darauf legt man behutsam die horizontale Umdrehungsachse des Fernrohrs des Durchgangsinstruments auf ihren Zapfen um und bemerkt man nun, wenn man wieder durch das Fernrohr des Theodoliten sieht, dass der Mittelfaden in diesem Fernrohre nicht mit dem Mittelfaden im Fernrohre des Durchgangsinstruments zusammenfällt, so kann man daraus schliessen, dass der Lichtstrahl, welcher nach dem Mittelfaden des Durchgangsinstruments geht, nicht auf der horizontalen Umdrehungsachse seines Fernrohrs senkrecht steht; bringt man daher durch Hülfe der Mikrometerschraube am Horizontalkreise des Theodoliten, die Mittelfäden beider Instrumente zur Deckung, so kann man alsdann wieder von neuem die An-

gabe der Verniere am Horizontalkreise des Theodoliten ablesen, und erhält offenbar, indem man diese ebengemachte Ablesung von der früheren Ablesung abzieht, den doppelten Collimationsfehler des Lichtstrahls im Durchgangsinstrumente, oder den doppelten Winkel, welchen eine auf der horizontalen Umdrehungsachse des Fernrohrs senkrechte Linie mit dem Lichtstrahle bildet, der vom Objective nach dem Mittelfaden geht. Wenn die beiden Fernröhre etwas stark gegen den Horizont geneigt sind, so wird der Collimationsfehler gleich dem Producte des halben Unterschieds der Ablesungen mit dem Cosinus des Neigungswinkels des Fernrohrs gegen den Horizont sein. Diese Methode rührt von Bessel her.

II. Bohnenbergers Methode. Man richtet den Mittelverticalfaden eines Theodoliten auf einen recht deutlichen terrestrischen Gegenstand, und stellt darauf das Durchgangsinstrument zwischen diesem Gegenstande und dem Theodoliten so, wie in der 1. Methode auf; dann wird man durch eine Drehung am Horizontalkreise des letzteren Instruments seinen verticalen Mittelfaden mit dem verticalen Mittelfaden des Theodoliten genau zur Deckung bringen können; wenn man sich ferner überzeugt, dass der Theodolit seine Lage nicht geändert hat, so kann man die mit der Mikrometerschraube verbundene Klemme am Durchgangsinstrumente fest anziehen, und sein Fernrohr so um die horizontale Umdrehungsachse um 180° herumbewegen, dass es auf den Gegenstand gerichtet ist. Findet man nun, dass der mittlere Verticalfaden am Durchgangsinstrumente mit dem Gegenstande zusammenfällt, so ist dieses ein Beweis, dass der Lichtstrahl, welcher auf den Mittelfaden fällt, wirklich auf der horizontalen Umdrehungsachse senkrecht steht; sollte dieses aber nicht stattfinden, und daher der mittlere Verticalfaden sich in einer gewissen Entfernung vom Bilde des Gegenstandes befinden, so misst man diese Entfernung und nimmt ihre Hälfte, wodurch denn der gesuchte Collimationsfehler erhalten wird.

Diese Methode ist immer zu empfehlen, wenn beide Instrumente sich sehr fest aufstellen lassen. Man kann aber auch besonders bei dem Gebrauche kleiner Instrumente den Collimationsfehler aus astronomischen Beobachtungen auf folgende Weise bestimmen.

64. III. Methode. Man stellt das Instrument so auf, wie wir es § 51, S. 110 angegeben haben, und führt es darauf in den Meridian (§ 57, S. 132), indem man zugleich die Druckschrauben *h*, *h* am Horizontalkreise (Fig. 1, Taf. II) fest anzieht. Die Sterne, deren Declinationen nicht kleiner als 70° sind, bewegen sich so langsam, dass, nachdem man den Durchgang eines solchen Sterns durch die zwei ersten Verticalfäden beobachtet hat, man noch recht gut die horizontale Achse des Instruments umlegen kann, ehe noch der Stern den dritten oder vierten Faden erreicht. Wenn alsdann der Verticalkreis des Instruments zuerst z. B. nach Osten gewendet war, so wird er nach der Umlegung der horizontalen Achse nach Westen gewendet sein müssen, und desshalb werden die Fäden, welche vorher die ersten waren, sich nunmehr auf der anderen Seite des Meridians befinden und die letzten Fäden bilden; durch diese Fäden beobachtet man daher wiederum, sogleich nach der Umlegung, den Durchgang des Sterns, und wenn der Stern sich recht langsam bewegt, so kann man ebenfalls die Zeit des Antritts des Sterns an den Mittelfaden bei dieser neuen Lage der Achse beobachten.

Da man nun schon die Abstände der Seitenverticalfäden vom Mittelfaden kennt, so kann man alle beobachteten Antritte auf dem Mittelfaden reduciren*); es sei nun τ die arithmetische

*) Aus Gleichung (2) (§ 60, S. 145) findet man, wenn der Unterschied zwischen der Sternzeit des Durchgangs an den Seiten- und Mittelverticalfaden im Meridiane $= l$ ist, alsdann auch $l = f \sec\delta + 37{,}5 f^3 \sec^3\delta \sin^2 1''$.

Mittelzahl der nach Chronometerzeit beobachteten und auf den Mittelfaden reducirten Antritte eines Sterns an den Seitenfäden, bei der ersten Lage des Instruments, oder als der Verticalkreis nach Osten gewendet war; ebenfalls bezeichne τ' dasselbe für die zweite Lage des Instruments, oder als der Verticalkreis nach Westen gedreht war; wir wollen dabei annehmen, dass τ' grösser als τ sei, und durch δ die Declination des Sterns bezeichnen, durch $15\,c$ aber den östlichen Abstand des Mittelverticalfadens von einem grössten Kreise der Himmelskugel der senkrecht auf der horizontalen Umdrehungsachse des Fernrohrs steht; nehmen wir nun endlich an, dass der erwähnte Kreis der Meridian selbst, und der Stern in der oberen Culmination war, so kann man ebenso wie in § 60, S. 145 schliessen, und erhält alsdann:

$$\tau'-\tau = 2\,\mu.c.sec\,\delta, \text{ oder } c = \frac{1}{\mu}.\frac{(\tau'-\tau)}{2}\,cos\,\delta, \text{ wo } \mu = \frac{24^h+s}{24}$$

ist, und s = Voreilung des Chronometers gegen Sternzeit in 24 Stunden bezeichnet.

Hierbei haben wir vorausgesetzt, dass während der Zeit der Umlegung das Instrument keine Veränderung erlitten hatte, und dass die Zapfen der horizontalen Umdrehungsachse gerade Kreiscylinder von gleichem Durchmesser waren. Eine Ungleichheit der Zapfen bringt eine eben solche Wirkung hervor, wie wenn die Neigung der Umdrehungsachse gegen den Horizont sich geändert hätte. Um überhaupt den Einfluss der Neigung ($= 15\,i$) der horizontalen Achse des Fernrohrs auf die Zeit des Durchgangs eines Sterns durch den verticalen Mittelfaden zu bestimmen, sei ZSH der Verticalkreis (Fig. 24, Taf. I), H der Punkt des Verticalkreises, der vom Horizonte durchschnitten wird, Z das Zenith, P der Pol des Aequators. Wir wollen nun annehmen, dass der Lichtstrahl, welcher nach dem Mittelverticalfaden geht, wenn die Umdrehungsachse des Fernrohrs horizontal wäre, die Ebene ZSH beschreiben würde; aber wegen der Neigung dieser Achse $= 15\,i$ wollen wir annehmen, dass der eben erwähnte

Lichtstrahl die Ebene HQ beschreibt, die vom Zenithe um den Bogen $ZQ = 15\,i$ absteht, welcher Bogen ZQ auf HQ senkrecht steht; der Stern tritt an den Kreis HQ in S' und geht durch den Vertikal ZH in S, und der Winkel $SPS' = 15\,k$ bestimmt den Einfluss k, der durch die Wirkung der Neigung der Umdrehungsachse auf die Zeit des Durchgangs durch die Fäden hervorgebracht wird. Es sei die Zenithdistanz $ZS = z$, $ZS' = z'$; so kann man im Laufe der sehr kleinen Zeit k die Aenderung der Zenithdistanz, oder $z' - z$ durch Differenziation der Formel (1), § 6, S. 17 in Bezug auf z und den Stundenwinkel t bestimmen; setzt man $dz = z' - z$ und $dt = 15\,k$, so wird:

$$\tfrac{1}{15}(z' - z) = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin t}{\sin z} \cdot k = \cos\delta \sin q . k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

wo q der parallactische Winkel ist. Im sphärischen Dreiecke HQZ ist der Winkel $H = 15\,i$, und wegen der Kleinheit von i kann man ohne grossen Fehler annehmen, dass $HS' = 90° - z$; folglich findet man aus der Vergleichung der Dreiecke $SS'P$ und HSS', unter der Bemerkung, dass $PS = PS' = 90° - \delta$ ist:

$$\sin^2\delta + \cos^2\delta \cos 15\,k = \sin z \sin z' + \cos z \cos z' \cos 15\,i.$$

Da aber $\cos 15\,k = 1 - 2 \sin^2(^{15}/_2\,k)$; $\cos 15\,i = 1 - 2 \sin^2(^{15}/_2\,i)$ und man ferner statt der Sinusse sehr kleiner Winkel, die Winkel selbst mit $\sin 1''$ multiplicirt setzen kann, so folgt:

$$k^2 \cos^2\delta = \left(\frac{z' - z}{15}\right)^2 + i^2 \cos z \cos z',$$

oder vermöge der Gleichung (A):

$$k^2 \cos^2\delta \cos^2 q = i^2 \cos z \cos z',$$

$$k = \pm \frac{i \cos z}{\cos\delta \cos q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x),$$

Für die obere Culmination eines dem Pole des Aequators nahen Sterns S erhält man (Fig. 1, Taf. I) $z = ZS = ZP - PS = 90° - \varphi - (90° - \delta) = \delta - \varphi$, bei der unteren Culmination wird der Stern in S' sein, und $ZS' = ZS + SS' = ZS + 2\,PS = 180\,\varphi - \delta = z$, wo φ die Breite des Orts

ist; im ersten Falle wird $q = 180°$, im zweiten $q = 0°$. Zählt man i positiv, wenn das westliche Ende der Umdrehungsachse höher als das östliche liegt, oder auch, wenn der Kreis, den der Mittelverticalfaden beschreibt, östlich vom Zenith abgeneigt ist, so muss in diesem Falle auch k positiv gezählt werden, oder mit anderen Worten zum Durchgang durch den Mittelfaden bei der oberen Culmination zugelegt werden, und bei der unteren Culmination von diesem Durchgang durch den Mittelfaden abgezogen werden, und dadurch die Beobachtungen so zu reduciren, als wenn die Umdrehungsachse des Fernrohrs wirklich vollkommen horizontal gewesen wäre.

Behält man nun dieselbe Bezeichnung wie in § 53, S. 116 und auch dieselbe Figur (Fig. 22, Taf. I) bei, so folgt, dass die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse des Fernrohrs sich nach der Umlegung um den Winkel CMB ändert, welcher in Bogensecunden ausdrückt, sehr nahe $= \frac{CB}{MB \sin 1''} = \frac{R-r}{L \sin 1'' \sin g}$ ist; bestimmt man folglich zuerst den Collimationsfehler nach der Formel $c = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{r'-r}{2}\right) \cos \delta$, so muss man anstatt i in dem Ausdrucke (x), den Winkel $\frac{1}{15} \cdot \frac{CMB}{2}$ einsetzen, und alsdann wird der im Meridiane gefundene Werth von c durch die Correction:

$$\triangle c = \frac{(R-r) . \cos z}{15 \times 2 L . \sin 1'' \sin g}$$

verbessert werden müssen; hier ist $2L$ die lineare Entfernung zwischen den Mitten der Pfannenlager, auf welchen die Zapfen der Achse ruhen, und $2g$ der Winkel, den die winkelhakenförmigen Ausschnitte der Pfannenlager bilden.

Der wahre Collimationsfehler wird $= c \pm \triangle c$, wo das obere Zeichen (+) dann gebraucht wird, wenn der Lichtstrahl, welcher vom Objective aus nach dem Mittelverticalfaden geht, gegen das Perpendikel auf der optischen Achse des Fern-

rohrs an derjenigen Seite geneigt ist, welche dem Zapfen mit dem kleineren Durchmesser näher liegt; im entgegengesetzten Falle braucht man das untere Zeichen (—).

Beispiel. Im Jahre 1843 am 22. August wurde der Collimationsfehler des schon oben von uns beschriebenen Instruments bestimmt; das bei den Beobachtungen gebrauchte Chronometer verspätete sich täglich um $0^s,68$ in Zeit gegen Sternzeit, und deswegen kann man hier einen kleinen Zeitraum nach dem Chronometer als identisch mit dem entsprechenden Sternzeitintervall annehmen, so dass also hier $\mu = 1$ wird. Die in Zeit ausgedrückten Abstände der Seitenfäden vom Mittelfaden, waren $f' = 34^s,381$, $f'' = 18^s,725$, $f^{IV} = 16^s,138$, $f^V = 33^s,338$, deren Reihenfolge eine solche ist, dass sie der Richtung der täglichen scheinbaren Bewegung des Sterns bei der oberen Culmination entsprechen, wenn bei der Aufstellung des Instruments im Meridiane der Höhenkreis sich im Westen befand. Man beobachtete nun folgende Antritte des Polarsterns an die Fäden bei seiner oberen Culmination:

Verticalkreis im Osten.	Auf den Mittelfaden reducirt.	*Verticalkreis im Westen.*	Auf den Mittelfaden reducirt.
1 . . $0^h\ 41^m\ 19^s,2$	$1^h\ 2^m\ 12^s,2$	3 . . $1^h\ 2^m\ 45^s,0$	$1^h\ 2^m\ 45^s,0$
2 . . 0 52 4 ,0	1 2 10,2	4 . . 1 12 49 ,0	1 2 42,8
Mittelzahl τ =	$1^h\ 2^m\ 11^s,20$	5 . . 1 23 33 ,0	1 2 39,8
		Mittelzahl τ' =	$1^h\ 2^m\ 42^s,53$

Declination des Polarsterns (α *Ursae minoris*) $= 88°28'25'',5$ $= \delta$; folglich:

$$\left(\frac{\tau' - \tau}{2}\right) \cos\delta = \frac{31^s,33}{2} \cos 88°\,28'\,25'',5 = 0^s,417 \text{ in Zeit.}$$

Der Lichtstrahl, welcher vom Objective aus nach dem Mittelverticalfaden ging, war gegen die Senkrechte auf die Umdrehungsachse des Objectivs an derjenigen Seite des Objectivs geneigt, auf welcher sich der Zapfen befand, an welchem der Höhenkreis befestigt ist; dieser Zapfen war dicker als der entgegengesetzte,

und folglich muss man von dem gefundenen Werthe von c den Werth $\triangle c$ abziehen.

In § 53, S. 118 haben wir $(R - r) = 0{,}00007$ englische Zoll gefunden; $2L = 10{,}85$ englische Zoll; $g = 45° 30'$; Zenithdistanz $z = \delta - \varphi = 28° 29'$, da nämlich die Breite φ des Beobachtungsorts sehr nahe $= 59° 59',5$ war; folglich hat man:

$$15 . \triangle c = \frac{0{,}00007 . \cos 28° 29'}{10{,}85 \sin 1'' . \sin 45° 30'}; \text{ oder } \triangle c = 0^s{,}110$$

und endlich der wahre Collimationsfehler $= 0^s{,}307$ in Zeit.

In unserem jetzigen Falle ging der Stern bei der oberen Culmination, wenn der Höhenkreis im Westen war, später durch den Mittelverticalfaden, als durch den grössten Kreis, welcher von einer Linie beschrieben wird, die senkrecht auf der Umdrehungsachse des Instruments steht, und welcher gewöhnlich der grösste Kreis des Instruments genannt wird. Mithin muss man hier, um die beobachtete Zeit des Durchgangs durch den Mittelfaden auf die Zeit des Durchgangs durch den grössten Kreis des Instruments zu reduciren, im ersten Falle, als der Verticalkreis sich im Osten befand, den Werth $0^s{,}307 \sec \delta$ zulegen, oder diesen Werth abziehen, wenn der Kreis sich im Westen befand. Bei der unteren Culmination macht man die Reductionen auf umgekehrte Weise.

Verticalkreis von Repsold.

65. Von allen transportablen Instrumenten zur Messung der Zenithdistanzen sind bis jetzt die vollkommensten die Verticalkreise, welche von den Mechanikern Repsold in Hamburg verfertigt werden.

Auf Tafel III ist dieses Instrument in ¼ seiner Grösse abgebildet; die Figur 1 stellt es in Verticalprojection vor, wenn die Gesichtslinie in der Verlängerung der Horizontalachse liegt, die Figur 2, wenn die Gesichtslinie senkrecht auf jene Achse gerichtet ist.

Die Haupttheile des Instruments sind:

1) Zwei parallele Verticalkreise *V V* und *W W* von Messing, 12 Zoll im Durchmesser, mit Theilung auf Silber; *V V* ist der Sucherkreis, von 10 zu 10 Minuten eingetheilt; er dient zur Einstellung des Fernrohrs auf eine gegebene Zenithdistanz; *W W* ist der Limbuskreis mit einer Theilung von 4 zu 4 Minuten und wird zur Messung der Zenithdistanzen angewandt. Der horizontale Kreis *d d* wird zur Einstellung des Azimuth benutzt.
2) Zwei Mikroskope mit beweglichen Fäden und Mikrometerschrauben zur Ablesung der Theilung auf dem Limbuskreise.
3) Das gebrochene Fernrohr, ähnlich construirt wie im transportablen Durchgangsinstrument von Ertel; der nach dem Objectiv gehende Theil des Rohres *L* und das Gegengewicht *Q* befinden sich zwischen den parallelen Kreisen *V V* und *W W* und bewegen sich zusammen mit den Verticalkreisen.
4) Die Wasserwage (Niveau) *N N*, welche auf derselben Unterlage sitzt, an welcher die Mikroskope befestigt sind; sie dient dazu, jede Veränderung in der Unterlage der Mikroskope anzuzeigen.
5) Die Wasserwage, welche auf der horizontalen Umdrehungs-

achse steht; sie kann ebenso gut wie die Wasserwage *NN* zur richtigen Aufstellung der verticalen und horizontalen Umdrehungsachsen des Instruments benutzt werden, ist aber besonders nöthig, um bei der Messung der Azimuthe die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse zu bestimmen.

Den Untertheil des Instruments bildet der starke messingne Dreifuss *aa*, welcher auf drei stählernen Schrauben ruht; mit ihm ist die konische, inwendig hohle Verticalachse von Stahl fest verbunden: ein messingner Ring *cc* (Taf. III, Fig. 1) sitzt unten auf der Verticalachse und kann um dieselbe gedreht werden. Zwei Arme *c′* und *c″* (Fig. 2) sind aus einem Stück mit dem Ringe *cc* gemacht; durch den Arm *c″* (Fig. 2) geht in der Richtung des Radius des Ringes die Druckschraube, welche zur Festhaltung des Obertheils des Instruments in einem beständigen Azimuthe gebraucht wird. Oberhalb des Ringes *cc* ist die Büchse des horizontalen Kreises *d d* auf die Verticalachse aufgesetzt; der Kreis *dd* (Fig. 1 u. 2) ist 8 Zoll im Durchmesser, und von 10 zu 10 Minuten auf Silber eingetheilt.

Weiter oben auf derselben Verticalachse sieht man die Säule *E* von Glockenmetall, inwendig hohl, innerlich und äusserlich konisch; aus dem oberen Theil der Säule erheben sich die Lagerträger *i*, *i* der Horizontalachse (Fig. 1 u. 2). Unten von der Säule laufen die drei Arme *f*, *f′*, *f″*; *f* und *f′* (Fig. 1) tragen die Verniere des Kreises *d*, *d*, welche jede 20″ angeben; während also der Kreis *dd* unbeweglich bleibt, drehen sich die Verniere um die Verticalachse herum. Der dritte Arm *f″* geht unterhalb des Kreises *dd* in den Ausschnitt *gg* (Fig. 1) am Arme *c″* des Ringes *cc* und wird dort festgehalten von der Mikrometerschraube *h*, welche auf einer Seite des Ausschnitts sitzt, und die Stahlfeder, welche auf der anderen Seite des Ausschnitts befestigt ist, drückt beständig den Arm *f″* an die Schraube *h* an.

Wenn die Druckschraube am Arme *c″* gelöst ist, so kann man die Säule *E* zusammen mit dem ganzen oberen Theil des

Instruments und mit den Vernieren des Horizontalkreises frei um die Verticalachse drehen; nach der Schliessung dieser Druckschraube aber ist die Säule E gegen den Ring $c\,c$ geklemmt und gestattet nur eine feine, geringe Bewegung um die Verticalachse mit Hülfe der Mikrometerschraube h.

Die Lager, auf welchen die cylindrischen Zapfen der Horizontalachse ruhen, sind gabelförmig, rechtwinklig ausgeschnitten und an den Berührungspunkten mit dem Zapfen etwas gewölbt. Die Horizontalachse des Instruments besteht aus zwei konischen Röhren, die an dem Cubus F (Fig. 2) befestigt sind; an dem Cubus sind auch das Objectivrohr L und das Gegengewicht Q angeschraubt. Im Innern des Cubus sitzt ein grosses, rechtwinkliches und gleichschenkliches Glasprisma π (Fig. 5), welches die durch das Objectiv gehenden Lichtstrahlen nach dem Ocular $l\,l$ (Fig. 5) reflectirt. Mit der Schraube a (Fig. 5) wird das Prisma π so gestellt, dass die Bilder der beobachteten Objecte unverzerrt und scharf erscheinen. Für die Beleuchtung der Fäden ist noch mit dem Prisma π ein kleines Glasprisma so verbunden, dass die Hypothenusen der beiden Prismen untereinander und ihre gegenüberliegenden Katheten genähert parallel werden. Auf dem Ende der Horizontalachse, — dem Ocular gegenüber, befindet sich ein Gegengewicht, und nebenbei wird des Nachts eine Lampe auf einer besonderen Unterlage aufgestellt, wie die Fig. 2 zeigt. Das Lampenlicht geht durch die Oeffnungen des Gegengewichts und des Zapfens der Horizontalachse und gelangt durch die beiden Glasprismen zum Ocular. Um die bequemere Beleuchtung des Gesichtsfeldes zu bekommen, ist das kleine Glasprisma ein wenig zum grossen Prisma geneigt, — nach dem Vorschlag des Professors Kowalsky — (Taf. IV, Fig. 5). Derselbe Zweck wird erreicht, wenn man nahe der Mitte des Glasprisma π, auf der entgegengesetzten Seite des Oculars, einen kleinen unter 45° zu seiner Länge abgeschnittenen Glascylinder befestigt (Fig. 8), dessen Längsachse parallel ist der Kathete des Glasprisma π, welche die durch das Objectiv gehenden Lichtstrahlen treffen;

die abgeschnittene Seite ist dann der Hypothenuse des Prismas und der Basis des Cylinders der anderen Kathete parallel.

Der Ocularsatz (Taf. III, Fig. 5. 6 u. 7) ist ähnlich wie im transportablen Durchgangsinstrument von Ertel eingerichtet; die Fäden befinden sich in einem besonderen Röhrchen *N* (Fig. 5), welches in die Ocularröhre *l l* eingeschoben und durch die Schrauben *m m'* mit der Platte verbunden ist. Wenn man eine von diesen Schrauben löst, so kann die Platte *M* so im Falze des Ringes *P P* (Fig. 7) gedreht werden, dass zwei von einander um 20 Secunden abstehende parallele Fäden horizontal werden; zwei andere parallele Fäden kommen dann in die verticale Lage; zur genaueren Aufstellung der Fäden benutzt man die Schrauben *n*, *n'* (Fig. 6 u. 7). Mit Hülfe der Schraube *n''* kann man die Platte, welche die Fäden trägt, in kleineren oder grösseren Abstand von den Ocularlinsen schieben, um die Fäden scharf und deutlich zu sehen. Die Schrauben *m m'* werden noch benutzt, wenn man den Collimationsfehler beseitigen oder verkleinern will.

Die Büchsen der Verticalkreise *V V* und *W W* (Fig. 2) sind mit je 6 Schrauben an den Seitenflächen des Cubus befestigt; näher am Ocular befindet sich der Limbuskreis, weiter davon der Sucherkreis. Die Zahlenaufschriften der Grade laufen auf beiden Kreisen in einer Richtung; wendet man das Auge zum Limbuskreis, so wachsen die Zahlen auf demselben von der Linken zur Rechten; wenn man nach der anderen Seite des Instruments geht und den Sucherkreis ansieht, so wachsen die Zahlen der Grade auf diesem Kreise von der Rechten zur Linken.

Starke messingne Ringe umfassen die Horizontalachse zwischen dem Cubus und den Lagerträgern *i*, *i*; einer von diesen Ringen besteht aus einem Stück Metall mit der horizontalen Stütze *S S* (Fig. 2), welche die Mikroskope trägt; der andere Ring besteht aus einem Stück mit der horizontalen Stütze *S' S'*, auf welcher der Index und die Lupen zur Ablesung der Theilung auf dem Sucherkreise sich befinden. Die Stützen *S S* und *S' S''*

sind mit dem verticalen, gabelförmigen Rahmen t und t' (Fig. 2) verbunden, die nach unten gehen; da der Raum zwischen den Lagerträgern i, i oben grösser ist als unten, so kommen die Enden der Rahmen t und t' in die Ausschnitte, welche an den Lagerträgern i, i gemacht sind, und werden dort zwischen der Mikrometerschraube τ und τ'' (Fig. 2) und die Spiralfeder τ' (Fig. 1) eingeklemmt, indem jede von diesen Schrauben und jede Spiralfeder an den Lagerträgern i, i, da wo die Ausschnitte sind, befestigt werden. Ausserdem ist noch die Druckschraube u' (Fig. 1) vorhanden, welche die freie Bewegung des Fernrohrs und der Verticalkreise VV und WW hemmt und nur eine feine Bewegung gestattet vermittelst der Mikrometerschraube u, welche an einem der Lagerträger i, i angebracht ist und beständig das untere Ende des Rahmens t gegen die Spiralfeder u'' andrückt, die an der anderen Seite desselben Lagerträgers i befestigt ist.

Wenn man den Ort des Zeniths auf dem Limbuskreise und auf dem Sucherkreise zu verändern wünscht, so muss man die Schrauben lösen, welche die Büchsen dieser Kreise mit dem Cubus verbinden; dann wird es möglich, die Kreise beliebig um die Horizontalachse zu drehen; ist die gehörige Bewegung vollzogen, dann werden die Schrauben wieder angezogen. Eine kleine Veränderung des Orts des Zeniths am Limbuskreise wird noch gemacht entweder mit Hülfe der Schraube bb (Fig. 2), welche an der Unterlage der Wasserwage NN sich befindet, oder vermittelst der Schrauben w, w', w'' (Fig. 1), welche an den Mikroskopenträgern angebracht sind, um diese Träger etwas verstellen zu können. Der Ort des Zeniths auf dem Sucherkreis kann etwas verändert werden durch die Wirkung der Schraube τ'' (Fig. 2).

Die Wasserwage NN, welche auf dem horizontalen Träger der Mikroskope angebracht ist, hat zum Zweck, jede Veränderung in der Richtung der geraden Linie anzuzeigen, welche die Nullpunkte der Mikroskope verbindet und also einen constanten Durchmesser am Limbuskreise anzugeben, von welchem aus die Winkel an

diesem Kreise gerechnet werden. Wenn die Theilungen auf der Wasserwage von der Mitte des Glasrohrs nach ihren beiden Enden wachsen und man den Gradbogen des Limbuskreises ansieht, so muss man die Niveautheilungen auf der rechten Seite von der Mitte des Glasrohrs als positiv, und auf der linken Seite als negativ betrachten; es seien z. B. a Theilungen auf der rechten Seite bei dem Ende der Blase und b Theilungen auf der linken Seite beim anderen Ende der Blase an der Wasserwage abgelesen; so ist $^1/_2\,(+a-b)$ die Correction, welche man zur Ablesung der Minuten und Secunden am Limbuskreise hinzuzulegen hat, um den Winkel von einem constanten Durchmesser dieses Kreises abzuzählen; ist n der Werth einer Niveautheilung in Secunden ausgedrückt, so beträgt die erwähnte Correction $\frac{n(+a-b)}{2}$ Secunden.

Universalinstrument von Pistor & Martins.

66. Das Universalinstrument hat seinen Namen von seiner eigenthümlichen Einrichtung, welche es ermöglicht, es mit gleicher Sicherheit zu verticalen wie azimuthalen Winkelmessungen, und ebenfalls zu Durchgangsbeobachtungen als Passageninstrument zu benutzen. Es ist ursprünglich, hauptsächlich nach W. v. Struves Angaben, von Ertel in München angefertigt worden; später wurden vorzügliche Instrumente dieser Art namentlich von Pistor & Martins in Berlin, Repsold in Hamburg und Meyerstein in Göttingen geliefert. Die ersten dieser Mechaniker verfertigten besonders compendiöse Universalinstrumente kleiner Dimensionen.

Dieselben werden jetzt mit geringen Abänderungen in vorzüglicher Güte von den Mechanikern August Lingke & Co. in Freiberg i. S. ausgeführt, und findet sich auf Taf. IV in ²/₃ Grösse die Abbildung eines solchen Instruments.

Der auf drei stählernen Fussschrauben (a) stehende messingne Dreifuss K ist mit einer vertikalen stählernen Achse, deren unteres Ende in Fig. 1 bei b sichtbar ist, fest verbunden. Ebenfalls mit dieser Achse fest verbunden ist der Azimuthalkreis A, während die dicht darunter befindliche Scheibe c, an der die Klemmschraube M angebracht ist, so lange diese nicht angezogen wird, sich leicht um die verticale Achse b bewegen lässt. Die Schraube M geht ganz durch die Scheibe c hindurch, bis zur Achse b, gegen welche sie gepresst werden kann, wodurch die freie Bewegung von c gehemmt wird. Ferner befinden sich an der Scheibe c zwei nach oben gehende Ansätze d' d'' (Fig. 1 und 2), durch deren einen (d'') die Mikrometerschraube N hindurchgeht, während an dem andern (d') eine Federbüchse e sich befindet, in welcher eine Spiralfeder eingeschlossen ist, welche durch d' hindurchgeht und in der Richtung gegen die Schraube N zu drücken strebt.

Die Achse b läuft über dem Kreise A konisch nach oben aus. Auf dem oberen Theile ist der messingne Konus B aufgesetzt und kann darauf leicht gedreht werden. Mit dem unteren Theile von B ist der messingne Arm f (Fig. 1) fest verbunden, und an seinem äussersten Ende (bei N, Fig. 1) befindet sich auf der untern Seite ein Ansatz, welcher zwischen der Schraube N und der in e befindlichen Spiralfeder eingeklemmt wird. Wenn somit die Klemmschraube M angezogen wird, so ist der obere Theil des Instruments zwar festgestellt, lässt aber noch vermittelst der Mikrometerschraube N eine feine Bewegung zu.

Ueber dem Konus B sind die beiden Träger C der horizontalen Achse befestigt. Dieselben laufen in gabelförmige Lager aus, von denen das eine (D), wie in Fig. 2 angedeutet ist, hori-

zontal fast ganz durchgeschnitten ist, wodurch eine kleine Federung in der Richtung nach oben und unten stattfindet. Zwei Schrauben, *h* und *h'*, (Fig. 2) sind derartig an *D* angebracht, dass die eine (*h*) ihr Gewinde in dem oberen Theile von *D* hat, und, wenn sie eingeschraubt wird, gegen den unteren Theil von *D* drückt, und dadurch den oberen von dem unteren Theile von *D* entfernt. Die andere (*h'*) geht, mit Ausnahme des in der Zeichnung sichtbaren Schraubenkopfes, durch eine weitere cylindrische Oeffnung in dem oberen Theile von *D* frei hindurch, und findet ihr Gewinde in dem unteren Theile von *D*. Wenn man diese Schraube stark anzieht, so werden die beiden Hälften von *D* einander genähert. Will man also den oberen Theil von *D* etwas erhöhen, so löst man *h'* und zieht *h* fester an; will man ihn etwas erniedrigen, so löst man *h* und zieht *h'* an. Es ist dabei zu bemerken, dass, wenn der obere Theil von *D* seine richtige Höhe erlangt hat, es nothwendig ist, dass beide Schrauben, sowohl *h* wie *h'* angezogen sein müssen, damit Federungen des Achsenlagers vermieden werden.

An dem unteren Theile von *C* sind die Mikroskope *E* zur Ablesung des Azimuthalkreises mit starken Schrauben (*e* in Fig. 1 und 2) befestigt. Die Gewinde dieser Schrauben befinden sich in *C*; die Schraubenlöcher in den Mikroskopenträgern (*g*) sind etwas weiter als die Schrauben und werden durch die Schraubenköpfe (*e*) an *C* festgeklemmt. Es wird dadurch erreicht, dass jedes Mikroskop, wenn nöthig, noch etwas seitlich verstellt werden kann.

In den gabelförmigen Lagern *D* liegt die horizontale Achse *G* des Instruments (Fig. 2). An dieser sind befestigt:

1) Das Fernrohr (*L*).
2) Der feingetheilte Kreis (*P*). Diese beiden Theile sind durch Schrauben mit der Achse *G* fest und unveränderlich verbunden, so dass eine jede Drehung der Achse von einer gleichen Drehung des Fernrohrs und des Kreises begleitet ist.

3) Ein um die Achse drehbarer Ring (h, Fig. 1), der durch eine Klemmschraube i an der Achse G festgeklemmt werden kann.

4) Ein ebenfalls um die Achse drehbarer, in der Zeichnung nicht sichtbarer Ring, an dem das Höhenniveau (Q, Fig. 1) und die zur Ablesung des Kreises P dienenden Mikroskope (R, Fig. 1 u. 2) befestigt sind.

5) Der Einstellungskreis O (Fig. 1 u. 2); derselbe ist durch die Schraube S an der Achse festgeklemmt.

Die unter 3) und 4) erwähnten beweglichen Ringe laufen nach unten in je einen Arm (k und l) aus, welche zwischen einer Schraube und einer Feder eingeklemmt sind, wie in Fig. 2 bei l deutlich zu sehen ist. Die Feder ist um einen Stift gewickelt, der mit einem Knopfe n und einem daran befindlichen Stift o versehen ist. Wenn man den Knopf n etwas zurückzieht und dreht, so dass sich der Stift o gegen das an C befestigte Ansatzstück p stützt, so wird der Arm l frei. In genau derselben Weise kann man den Arm k lösen, und es kann alsdann die horizontale Achse G mit allen daran befindlichen Theilen frei aus den Lagern D herausgenommen werden. Die Schraube q dient zugleich dazu, dem Mikroskopenträger nebst dem Höhenniveau Q eine kleine Bewegung zu ertheilen, von deren Nutzen weiter unten die Rede sein wird, während die zu dem Ringe h und dem daran befestigten Arme k gehörige Schraube q' dazu dient, bei angezogener Schraube i der horizontalen Achse nebst dem Fernrohre und den Kreisen P und O eine kleine Drehung zu ertheilen.

Die Nivellirung der horizontalen Achse D geschieht durch das mit gabelförmigen Füssen (r, Fig. 2) versehene Achsenniveau T, welches direct auf die Achse aufgesetzt werden kann.

Beschreibung der einzelnen Theile des Universalinstruments.

67. 1) Das Fernrohr (L, Fig. 1). Das Ocular des Universalinstruments ist in ganz ähnlicher Weise construirt, wie früher bei dem Passageninstrument und Verticalkreise beschrieben ist, und die Correction der Fadenplatte geschieht ebenfalls in ähnlicher Weise. Da aber das Universalinstrument auch zur Messung von Winkeln zwischen terrestrischen Gegenständen in geringer Entfernung vom Beobachter dienen soll, bei denen das vom Objectiv hervorgebrachte Bild nicht in der Focalebene, sondern weiter vom Objectiv entfernt hervorgebracht wird, so ist an dem Fernrohr eine Vorrichtung angebracht, mit Hülfe deren man die Entfernung der Fadenplatte vom Objectiv leicht verändern kann. Unter der Platte r befindet sich nämlich ein Zahnrad, dessen Achse in der Ebene der Zeichnung liegt, und welches durch den geränderten Knopf s gedreht werden kann. Dasselbe fasst in eine am Ocularstück befestigte gezähnte Stange, und durch Drehung des Knopfes s wird demnach das Ocular gegen das Objectiv verschoben. Damit indessen solche Verschiebungen nicht durch unbeabsichtigtes Berühren des Knopfes s zu leicht entstehen können, ist auf der der Platte r entgegengesetzten, auf der Zeichnung nicht sichtbaren Seite des Fernrohrs eine Schraube angebracht, durch deren Anziehen das Ocularstück an dem äusseren Rohre des Fernrohrs festgeklemmt werden kann. Bei t befindet sich eine Platte von mattem Glase, und innerhalb des Fernrohrs (in der Zeichnung angedeutet) ein elliptischer weisser Ring, durch dessen Erleuchtung, vermittelst einer vor t angebrachten Lampe, das Gesichtsfeld erhellt werden kann.

Bei u befindet sich ein mit einem Fadenkreuz versehener Ring und bei v eine Platte mit einem kleinen kreisförmigen Loch. Diese beiden Theile haben eine solche Stellung gegeneinander, dass die Verbindungslinie der kleinen Oeffnung bei v und der Mitte des Fadenkreuzes bei u der Visirlinie des Fern-

rohrs parallel ist. Die Theile *u* und *v* dienen zur leichteren Auffindung eines Sterns mit dem Fernrohr. Wenn dem durch die Oeffnung bei *v* blickenden Beobachter der gesuchte Stern gerade hinter der Mitte des Fadenkreuzes bei *u* erscheint, so findet er den Stern auch nahezu in der Mitte des Gesichtsfeldes des Fernrohrs.

68. 2) Die Kreise und Mikroskope. Die Kreise sind von 10 zu 10 Minuten getheilt. Bei jedem zehnten Gradstriche ist die demselben entsprechende Zahl in den Kreis eingravirt; damit man aber beim Durchsehen durch das Mikroskop, dessen Gesichtsfeld nur wenige Grade der Theilung umfasst, nicht im Zweifel ist, welche Gradstriche sich im Gesichtsfelde befinden, so sind bei allen Gradstrichen die Einer der entsprechenden Zahl eingravirt. So sind z. B. zwischen dem 20. und 40. Grade folgende Bezeichnungen: **20**, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **30**, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **40** u. s. w.

Eine Umdrehung der Trommel des Mikroskops entspricht der Entfernung eines Theilstriches auf dem Kreise von dem ihm zunächst liegenden, also 10 Minuten. In Folge dessen ist auch die Trommel in 10 gleiche Theile getheilt, von denen jeder eine Minute der Kreistheilung darstellt. Jede Minute ist noch in 6 Theile, oder von 10 zu 10 Secunden getheilt, und einzelne Secunden lassen sich noch leicht schätzen. Es ist übrigens auch bei der Benutzung dieses Instruments an das früher Bemerkte zu denken, dass nämlich eine Umdrehung der Mikrometerschraube nicht immer genau der Entfernung eines Theilstriches von andern auf dem Kreise entspricht, und ist daher die wegen dieser Abweichung entstehende, an die Ablesung des Mikroskops anzubringende Correction am besten bei jeder Ablesung durch Einstellung zweier Striche des Kreises zu ermitteln.

Von der Berichtigung des Universalinstruments und des Verticalkreises.

69. Bei dem Gebrauche eines jeden, mit einem Fernrohre versehenen Winkelmessinstruments ist es vor allem nöthig, dass man durch das Fernrohr sowohl die zu beobachtenden Gegenstände, als auch die Fäden zugleich sehen kann, welche im gemeinschaftlichen Brennpunkte des Objectivs und Oculars sich befinden müssen, und die zur Bestimmung der Absehens- oder Visirlinie (*linea collimationis*) dienen. Ist die Lage des Oculars und der Fäden in Bezug auf den Brennpunkt (*Focus*) berichtigt, so wird man ein präcises Bild eines entfernten Gegenstandes deutlich am Orte des Fadennetzes sehen können. Dann muss noch das Fadennetz so gestellt sein, dass die sogenannten Verticalfäden senkrecht auf der Richtung der horizontalen Umdrehungsachse des Fernrohrs stehen, oder parallel mit der Ebene des Höhenkreises sind. Wie alle diese Berichtigungen gemacht werden, haben wir in § 31, S. 60 und in § 55, S. 121 näher erläutert; auch bei der Beschreibung der Instrumente sind die Schrauben erwähnt worden, welche sich an der Ocularröhre befinden, und bei diesen Berichtigungen gebraucht werden.

Soll ein Instrument zur Messung horizontaler oder verticaler Winkel angewandt werden, so muss:

1) die Verticalachse des Instruments genau lothrecht sein; diese Achse wollen wir die erste nennen;
2) muss die zweite oder die sogenannte Horizontalachse des Fernrohrs mit der ersten verticalen Achse einen rechten Winkel (90°) bilden; also genau horizontal sein, und
3) muss die optische Achse oder die Visirlinie senkrecht auf der zweiten Achse stehen, und also bei der Drehung des Fernrohrs um die Horizontalachse eine zum Horizonte senkrechte Ebene beschreiben. Die genannte Ge-

sichtslinie ist diejenige Linie, die vom Centrum des Objectivs entweder direct, oder im gebrochenen Fernrohre durch die Reflexion des in demselben befindlichen Prismas, in die Mitte des kleinen Vierecks trifft, welches zwischen den beiden nahen Vertical- und Horizontal-Fädenpaaren gebildet wird.

Die Berichtigung des Niveaus- und der Verticalachse, oder die Aufstellung dieser Achse in lothrechter Lage, geschieht ganz ebenso, wie wir in § 51, S. 109 gezeigt haben.

Schwerer ist die Berichtigung der Horizontalachse. Durch die Umlegung dieser Achse in ihren Lagern wird man, mit Hülfe des Niveaus, erstens den Unterschied der Dicke der beiden Zapfen dieser Achse erkennen müssen, und auch die Correction bestimmen, welche man an die durch das Niveau angegebenen Neigungen der Achse anzubringen hat (§ 53, S. 116). Alsdann berichtigt man so genau wie möglich die Verticalachse, und nachdem dieses geschehen ist, wird die Horizontalachse zweimal nivellirt; erst in einer Lage (I), dann in der entgegengesetzten Lage (II), in welcher die Achse durch die Umdrehung derselben um 180° um die Verticalachse bewegt wird. Wenn man in dieser Lage der Achse eine andere Neigung als in der ersten findet, so ist dieses ein Beweis, dass die Horizontalachse keinen rechten Winkel mit der Verticalachse bildet. Die Abweichung dieses Winkels von 90° kann aber sehr leicht weggeschafft werden. Mit Hülfe der Schrauben hh' (Fig. 2, Taf. IV), welche sich an einem der Pfannenlager befinden, kann das Lager so gehoben oder gesenkt werden, dass die Mitte der Blase am Niveau, bei beiden um 180° verschiedenen Lagen der Horizontalachse, sich in der Mitte zwischen ihren, vom Einflusse der ungleichen Dicke der Zapfen befreiten Orten genau einstellt.

Berichtigung der Mikroskope und der Mikrometerschrauben.

70. Der richtige Gebrauch der Mikroskope fordert die Erfüllung folgender Bedingungen:

1) Die Fäden müssen deutlich und scharf sichtbar sein, was man erreicht durch das gehörige Einschrauben oder Ausschrauben der Ocularlinse. Die Fäden müssen ferner parallel den Theilstrichen am Limbuskreise gestellt werden.
2) Ebenso gut muss man die Theilstriche am Limbuskreise sehen; ist das nicht der Fall, so löst man ein wenig die Schrauben an den Ringen, welche das Mikroskop tragen, und verändert die Entfernung des ganzen Mikroskops vom Limbus so lange, bis die Theilstriche durch das Ocular gesehen ganz deutlich erscheinen und bei kleinen Verstellungen des Auges keine Veränderungen in der relativen Lage des Bildes vom Theilstrich gegen die Fäden stattfinden.
3) Der Index am Kopfe der Mikrometerschraube soll auf Null (0) zeigen, wenn der Doppelfaden die kleine runde Oeffnung auf der Mitte der gezähnten Platte ($q\,q$, Taf. III, Fig. 3) bissecirt; über diese Berichtigung wurde schon oben (S. 77) gesprochen.
4) Die Mikroskope müssen in gleicher Entfernung von einander an dem Umfang des Kreises befestigt werden, z. B. wenn vier Mikroskope vorhanden sind, so müssen sie von einander um einen Bogen von 90° abstehen; wenn aber das Instrument, wie der Repsoldsche Verticalkreis, nur zwei Mikroskope hat, so müssen sie gegenseitig um ein Bogen von 180° entfernt sein. Dafür hat schon der Verfertiger des Instruments gesorgt; bei dem Repsoldschen Kreis kann man vermittelst der Schrauben w, w', w'' (Taf. III, Fig. 1) die Mikroskope ein wenig verstellen, so dass der Unterschied der Ablesungen am Limbuskreise nahezu 180° betragen wird.

5) Die Zahlen auf den Köpfen der Mikrometerschrauben müssen in solcher Richtung wachsen, dass, wenn der Doppelfaden durch das Drehen der Mikrometerschraube von einem Theilstrich am Limbuskreise von grösserer Zahlenbenennung zu einem Theilstrich von kleinerer Zahlenbenennung geführt wird, zugleich auch grössere Zahlen am Kopfe der Mikrometerschraube zum Index gelangen. Ist dies nicht der Fall, so muss das ganze Mikroskop um 180° um seine optische Achse gedreht werden.

71. Wir haben gezeigt, wie der Werth einer vollen Umdrehung von jeder Mikrometerschraube bestimmt und in Secunden ausgedrückt wird. Durch eine eigene Vorrichtung ist es immer möglich zu machen, dass eine ganze Anzahl von vollen Umdrehungen der Mikrometerschraube genau gleich der Entfernung zweier zunächst liegenden Theilstriche auf dem Limbuskreise wird. Es ist leicht durch die gehörige Verlängerung oder Verkürzung des Mikroskops zu erreichen, dass das Bild des Raumes zwischen jenen zwei Theilstrichen gleich wird dem Raume, um welchen man den Doppelfaden durch eine ganze Anzahl von Revolutionen der Mikrometerschraube verstellt. Wenn man z. B. zuerst gefunden hat, dass die ganze Zahl von Schraubenrevolutionen einem grösseren Raume entspricht als die Ausdehnung des Bildes der Entfernung zweier einander folgenden Theilstriche auf dem Kreise beträgt, so muss man das Objectiv des Mikroskops dem Oculare näher bringen und dann, um die Theilstriche deutlich sehen zu können, das ganze Mikroskop dem Limbuskreise gehörig nähern.

Da wegen Temperaturwechsel und anderer Umstände die Entfernung der Mikroskope vom Limbuskreise kleinen Aenderungen unterworfen sein kann, so muss man den Werth einer Schraubenrevolution und also auch den Unterschied einer ganzen Anzahl von Revolutionen der Mikrometerschraube und der Entfernung zweier einander folgenden Theilstriche am Limbuskreise öfters, am besten bei den Beobachtungen selbst bestimmen.

Wegen der Theilungsfehler am Kreise wird man etwas verschiedene Bestimmungen erhalten je nach der Lage dieser Theilstriche am Kreise; man muss daher den Werth der Umdrehung einer jeden Mikrometerschraube auf verschiedenen Stellen am Limbuskreise bestimmen und daraus das Mittel nehmen, — z. B. bei 0° und 180°, oder bei 0°, 90°, 180° und 270°.

72. Es ist noch nöthig, die Richtigkeit der Mikrometerschrauben zu untersuchen, d. h. zu ermitteln, ob der Doppelfaden jedesmal gleich weit fortgeschoben wird, wenn man die Schraube um gleiche Theile eines Umganges dreht. Meistens wird dies nicht genau stattfinden; um die Fehler der Schraube bestimmen zu können, lässt man eine kleine Silberplatte anfertigen, auf welcher feine parallele Striche eingeschnitten sind, z. B. in $^1/_6$ der Entfernung von einander, welche zwischen zwei aufeinander folgenden Theilstrichen am Limbuskreise enthalten ist. Eine solche Platte wird am Limbuskreise unter dem Mikroskope angeklebt; die Fehler der Schraube werden dann auf folgende Weise untersucht.

Wir wollen hier annehmen, dass es hinlänglich ist, vier Schraubengänge zu prüfen; zwei von ihnen beziehen sich auf die Drehung der Schraube, welche den Doppelfaden von der Mitte der gezähnten Platte *qq* (Taf. III, Fig. 3) nach der positiven, und zwei auf die, welche sie nach der negativen Seite führt. Man fängt mit dem äussersten Schraubengange auf der negativen Seite an und stellt den Doppelfaden auf den zweiten Zahn von der Mitte der gezähnten Platte *qq* gerechnet; dabei muss der Index auf dem Kopfe der Mikrometerschraube auf Null (0) zeigen. Durch die Bewegung des Limbuskreises wird der erste Theilstrich auf der angeklebten Hülfsplatte unter den Doppelfaden des Mikroskops gebracht, so dass alle andern Theilstriche auf die positive Seite der Platte *qq* (Taf. III, Fig. 3) kommen oder in der Richtung der abnehmenden Zahlen am Limbuskreise liegen. Darauf wird durch Drehung der Mikrometerschraube der Doppelfaden auf den zweiten Strich der Hülfsplatte eingestellt und die Theilung

auf dem Kopfe der Mikrometerschraube abgelesen. Durch die Bewegung des Limbuskreises bringt man wiederum den ersten Strich der Hülfsplatte unter den Doppelfaden und gleich darauf stellt man durch die Drehung der Mikrometerschraube wieder den Doppelfaden auf den zweiten Theilstrich der Hülfsplatte und liest die Theilung auf dem Kopfe der Mikrometerschraube ab. Ganz ebenso verfährt man weiter, bis eine Umdrehung der Mikrometerschraube gemacht ist und der Doppelfaden zum ersten Zahn auf negativer Seite der Platte *q q* (Taf. III, Fig. 3) gelangt. Auf dieselbe Weise werden der zweite, der dritte und der vierte Schraubengang untersucht, bis endlich der Doppelfaden den zweiten Zahn auf der positiven Seite der Platte *q q* erreicht. Nun untersucht man die anderen Theile des Schraubengangs, z. B. jedes Drittel desselben, indem man die Einstellungen in oben erwähnter Ordnung auf den ersten und den dritten Strich der Hülfsplatte macht und so die Entfernung zwischen den Theilstrichen nach und nach längs der vier Schraubengänge misst. Auf eine ähnliche Weise kann man auch jede Hälfte des Schraubenganges prüfen, wenn die Einstellungen nur auf dem ersten und dem vierten Theilstriche der Hülfsplatte gemacht werden.

Ganz auf dieselbe Art werden auch die anderen Mikrometerschrauben untersucht. Alle solche Untersuchungen müssen möglichst bei einer und derselben Temperatur ausgeführt werden, weil jeder empfindliche Wechsel der Temperatur eine Aenderung in dem Werthe eines Schraubengangs hervorbringt.

In Ermangelung einer Hülfsplatte kann man zu demselben Zweck ein Fadennetz benutzen, in welchem Fäden in Entfernungen von 20 Bogensecunden von einander aufgezogen und parallel dem Theilungsstrich gestellt werden. Ist der Index am Kopfe der Mikrometerschraube auf 0 (Null) gesetzt, so bringt man zuerst den Theilstrich auf dem Limbuskreise genau unter den ersten Faden, dann wird der zweite Faden durch das Drehen der Mikrometerschraube auf denselben Theilstrich eingestellt und

am Kopfe der Mikrometerschraube abgelesen; nun bringt man durch die Bewegung des Limbuskreises denselben Theilstrich wieder unter den ersten Faden, und gleich darauf wird durch das Drehen der Mikrometerschraube der zweite Faden auf diesen Theilstrich eingestellt und am Schraubenkopfe abgelesen. Auf diese Weise werden nach und nach die Theile der Schraubenrevolution bestimmt, welche den 20 Bogensecunden entsprechen. Aehnlich kann man die Theile, welche 40″ entsprechen, untersuchen u. s. w.

Durch dieses Verfahren werden sowohl der Werth des Schraubengangs, wie auch die Correctionen bestimmt, welche von der Unregelmässigkeit der Schraubengänge abhängen. Nehmen wir z. B. an, dass der Umfang des Schraubenkopfs in 60 gleiche Theile eingetheilt ist, und es mögen α', α'', ... α^{VI} die Werthe ausdrücken, welche jeder sechste Theil des Schraubenganges ergeben hat, bei successiven Messungen des Intervalls zwischen dem ersten und zweiten Striche der Hülfsplatte, auf welcher sechs gleiche Zwischenräume durch Striche bezeichnet sind. Der wahrscheinlichste Werth j des sechsten Theils eines Schraubengangs ist dann:

$$j = \frac{\alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha^{IV} + \alpha^{V} + \alpha^{VI}}{6};$$

man erhält demnach als Correctionen für die Ablesung bei folgenden Theilen am Kopfe der Mikrometerschraube:

0 Theile ... Correction =	0
10	$j - \alpha'$
20	$2j - \alpha' - \alpha''$
30	$3j - \alpha' - \alpha'' - \alpha'''$
40	$4j - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \alpha^{IV}$
50	$5j - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \alpha^{IV} - \alpha^{V}$
60	0.

Wenn die Hülfsplatte nur durch fünf Striche in vier gleiche

Intervalle eingetheilt wäre, so könnte man nur die Viertel und die Hälfte des Schraubengangs untersuchen.

Es bleibt noch übrig, die Correctionen aller anderen Theilungen auf dem Schraubenkopfe abzuleiten. Da nun die Fehler, welche von der Ungleichmässigkeit der Krümmung auf verschiedenen Stellen der Schraubenumdrehung herrühren, in derselben Ordnung wiederkehren, wenn dieselben Theile der Schraube in die Schraubenmutter kommen, so kann die zu bestimmende Correction durch eine periodische Function der Drehungswinkel ausgedrückt werden, unter der Bedingung, dass die Correction Null wird, wenn dieser Winkel Null ist. Es sei also y die Correction, welche dem Drehungswinkel u entspricht; alsdann ist überhaupt:

$$y = c + a' \cos u + b' \sin u + a'' \cos 2u + b'' \sin 2u + \ldots \quad \text{(I)}$$

wo c, a', b', a'', b'', ... von dem Winkel u unabhängig und, wegen der Bedingung $u = 0$, $y = 0$, mit einander durch die Gleichung

$$0 = c + a' + a'' + \ldots$$

verbunden sind.

Da gewöhnlich nicht viele Correctionen bei verschiedenen Winkeln bestimmt werden, so kann man sich meistens mit drei Gliedern begnügen und annehmen:

$$y = c + a' \cos u + b' \sin u = -A \sin B + A \sin (B + u) \quad \text{(II)}$$

wo $c' = -a'$, $a' = A \sin B$, $b' = A \cos B$ sind. Hat man a' und b' gefunden, so ist leicht A und B zu berechnen.

Es sei der Umfang des Schraubenkopfes in n gleiche Theile eingetheilt und $w = \frac{360^\circ}{n}$ gesetzt; mögen m', m'' ... $m^{(n-1)}$ die Correctionen derjenigen Ablesungen am Schraubenkopfe be-

deuten, welche den Drehungswinkeln ω, $2\,\omega$ .... $(n-1)\,\omega$ der Mikrometerschraube entsprechen.

Zur Berechnung von c, a', b' dienen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= c + a', \\
m' &= c + a' \cos \omega + b' \sin \omega, \\
m'' &= c + a' \cos 2\,\omega + b' \sin 2\,\omega, \\
&\vdots \\
m^{(n-1)} &= c + a' \cos (n-1)\,\omega + b' \sin (n-1)\,\omega;
\end{aligned}$$

daraus werden folgende wahrscheinlichste Werthe abgeleitet:

$$c = -a' = \frac{m' + m'' + \ldots + m^{(n-1)}}{n} \text{ mit dem Gewicht} \;.\;.\; 2$$

$$a' = -c = 2\left(\frac{m' \cos \omega + m'' \cos 2\,\omega + \ldots + m^{(n-1)} \cos (n-1)\,\omega}{n}\right) \text{m. d. G. } 1$$

$$b' = 2\left(\frac{m' \sin \omega + m'' \sin 2\,\omega + \ldots + m^{(n-1)} \sin (n-1)\,\omega}{n}\right) \;.\;.\;.\; 2$$

Wenn eine der beiden Bestimmungen von a' wenig von der andern abweicht, so kann die kleine Abweichung den Fehlern der Versuche zugeschrieben werden; falls aber die Abweichung recht gross ist, dann muss man die Formel (II) als eine ungenügende betrachten und durch eine andere ersetzen.

Beispiel. Herr Smislow hat in Pulkowa die Mikrometerschrauben an einem Verticalkreise von Repsold untersucht und dabei die Hülfsplatte benutzt mit Strichen, deren gegenseitiger Abstand einen Sechstheil der vollen Umdrehung der Schraube beträgt; der Schraubenkopf war in 60 Theile eingetheilt und mit Aufschriften 0, 10, 20, 30, 40 und 50 versehen, so dass 10 Theile einem Sechstheil des Schraubenganges entsprechen. Für eines der Mikroskope wurden folgende Werthe des Intervalls zwischen dem ersten und zweiten Striche der Hülfs-

platte gefunden und in Theilen des Schraubenkopfes ausgedrückt.

Werth des Intervalls zwischen:

0 u. 10 Th.	10 u. 20 Th.	20 u. 30Th.	30 u. 40 Th.	40 u. 50 Th	50 u. 60 Th.
$\alpha' = 9{,}903$	$\alpha'' = 9{,}602$	$\alpha''' = 9{,}328$	$\alpha^{IV} = 9{,}728$	$\alpha^{V} = 10{,}065$	$\alpha^{VI} = 10{,}228$

im Mittel $j = 9{,}809$; man hat also die Correctionen der Ablesungen (S. 173)

bei 10 Th. $m' = -0{,}094$ Th.	bei 30 Th. $m''' = +0{,}594$	bei 50 Th. $m^{V} = +0{,}419$
„ 20 „ $m'' = +0{,}113$ „	„ 40 „ $m^{IV} = +0{,}675$	„ 60 „ $m^{VI} = 0.$

Ebenso wurde der Werth des Intervalls zwischen dem ersten und dem dritten Striche der Hülfsplatte auf verschiedenen Stellen des Schraubenganges gemessen und es hat sich ergeben:

Werth des Intervalls:

zwischen 0 u. 20 Th.	20 u. 40	40 u. 60 Th.
$\alpha'_1 = 19{,}612$	$\alpha''_1 = 18{,}947$	$\alpha'''_1 = 20{,}091$ Th.

im Mittel $j_1 = 19{,}550$ Th.; $m'' = -0{,}062$; $m^{IV} = +0{,}541$ Th.

Endlich wurde das Intervall zwischen dem ersten und vierten Strich der Hülfsplatte bestimmt und man bekam:

Werth des Intervalls zwischen:

0 und 30 Th.	30 und 60 Th.
$\alpha'_2 = 29{,}505$	$\alpha''_2 = 30{,}513$

im Mittel $j_2 = 30{,}009$; $m''' = +0{,}504$ Theile.

Die Correction wird am besten bestimmt, wenn sie unmittelbar aus der Messung folgt; setzen wir den Fehler jeder Messung gleich $\pm f$, so ist der Fehler einer Bestimmung, welche aus der Summe von n unmittelbar abgemessenen Grössen abgeleitet wird, gleich $\pm f \,.\, \sqrt{n}$, ihre Gewichte verhalten sich also wie $n : 1$. Es entsteht auf diese Weise folgende Tabelle, welche die Correctionen für verschiedene Ablesungen am Schraubenkopfe und die ihnen zugehörigen Gewichte angiebt:

Reihe	Corr. bei 10 Th.	Corr. bei 20 Th. Gew.	Corr. bei 30 Th. Gew.	Corr. bei 40 Th. Gew.	Corr. bei 50
I	$m' = -0{,}094$	$m'' = +0{,}112$ . . 1	$m''' = +0{,}593$ . . 1	$m^{IV} = +0{,}675$ . . 1	$m^{V} = +0{,}419$
II		$-0{,}062$ . . 2		$+0{,}541$ . . 4	
III			$= +0{,}504$ . . 3		
Wahrsch. Werth		$m'' = -0{,}004$	$m''' = +0{,}526$	$m^{IV} = +0{,}568$	

Man hat nun:

für $u = \omega = 0$, die Correction $0 = c + a'$

„ $u = \omega = 60°$ „ „ $m' = -0{,}094 = c + 0{,}5 \,.\, a' + 0{,}866 \,.\, b'$,

„ $u = 2\omega = 120°$ „ „ $m'' = -0{,}004 = c - 0{,}5 \,.\, a' + 0{,}866 \,.\, b'$,

„ $u = 3\omega = 180°$ „ „ $m''' = +0{,}526 = c - a'$,

„ $u = 4\omega = 240$ „ „ $m^{IV} = +0{,}568 = c - 0{,}5 \,.\, a' - 0{,}866 \,.\, b'$,

„ $u = 5\omega = 300$ „ „ $m^{V} = +0{,}419 = c + 0{,}5 \,.\, a' - 0{,}866 \,.\, b'$.

Jeder von diesen Gleichungen gehört ein verschiedenes Gewicht; sind aber die Messungen gut ausgeführt, so verliert man wenig von der Zuverlässigkeit der Resultate, wenn auf die Verschiedenheit der Gewichte keine Rücksicht genommen wird, was desto eher erlaubt ist, da die Gewichte nicht sehr verschieden ausfallen. Man kann also c, a' und b' berechnen, so wie auf der Seite 167 erklärt wurde; man bekommt auf diese Weise:

$c = -a' = +0{,}239$ mit dem Gewicht 2

$= +0{,}228$ „ „ „ 1

Wahrscheinlicher $c = -a = +0{,}235$ Th.; $b' = -0{,}318$ Theil.

Da ein Theil am Schraubenkopf $= 2''$ war, so wird $c' = -0'',470$ und $b' = -0'',636$ in Secunden ausgedrückt; folglich ist die Correction y, welche irgend einem Drehungswinkel u der Schraube entspricht, überhaupt

$$y = +0'',470 - 0'',470 \cos u - 0'',638 \sin u$$
$$= 0'',47 + 0'',79244 \sin (216^\circ \, 22'7 + u).$$

Ueber den Einfluss der Neigung der Umdrehungsachse und des Collimationsfehlers des Fernrohrs auf die Messung horizontaler Winkel.

73. Gewöhnlich ist die Neigung der Horizontalachse sehr klein, und wir werden sie daher gleich J Bogensecunden setzen, wo J keine zu grosse Zahl bedeutet..

Wenn die optische Achse des Fernrohrs hierbei keinen Collimationsfehler hat, oder mit anderen Worten senkrecht auf der Umdrehungsachse des Fernrohrs steht, so wird sie bei der Bewegung des Fernrohrs um diese zweite Achse herum einen grossen Kreis QSB (Fig. 25, Taf. I) an der Himmelssphäre beschreiben. Dieser grosse Kreis wird durch den beobachteten Gegenstand S hindurchgehen, und vom Zenithe Z um einen Bogen $ZQ = J$ abstehen, welcher auf QSB senkrecht steht. Es sei ferner B der Durchschnittspunkt des Kreises QSB mit demjenigen Kreise, welcher um J Bogensecunden gegen den Horizont geneigt ist, und es sei A der Punkt dieses Kreises, in welchem er vom Verticalkreis ZSA getroffen wird, der durch den Gegenstand S geht. Wäre nun die Neigung J nicht vorhanden, so würde die optische Achse des Fernrohrs die Ebene

ZSA beschreiben, und folglich drückt der Bogen $AB = \eta$ die Correction der Vernierangaben aus, welche von der Neigung der horizontalen Umdrehungsachse gegen den Horizont abhängt. Wegen der Kleinheit von J kann man annehmen, dass $QS = ZS =$ der Zenithdistanz z des beobachteten Gegenstandes S ist, und ebenso auch $SB = SA = 90° - z$, so dass man aus der strengen Gleichung $\sin S = \frac{\sin J}{\sin QS} = \frac{\sin AB}{\sin SB}$ folgenden hinlänglich genauen Ausdruck bekommen wird:

$$\eta = J \operatorname{cotg} z.$$

Auf den Horizontalkreisen der von uns beschriebenen Instrumente wächst die Gradtheilung ununterbrochen nach der rechten Seite zu, von 0° bis 360° fort, und zwar auf dem vom Beobachter abgewandten Rande des Kreises. Liegt also das rechte Ende der Umdrehungsachse höher wie das linke, so muss die Ebene, welche die Hauptgesichtslinie bei der Bewegung des Fernrohrs um jene Achse beschreibt, dem sogenannten Horizontalkreise des Instruments bei einem grösseren Gradtheile begegnen, als wenn die Achse gar keine Neigung gegen den Horizont hätte; subtrahirt man daher $J \operatorname{cotg} z$ von den abgelesenen Graden, Minuten und Secunden, so wird der aus der Neigung der Achse entstehende Fehler eliminirt. Im entgegengesetzten Falle, d. h. wenn das linke Ende der Umdrehungsachse das höhere ist, muss eben so viel ($J \operatorname{cotg} z$) addirt werden. Bei Beobachtungen terrestrischer Gegenstände, deren Zenithdistanzen immer nahe an 90° sind, beträgt die Correction so wenig, dass sie vernachlässigt werden kann; bei Beobachtungen der Gestirne aber können die Zenithdistanzen ziemlich klein sein und der Einfluss der Neigung der Achse muss also in Betracht gezogen werden.

74. Bei dem beschriebenen Universalinstrumente ist das Fernrohr an der äusseren Seite der Umdrehungsachse angebracht, und kann daher alle Richtungen vom Zenith bis Nadir durchlaufen; mithin kann man auch in gewissen Lagen des Instruments die Neigung der Umdrehungsachse ohne Hülfe des Niveaus finden, indem

man sich hierzu nur eines künstlichen Horizonts zu bedienen braucht, welcher aus einer flachen Schale besteht, die mit irgend einer Flüssigkeit z. B. mit Quecksilber angefüllt ist, und dadurch eine horizontale spiegelnde Ebene darbietet.

Das Bild des Gegenstands in einem Spiegel, und der Ort, welchen es im Raume einnimmt, befinden sich immer in einer Ebene, die senkrecht auf der Spiegelfläche steht und durch das Auge des Beobachters und den Gegenstand hindurchgeht; folglich wird das gespiegelte Bild eines Sterns im Quecksilberhorizonte ganz genau in demselben Verticale liegen, in welchem sich der Stern befindet, und wenn wir daher das Fernrohr um eben so viel unter den Horizont senken, als der Stern wirklich hoch über dem Horizonte steht, so wird dadurch das Bild des Sterns in der Richtung des Fernrohrs liegen müssen. Wenn nun der Stern unbeweglich bleibt, auch die Umdrehungsachse des Fernrohrs vollkommen horizontal wäre, und man stellte zuerst den Verticalfaden des Fernrohrs auf den Stern selbst ein, so würde man dann (wenn das Objectivende des Fernrohrs um eben so viel nach unten gesenkt würde, als es vorher, während es auf den Stern selbst gerichtet war, über dem Horizont stand) das Bild des Sterns im Quecksilberhorizonte an ganz demselben Verticalfaden, wie vorher bei der directen Beobachtung des Sterns erblicken; falls aber die Umdrehungsachse des Fernrohrs gegen den Horizont geneigt ist, so werden wir finden, dass das Bild des Sterns, seitwärts vom Faden abstehen wird. Wählt man nun einen Stern der so nahe am Pole des Aequators ist, dass er in einer kurzen Zeit sehr wenig seinen Ort ändert, so kann man aus den Einstellungen auf den Stern selbst und auf sein gespiegeltes Bild im Quecksilberhorizonte sehr scharf bestimmen, ob die Neigung der Umdrehungsachse mit der Horizontallinie zusammenfällt oder nicht. Sobald eine Neigung stattfindet, kann man sie beinahe gänzlich wegschaffen, indem man durch eine passende Drehung der Fussschrauben am Dreifusse den Verticalfaden im Fernrohre dem Bilde des Sterns im Quecksilberhorizonte um seinen halben

stattfindenden Abstand nähert. Der Polarstern (*α Ursae minoris*) ist vorzüglich zu dieser Art von Beobachtungen geeignet wegen seiner äusserst langsamen Bewegung und seiner Helligkeit; übrigens wird man, anstatt ihn unbeweglich anzunehmen, besser auf folgende Weise verfahren, und dabei wollen wir annehmen, dass das Instrument fünf Verticalfäden enthält, deren Intervalle vom Mittelverticalfaden ganz genau bekannt sind. Nun beobachtet man den Durchgang des Polarsterns zuerst direct durch den ersten Faden, darauf richtet man das Objectiv nach unten, und beobachtet den Antritt des gespiegelten Bildes des Sterns im künstlichen Horizonte, an den zweiten, dritten und vierten Faden; endlich richtet man das Fernrohr wieder auf den Stern selbst, und beobachtet seinen Antritt direct an den fünften Faden. Aus den Beobachtungen der Antritte des directen Bildes des Sterns an den ersten und fünften Faden, leitet man vermöge der bekannten Fädenintervalle den Durchgang durch den Mittelfaden her; es sei die Mittelzahl für beide Fäden beim directen Bilde $= T$; ferner kann man ebenso die Antritte des gespiegelten Bildes an den zweiten, dritten und vierten Faden, auf den Mittelfaden reduciren; es sei die Mittelzahl für diesen Durchgang $= T'$; dann wird es leicht sein, aus der Differenz $T' - T$ den genauen Werth der Neigung der Umdrehungsachse des Fernrohrs zu finden.

Hierzu wollen wir den speciellen Fall annehmen, dass das Instrument nahe im Meridiane aufgestellt sei, und es sei $S'Hs''$ (Fig. 26, Taf. I) der grösste Kreis des Instruments, der östlich vom Zenithe um die Entfernung $15i$ absteht und den Horizont im Punkte H schneidet; zieht man nun den Verticalkreis ZH, welcher gleiches Azimuth mit dem Kreise $S'Hs''$ hat, so kann man annehmen, dass der Polarstern an den Kreis $S'Hs''$ im Punkte S', an den Verticalkreis ZHs im Punkte S tritt. Mit Rücksicht auf § 64, S. 152 und ganz dieselbe Bezeichnung wie dort beibehaltend, finden wir, dass um den Meridian herum, der Stern, um vom Punkte S' nach S zu gelangen, eine Zeit

$= k$ braucht, die durch folgende Formel gefunden werden kann, nämlich:

$$k = \pm\, i\,.\,cos\, z\,.\,sec\, \delta$$

Bei einer bedeutenden Entfernung vom Meridiane wird:

$$k = \pm\, i\,.\,cos\, z\,.\,sec\, \delta\,.\,sec\, q,$$

wo z die Zenithdistanz, δ die Declination und q den parallactischen Winkel des Sterns für die Zeit der Beobachtung bezeichnet. Wenn das reflectirte Bild des Sterns an die Verlängerung des grössten Kreises $S'H$ unter dem Horizonte tritt, so wird der Stern sich in s'' befinden, und die Zeit k', welche das Bild eines dem Meridiane nahen Sterns braucht, um auf den Verlängerungen von dem Punkte s bis zum Punkte s'' zu gelangen, wird offenbar ganz dieselbe sein, als wenn der Stern von S nach S'' gelangt wäre; so dass folglich alsdann:

$$T' - T = 2k;\ \ {}^1/_2\,(T' - T)\, cos\, \delta\, sec\, z = i.$$

Zählt man i positiv, wenn der Kreis, welcher von einem Lichtstrahle beschrieben wird, der durch den Mittelfaden geht, östlich vom Zenithe abgeneigt ist, oder wenn das westliche Ende der Achse höher als das östliche liegt, so muss man $+$ für die obere und $-$ für die untere Culmination nehmen.

Wenn der Polarstern sich ausser dem Meridiane befindet, so wird i mit hinreichender Genauigkeit durch die Formel:

$$i = \pm\, {}^1/_2\,(T' - T)\, cos\, \delta\, cos\, q\, sec\, z$$

berechnet, wo $+$ dann gebraucht wird, wenn der Stern sich zwischen seiner grössten Abweichung vom Meridiane und der oberen Culmination befindet, das Zeichen ($-$) wird dagegen im entgegengesetzten Falle gebraucht.

Das Niveau giebt gewiss das bequemste Mittel zur Bestimmung der Neigung der horizontalen Umdrehungsachse an die Hand; die eben erläuterte Methode aber kann angewandt werden, um diejenige Correction der Neigung, welche von der Ungleich-

heit der Zapfen abhängt, beim Universalinstrumente zu bestimmen. Hierzu beobachtet man nämlich den Polarstern und sein gespiegeltes Bild im Quecksilberhorizonte, zugleich aber bestimmt man auch die Neigung der Umdrehungsachse mittelst des Niveaus. Der Unterschied zwischen dieser letzteren Neigung, und der aus der Beobachtung des Polarsterns und seines gespiegelten Bildes gefolgerten, giebt uns die Berichtigung der Neigung, so wie sie unmittelbar an dem Niveau abgelesen wird.

Statt des Polarsterns kann man ebenfalls hierzu den Stern *δ Ursae minoris*, oder einen anderen hellen Stern benutzen, der nahe am Pole ist.

75. Die Berichtigung des Fernrohrs in Bezug auf den Brennpunkt und die Lage der Fadenplatte geschieht mittelst verschiedener Schrauben, die sich in der Ocularröhre befinden, und welche wir bei Beschreibung der Instrumente mehrmals näher erklärt haben.

Um den Collimationsfehler der Hauptgesichtslinie des Fernrohrs des Universalinstruments mit Hülfe der Vernier- oder Mikroskopablesungen am Horizontalkreise zu bestimmen, ist es nöthig, in einer gehörigen Entfernung vom Instrumente ein Signal aufzustellen, an welchem sich zwei weisse Kreise, oder auch zwei weisse Rechtecke auf schwarzem Grunde befinden, die so angebracht sind, dass die halbe horizontale Entfernung ihrer Mitten genau gleich dem Abstande der Mitte des Fernrohrs von der Mitte der horizontalen Umdrehungsachse ist; alsdann stellt man den mittleren Verticalfaden des Fernrohrs zuerst auf den rechtsliegenden Kreis ein, wenn nämlich das Fernrohr sich auf der rechten Seite des Beobachters befindet, und liest die Mikroskope ab; dann dreht man den oberen Theil des Instruments um 180°, und richtet den mittleren Verticalfaden auf den linksliegenden weissen Kreis, und liest die Mikroskope wieder ab. Findet man dann, dass der Unterschied der beiden Angaben, welche den beiden verschiedenen Lagen des Instruments entsprechen, genau = 180° ist, so wird auch der Collimationsfehler = 0 sein;

findet man dagegen diesen Unterschied $= 180° \pm C''$, so muss der Collimationsfehler $= \pm \frac{1}{2} C''$ sein. Wenn man aber kein auf solche Weise eingerichtetes Signal hat, und nur irgend einen terrestrischen Gegenstand anstatt dessen beobachtet, so wird der Lichtstrahl, welcher von diesem Gegenstande bei beiden Lagen des Fernrohrs rechts und links vom Beobachter an den Mittelverticalfaden tritt, einen Winkel bilden, dessen Scheitel am beobachteten Gegenstande liegen wird, und dessen Werth in Bogensecunden ausgedrückt $= \frac{2e}{E \sin 1''}$ sein wird; hier bezeichnet e den Abstand der Mitte des Fernrohrs von der Mitte der horizontalen Umdrehungsachse und E drückt die Entfernung des Instruments in demselben Längenmasse wie e angegeben, vom beobachteten Gegenstande aus.

Wir wollen annehmen, dass, wenn das Fernrohr auf den Gegenstand eingestellt war und sich zur linken drehte, der Verticalkreis sich also auf der rechten Seite des Beobachters befand, die Angabe des Mikroskops am Horizontalkreise $= N$ war; und ebenso sei M die Ablesung, als das Fernrohr auf der rechten Seite war; da nun bei den beschriebenen Instrumenten die Theilung von der linken zur rechten auf dem vom Beobachter abgewandten Theile des Kreises zunimmt, so folgt:

$$n = N \frac{e}{E \sin 1''}; \qquad m = M + \frac{e}{E \sin 1''}$$

n und m bedeuten hierbei die Ablesungen, welche die Mikroskope am Horizontalkreise angeben würden, wenn das Fernrohr sich genau auf der Mitte der horizontalen Umdrehungsachse befände; wenn also kein Collimationsfehler stattfände, so wäre auch nothwendig

$$n = m \mp 180°;$$

wenn aber diese Bedingung nicht erfüllt wird, so muss offenbar der Werth $\frac{1}{2} [n - (m \mp 180°)]$ den Collimationsfehler ausdrücken; es versteht sich von selbst, dass man $m + 180°$ dann nehmen

muss, wenn N grösser als M ist, und $m - 180°$ im entgegengesetzten Fall.

Dieses lehrt uns eine sehr einfache Methode, wie man den Werth des Collimationsfehlers aus der Beobachtung eines terrestrischen Gegenstandes finden kann, wenn dessen Entfernung vom Instrumente gut bekannt ist.

Beispiel. Es wurde ein Signal beobachtet, welches von der Mitte des Universalinstruments um 12960 englische Zoll abstand; und dabei fanden sich folgende Mittelzahlen aus den Ablesungen der Verniere am Limbus des Horizontalkreises des Instruments:

$116°29'38'' = N$, als der Verticalkreis sich auf der rechten befand,
$296°29'56'' = M$, „ „ „ „ „ „ linken „ .

Der Abstand der Mitte des Fernrohrs von der Mitte der horizontalen Umdrehungsachse war $= e = 4{,}58$ englische Zoll; so dass also hier: $E = 12960$; $\frac{e}{E \sin 1''} = 7,''3$, folglich:

$$M + \frac{e}{E \sin 1''} = 296°29'56'' + 7'',3 = m = 296°30'\ 3'',3$$

$$N - \frac{e}{E \sin 1''} = 126°29'38'' - 7'',3 = n = 116°29'30'',7$$

und daher endlich der Collimationsfehler

$$= \left\{\frac{(m - 180°) - n}{2}\right\} = 16'',3 \text{ in Bogen.}$$

In diesem Falle verkleinerte der Collimationsfehler die Vernierablesungen in dem Falle, wenn der Verticalkreis sich auf der rechten Seite des Beobachters befand, und vergrösserte sie, als dieser Kreis links lag; um daher den Einfluss des Collimationsfehlers auf die Ablesungen der Verniere am Horizontalkreise zu vernichten, muss man hier im ersten Falle (Kreis rechts) zu diesen Angaben 16'',3 in Bogen hinzufügen, im zweiten Falle (Kreis links) aber abziehen.

Wenn der Collimationsfehler gar zu gross wird, so wird

man ihn wegschaffen müssen; hierzu beobachtet man einen terrestrischen Gegenstand, indem man die Ablesung N der Verniere oder Mikroskope am Horizontalkreise in demjenigen Falle aufschreibt, wenn der Verticalkreis sich rechts befindet, und darauf das Instrument so umdreht, dass der Kreis links liegt. Der Vernier am Horizontalkreise wird aber alsdann $N + 180° - \frac{2e}{E \sin 1''}$ oder $N - 180° - \frac{2e}{E \sin 1''}$ zeigen, und folglich wird man dann den Gegenstand in einem Abstande vom mittleren Verticalfaden erblicken, der gleich dem doppelten Collimationsfehler ist; bewegt man darauf das Fadennetz um die Hälfte dieser Entfernung dem Gegenstande näher, so wird also dadurch der Collimationsfehler verschwinden müssen. Diese Bewegung wird leicht vermittelst der Wirkung einiger kleiner Schrauben bewerkstelligt, welche sich am Oculare des Fernrohrs des Universalinstruments befinden, und welche den Ort der Fadenplatte seitlich ändern.

Wir wollen jetzt untersuchen, welchen Einfluss der Collimationsfehler auf die Ablesungen der Verniere (Mikroskope) am Horizontalkreis ausübt. Es sei Z das Zenith, $A\,B\,C$ der Horizontalkreis des Instruments (Fig. 27, Taf. I); $Z\,A$ ein grösster Kreis der Himmelssphäre, welcher von der Linie beschrieben wird, welche senkrecht auf der horizontalen Umdrehungsachse des Fernrohrs steht; $S'B$ ein mit ihm paralleler kleiner Kreis, welchen der Lichtstrahl beschreibt, der durch das Objectiv nach dem Mittelfaden geht; wir wollen auch dabei noch annehmen, dass dieser kleine Kreis $S'B$ von dem ihm parallelen grössten Kreise ZA, um den senkrechten Bogen $A\,B = c$ absteht. Wenn nun S der beobachtete Gegenstand ist, so wird man die Theilung auf dem Horizontalkreise $A\,B\,C$ so ablesen, als wenn der Gegenstand sich in S' befände, nämlich nicht, als ob er sich im Verticalkreise ZSA, sondern als ob er sich im Verticale $ZS'C$ befände; folglich wird auch der Bogen $A\,C$, welcher gleich dem Winkel $A\,Z\,C = \beta$ ist, die Aenderung ausdrücken, welche der Collimationsfehler $= c$ auf das Azimuth des Gegenstandes S her-

vorbringt; bezeichnet man nun die Zenithdistanz ZS durch z, so erhält man aus dem sphärischen Dreiecke ZSS', in welchem $SS' = c$ und der Winkel $S' = 90°$ ist:

$$\sin\beta = \frac{\sin c}{\sin z}, \text{ und wenn } c \text{ sehr klein ist: } \beta = \frac{c}{\sin z}.$$

Von der Messung horizontaler Winkel zwischen terrestrischen Gegenständen.

76. Man gebraucht hierbei einen hinreichend festen eisernen oder auch hölzernen Dreifuss als Stativ, um das Instrument aufzustellen. Die Hauptbedingung bei Winkelmessungen überhaupt besteht aber in der Unveränderlichkeit desjenigen Kreises, welcher bei der Umdrehung des Fernrohrs unbeweglich bleiben soll, und welcher daher auch in der That seine Lage in keiner Beziehung ändern darf. Es ist daher nothwendig, sich eine feste Marke (Mire), d. h. einen gut sichtbaren terrestrischen Gegenstand auszuwählen, auf den man öfters im Laufe der Beobachtungen, zum Mindesten aber am Anfang und Schluss derselben das Fernrohr richtet, und durch Ablesung des Horizontalkreises sich von der Unveränderlichkeit der Aufstellung zu überzeugen.

Wir wollen hier die Art und Weise, diese Beobachtungen anzustellen, mit wenigen Worten erläutern, wobei wir aber annehmen wollen, dass das Instrument schon vollkommen nach den Methoden, welche in den früheren Paragraphen erklärt wurden, berichtigt und zugleich mit Hülfe des Niveaus horizontal aufgestellt ist.

Um die verschiedenen Lagen des Instruments zu unterscheiden, muss man beim Anfang der Beobachtungen allemal

aufschreiben, ob der Verticalkreis sich rechts (*K. R*) oder links (*K. L*) vom Beobachter befand. Man dreht dann den obern Theil des Instruments so, dass das Bild des Gegenstands genau an dem Mittelverticalfaden erscheint, oder wenn sich anstatt eines Fadens zwei Mittelverticalfäden im Fernrohre befinden, so stellt man es so, dass das Bild des Gegenstandes in die Mitte des kleinen Rechtecks kommt, welches von den gegenseitigen Durchschnitten der beiden sich nahen Vertical- und Horizontalfäden gebildet wird.

Darauf liest man die Verniere oder Mikroskope ab, richtet dann das Fernrohr auf den zweiten gegebenen Gegenstand und beobachtet auf ähnliche Weise wie vorher. Wenn auf diese Art alle Gegenstände bei einer Lage des Instruments beobachtet worden sind, z. B. beim Verticalkreis links (*K. L*), so dreht man den oberen Theil des Instruments, welcher mit dem Fernrohre verbunden ist, um einen Halbkreis oder 180° herum; alsdann wird sich der Verticalkreis auf der rechten Seite (*K. R*) befinden, und in dieser Lage wiederholt man alle die früheren Beobachtungen, indem man mit demjenigen Gegenstande anfängt, mit welchem man vorher aufhörte. Die Mittel der Ablesungen der Verniere oder Mikroskope zeigen uns auf dem Horizontalkreise des Instruments die Richtungen der Lichtstrahlen an, welche von den beobachteten Gegenständen nach dem Auge des Beobachters gehen; und der Unterschied dieser Mittel wird daher gleich den von uns gemessenen Winkeln zwischen diesen Gegenständen sein. Da nun an den beschriebenen Instrumenten die Ablesung am Horizontalkreise bei der Drehung des Instruments von der linken nach der rechten Seite zunimmt, so muss man, um den gesuchten Winkel zu erhalten, die Richtung des zur linken Hand liegenden Gegenstandes von der Richtung des zugehörigen rechtsliegenden Gegenstandes abziehen. Die halbe Summe der beiden Werthe eines und desselben Winkels, welcher in jeder der beiden Lagen des Instruments erhalten wurde, giebt uns den wahrscheinlichsten Werth des gesuchten Winkels.

77. Es wird nun nicht immer möglich sein, die gegebenen Gegenstände von einem gegebenen Punkte aus zu beobachten; in diesem Falle muss man am gegebenen Punkte ein Signal aufstellen, und nicht weit davon das Instrument auf ein passendes Stativ aufsetzen. Der Winkel zwischen den Gegenständen wird alsdann ebenso gemessen, wie wir es schon oben gezeigt haben; aber ausserdem muss man noch in jeder Lage des Instruments am Horizontalkreise die Richtung beobachten, welche vom Instrumente nach dem eben erwähnten Signale geht, und darauf die Entfernung zwischen dem Instrumente und dem Signale in Fussen oder Zollen ausmessen. Nehmen wir an, dass die Entfernungen der gegebenen Gegenstände vom Beobachtungsorte aus, ebenfalls in Fussen oder Zollen bekannt sind, so wird es leicht sein, die unmittelbaren Beobachtungen, welche für jeden der Gegenstände angestellt wurden, so zu reduciren, als wenn das Instrument gleich anfänglich am gegebenen Punkte aufgestellt worden wäre.

Es sei A (Fig. 28, Taf. I) einer der gegebenen Gegenstände, C derjenige Punkt, an welchem die Beobachtungen gemacht werden sollen, C' aber der Punkt, von welchem aus man wirklich die Richtung $A\,C'$ beobachtet hat, während man eigentlich die Richtung $A\,C$ (aus C beobachtet) braucht. Zieht man nun die Linie $C'A'$ mit $A\,C$ parallel, so wird $A'\,C'$ ebenfalls die gesuchte Richtung darstellen, und daher wird die Berichtigung der gemessenen Richtung $A\,C'$, wenn sie auf die gesuchte Richtung reducirt werden soll, durch den Winkel $A\,C'A' = C\,A\,C' = x$ ausgedrückt werden. Da nun die Linie $A\,C' = E$, $C\,C' = e$ und der Winkel $A\,C'\,C = W$ bekannnt sein werden, so wird man x sehr leicht aus dem Dreiecke $A\,C'\,C$ berechnen können, und dann lässt sich x, weil es gewöhnlich sehr klein ist, ebenso wie e im Verhältniss zu E ebenfalls sehr klein ist, mit genügender Genauigkeit durch folgende Formel in Secunden ausdrücken:

$$x = \frac{e}{E \sin 1''} \cdot \sin W.$$

Immer wird es leicht sein zu schliessen, ob der gefundene Werth der Correction x zur Angabe des Verniers bei der Einstellung des Fernrohrs in C' auf A zuaddirt oder abgezogen werden muss, um die Angabe des Verniers oder Mikroskops zu erhalten, welche stattgefunden hätte, wenn man mit dem Instrumente in C beobachtet hätte; denn hierzu braucht man nur zu wissen, nach welcher Richtung hin die Gradtheilung auf dem Horizontalkreise zunimmt. Wenn der Beobachter sich in C' befindet, und zuerst das Fernrohr auf das Signal C einstellt, und es nachher nach rechts dreht, bis es den Gegenstand A trifft, so dass der Winkel $CC'A$ stets von 0° bis 360° von links nach rechts gezählt, kleiner wie 180° wird, so muss man in diesem Falle die Correction x zur Angabe der Verniere zulegen; wenn aber der Winkel $CC'A = W$ grösser als 180° ausfällt, so muss man x abziehen; denn im ersten Falle wird $\sin W$ positiv, im zweiten aber negativ, so dass man also für die von uns beschriebenen Instrumente folgende allgemeine Regel aufstellen kann: die Correction $+\frac{e}{E \sin 1''} \cdot \sin W$ ist immer zur Mikroskopangabe zuzuaddiren; der Winkel W wird fortwährend von 0° bis 360° gezählt, indem man die Zählung von C aus nach A fortsetzt und der Richtung von links nach rechts folgt; alsdann entscheidet das Zeichen bei $\sin W$, ob die Correction positiv oder negativ zu nehmen ist.

Wenn von C' aus noch ein anderer Gegenstand B beobachtet wird, so muss man für diesen auf ganz dieselbe Weise die Correction $y = CBC' = BC'B'$ berechnen, indem angenommen ist, dass die Linie $C'B'$ parallel mit der Linie CB ist. Der Unterschied der so verbesserten Richtungen bestimmt alsdann den Werth des gesuchten Winkels ACB, wofür wir $AC'B + y - x = ACB$ erhalten, wenn B rechts von A liegt.

Beobachtung des horizontalen Winkels zwischen einem Gestirne und einem terrestrischen Gegenstande.

78. Die oben auseinandergesetzten Regeln müssen auch in diesem Falle genau beobachtet werden; nur dass hier noch dazu kömmt, dass man bei jeder Beobachtung ganz genau die Zeit aufschreiben muss, weil der Winkel zwischen einem Gestirne und einem terrestrischen Gegenstande sich fortwährend ändert.

Man richtet das Fernrohr nahe auf den Stern, entweder nach blossem Augenmasse (am Universalinstrumente mit Hülfe der Diopter), wenn nämlich der Stern recht hell ist, oder noch zuverlässiger dadurch, dass man sich erst vorläufig eine kleine Ephemeride berechnet, welche das Azimuth des Sterns und seine Zenithdistanz mit der Zeit als Argument für den bestimmten Beobachtungsort giebt*). Darauf richtet man das Fernrohr so, dass der Stern in dem Gesichtsfelde des Fernrohrs zwischen den beiden Horizontalfäden erscheint, und zugleich so, dass der Stern sich durch seine scheinbare tägliche Bewegung dem mittleren Verticalfaden zu nähern scheint. Darauf zieht man die Druckschraube am Horizontalkreise fest an, und lässt auch die an ihm befindliche Mikrometerschraube in Ruhe, indem man nur fortwährend die Neigung des Fernrohrs gegen den Horizont ändert, damit der Stern immer in der Mitte zwischen den Horizontalfäden bleibt. Nach dem Gehör passt man nun auf die Schläge des Chronometers, und sieht mit dem Auge durch das Fernrohr nach dem Sterne, indem man in demjenigen Augenblicke bei einem gewissen Schlage des Chronometers Null zählt, wenn der Stern sich so sehr nahe am Mittelverticalfaden befindet, dass er

*) Es versteht sich von selbst, dass man in diesem Falle den Ort des Meridians auf dem Horizontalkreise und den Ort des Zeniths auf dem Verticalkreise des Instruments ziemlich genähert wissen muss.

bei dem unmittelbar darauf folgenden Schlage der Unruhe schon auf der anderen Seite des Fadens sich befinden wird. Es wird nämlich hierbei die genaue Zeit des Durchgangs durch den Mittelfaden auf ganz dieselbe Weise beobachtet, wie wir schon in § 59, S. 137 u. 138 erwähnt haben.

Wenn anstatt eines Mittelfadens sich zwei sehr nahe an einander aufgespannte Verticalfäden in der Mitte des Gesichtsfeldes befinden, so beobachtet man die Zeit, wenn der Stern genau in der Mitte des Raumes zwischen beiden Fäden ist, welches bei einiger Vorsicht mit genügender Genauigkeit geschehen kann.

Beim Anstellen dieser Beobachtungen muss man auf das Niveau, welches sich an der horizontalen Umdrehungsachse des Fernrohrs befindet, gehörig Acht geben, damit man bei jeder einzelnen Einstellung des Sterns auch die genaue Neigung dieser Achse gegen den Horizont kennt.

Sobald man die Beobachtungen in einer Lage des Instruments, wenn z. B. der Verticalkreis sich nordöstlich befand, beendigt hat, dreht man den oberen Theil des Instruments, mit welchem das Fernrohr verbunden ist, um 180° horizontal herum, und stellt nun in dieser neuen Lage des Instruments (wenn der Verticalkreis südwestlich war) eine neue Reihe von Beobachtungen an, deren Anzahl immer dieselbe mit der früheren Reihe sein sollte.

Bei jeder Lage des Instruments muss man wenigstens zwei Beobachtungen des irdischen Gegenstandes und zwei Beobachtungen des Sterns machen, so dass also auf diese Weise die vollständige Reihenfolge dieser Messungen, welche Azimuthalmessungen heissen, im Folgenden bestehen wird:

I. Lage des Instruments, oder Verticalkreis im Nordosten.

1) Zwei Beobachtungen des gegebenen terrestrischen Gegenstandes (angestellt mit umgekehrten Einstellungen der Mikrometerschraube).

2) Bestimmung der Neigung der horizontalen Umdrehungsachse, vermittelst des Niveaus.
3) Zwei Beobachtungen des Gestirns.
4) Bestimmung der Neigung der horizontalen Umdrehungsachse.

II. Lage des Instruments, oder Verticalkreis im Südwesten.

1) Bestimmung der Neigung der horizontalen Umdrehungsachse.
2) Zwei Beobachtungen des Gestirns.
3) Bestimmung der Neigung der horizontalen Umdrehungsachse.
4) Zwei Beobachtungen des gegebenen terrestrischen Gegenstandes.

Wenn die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse $= i$ und der Collimationsfehler $= c$ ist, so erhält man bei einer Zenithdistanz des Gestirns $= z$ folgende Correctionen:

$$\pm\, i \, cotg\, z \quad \text{und} \quad \pm\, c \, cosec\, z,$$

welche die Berichtigungen ausdrücken, die man an die Ablesungen des Horizontalkreises anbringen muss, um sie so zu reduciren, als wenn $i = 0$ und $c = 0$ stattfände; über die Wahl der passenden Zeichen haben wir schon näher (§ 73 und 74, S. 179 und 182) gesprochen; den Werth und das Zeichen des Collimationsfehlers kann man ferner leicht aus der Beobachtung eines terrestrischen Gegenstandes finden.

79. Bei Sonnenbeobachtungen bemerkt man noch ausserdem den Durchgang beider Sonnenränder durch den Mittelfaden; hat aber das Netz in der Mitte zwei verticale, einander sehr nahe Fäden, und befindet sich die Sonne nicht gar zu weit ausserhalb des Meridians, so kann man ohne grossen Fehler die Zeit des Durchgangs des Sonnenrands durch die Mitte des Raumes zwischen beiden Fäden dem arithmetischen Mittel der beobachteten Durchgänge des Sonnenrandes durch jeden der beiden Fäden gleichsetzen.

Wenn man irgend einen Rand der Sonne beobachtet hat, und wir bezeichnen den Winkelhalbmesser der Sonne ebenso, wie er aus den Tafeln oder Ephemeriden gefunden wird, durch $r\odot$, und drücken alsdann die Zenithdistanz des Centrums der Sonne durch z aus, so muss man $\pm \frac{r\odot}{\sin z}$ zur Angabe der Mikroskope am Horizontalkreise hinzulegen, um den ihnen entsprechenden Stand für das Centrum des Gestirns zu erhalten. Bei den beschriebenen Instrumenten muss man (+) alsdann gebrauchen, wenn der zweite oder der nachfolgende Rand der Sonne beobachtet worden ist, dagegen (—), wenn der erste oder vorhergehende Rand beobachtet wurde. In schwachen Fernröhren erscheint der Radius der Sonne (wegen Irradiation) etwas grösser, als er wirklich sein sollte, und daher muss man, um diesen Fehler zu umgehen, beide Ränder der Sonne beobachten.

Beobachtet man bei Tage, so muss man das ganze Instrument in den Schatten stellen, um die Einwirkungen zu vermeiden, welche sonst die Erwärmung durch Sonnenstrahlen auf den Stand des Niveaus und die Lage des Instruments haben würden; es ist also gut, unter einem Zelte zu beobachten, welches an derjenigen Stelle, an welcher der zu beobachtende Gegenstand sich befindet, eine passende Oeffnung hat; alsdann wird das Instrument nicht nur vor dem directen Einflusse der Sonnenstrahlen, sondern auch gegen Erschütterungen durch den Wind geschützt sein.

Von der Bestimmung der Zenithdistanzen, sowohl mit dem Verticalkreise, als auch mit dem Universalinstrumente.

80. Aehnlich wie bei der Messung horizontaler Winkel die Mire dazu diente, um die Unveränderlichkeit des Horizon-

talkreises anzuzeigen, so wird jede Aenderung in der Lage des höchsten Punktes am Verticalkreise durch das Sicherheitsniveau angedeutet. Beim Verticalkreise sowohl, wie beim Universalinstrumente ist dieses Niveau am Mikroskopenträger befestigt, und die Richtung der Gesichtslinie, nach dem beobachteten Gegenstande zu, wird immer mit derjenigen Lage des höchsten Punktes am Verticalkreise verglichen, bei welcher die Mitte der Niveauröhre mit der Mitte der Blase zusammenfällt. Wenn aber aus irgend einer Ursache eine kleine Veränderung des Instruments in der Ebene des Höhenkreises stattfindet, so wird die Verstellung des höchsten Punktes durch eine entsprechende Verstellung der Blase gemessen.

Wir wollen z. B. annehmen, dass bei constanter Richtung der Gesichtslinie nach einem irdischen Gegenstande die Blase des Niveaus, in Folge einer Verschiebung des Kreises sich aus der Mitte der Niveauröhre entfernt, und dass die Mikroskope eine zu kleine Zahl an dem Gradbogen angeben. Alsdann muss man die Verstellung der Blase aus der Mitte der Niveauröhre in Secunden ausdrücken und diesen Werth zu der Mikroskopangabe zulegen, um diejenige Ablesung zu bekommen, bei welcher sich die Mitte der Blase in der Mitte der Niveauröhre befindet. Daher entspricht überhaupt eine Seite des Niveaus einer positiven, die andere Seite des Niveaus aber einer negativen Correction. Um diese beiden Seiten von einander zu unterscheiden, bezeichnet man auf der Messingfassung, in welche die gläserne Röhre des Niveaus eingesetzt ist, die eine Seite mit (+), die andere aber mit dem Zeichen (—). Es befinde sich z. B. der **Nullpunkt** der Theilung auf der Mitte der Glasröhre, und von diesem aus nehmen die Zahlen der Niveautheilung nach beiden positiven und negativen Seiten der Röhre zu; es entspreche das eine Ende der Blase dem Striche der Niveautheilung $+a$, das andere aber dem Striche $-b$; und es sei t die Zahl von Secunden, welche in einem Theile des Niveaus enthalten

sind, so wird offenbar $+\frac{a-b}{2}.t$ die Berichtigung ausdrücken, welche man zur Ablesung am Verticalkreise zulegen muss, um diese Ablesung auf die Hauptlage des Limbus zu reduciren. Es ist leicht zu entscheiden, auf welcher Seite des Niveaus man (+), und auf welcher Seite man (—) zählen muss; denn hierzu ist es nur nöthig zu bemerken, dass die Richtung von der negativen Seite des Niveaus nach seiner positiven Seite hin, ganz dieselbe, wie die Richtung der Zunahme der Theilung auf dem obersten Theile des Limbus des Verticalkreises sein muss. Wenn das Niveau nicht am Mikroskopenträger resp. dem Alhidadenkreise, sondern am Limbuskreise befestigt ist, wie dieses bei manchen Instrumenten stattfindet, so muss dagegen die obige Regel umgekehrt werden. Uebrigens ist es immer leicht, sich durch Probiren zu versichern, ob die auf den Niveauenden festgesetzten Zeichen (+) und (—) in Beziehung auf die Mikroskopablesungen der positiven und negativen Seite des Niveaus entsprechen. Hierzu lässt man nämlich die Blase zuerst auf die Mitte der gläsernen Niveauröhre einspielen und richtet das Fernrohr auf irgend einen irdischen Gegenstand; nachdem man nun die Mikroskope abgelesen hat, verändert man, mit Hülfe der hierzu bestimmten Mikrometerschraube die Lage des Mikroskopenträgers resp. des Kreises, an welchem das Niveau befestigt ist, auf solche Weise, dass die Blase nach einer gewissen Seite der Niveauröhre hinläuft; nun richtet man das Fernrohr wieder auf den früheren Gegenstand, und wenn man an den Mikroskopen eine kleinere Ablesung findet, so ist dieses ein Beweis, dass man die Niveaublase nach der positiven Seite hin bewegt hat.

81. Der Winkelwerth eines Niveautheiles lässt sich auch hier in Secunden bestimmen, ebenso wie wir es (§ 39, S. 86 und § 50, S. 104) gezeigt haben; aber hier kann man immer die Zahl von Secunden, welche in einer Umdrehung der Schraube am Fusse des Instruments enthalten sind, noch auf eine andere als auf die dort angegebene Weise herleiten.

Hierzu dreht man den oberen Theil des Instruments um die verticale Achse so, dass das Höhenniveau parallel dem einen Fusse des Instruments wird, und klemmt sowohl die verticale wie die horizontale Achse fest. Wenn nun das Instrument vorher berichtigt war, so wird jetzt die Blase des Höhenniveaus nahezu in der Mitte einspielen. Durch Drehen der Fussschraube, welche an dem dem Niveau parallelen Fusse befestigt ist, bringt man nun die Blase des Niveaus auf die eine (z. B. auf die linke) Seite, doch nur so weit, dass beide Enden noch gut abzulesen sind. Liest man nun sowohl die Mikroskope wie auch das Niveau ab, so ist es klar, dass durch eine kleine Drehung der Schraube q (Taf. IV, Fig. 1 u. 2), welche gegen den mit dem Mikroskopenträger fest verbundenen Arm l drückt, sich das Niveau und die Mikroskope um genau denselben Winkelwerth gegen den Limbus verstellen müssen. Bringt man also durch eine solche Drehung der Schraube q die Blase des Niveaus nach der andern (rechten) Seite, und liest wieder das Niveau und die Mikroskope ab, so erhält man eine Relation zwischen der Niveauänderung und der Aenderung der Kreisablesung, aus welcher der Werth eines Niveautheils leicht abzuleiten ist. Es ist nämlich offenbar

$$1 \text{ Niveautheil} = \frac{\text{Aenderung der Kreisablesung}}{\text{Aenderung der Niveauablesung}}.$$

Will man die Bestimmung genau erhalten, so ist es nothwendig, sie mehrfach zu wiederholen. Dabei braucht man indessen nicht nach jeder Drehung der Schraube q die Mikroskope abzulesen. Hat man nämlich, wie oben angegeben, die Blase nach rechts gebracht und ihre Stellung abgelesen, so bringt man sie durch Drehung der Fussschraube wieder nach der linken Seite zurück, wobei die Stellung der Mikroskope gegen den Limbus ungeändert bleibt; liest dann wieder das Niveau ab, und bringt die Blase dann wieder durch Drehung der Schraube q nach rechts. Liest man jetzt sowohl die Mikroskope und das Niveau ab, so wird die Gesammtänderung der ersteren Ablesung

offenbar gleich der Summe derjenigen Aenderungen des Niveaus sein, welche in der Richtung von links nach rechts stattgefunden haben. Auf diese Weise kann man die Messungen vielfach wiederholen, wobei es klar ist, dass die Mikroskope nur am Anfange und Ende der ganzen Messungsweise abgelesen zu werden brauchen. In ganz entsprechender Weise geschieht die Bestimmung am Verticalkreise mit Hülfe der Schraube τ (Taf. III, Fig. 1).

Beispiel. An einem Pistor- & Martins'schen Universalinstrumente ergab das Mittel der Ablesungen des Höhenkreises folgendes Resultat:

$$270^\circ 49' 6''.$$

			Diff.			Diff.
Die Ablesung des Niveaus war dabei	links	$3^{t},9$,		rechts	$23^{t},0$	
Nach Drehung der Schraube q stand die Blase des Niveaus	„	18,9	15,0	„	38,0	15,0
Durch Drehung der Fussschraube wurde die Blase zurückgebracht; es wurde abgelesen .	„	3,9		„	23,0	
Darauf nach Drehung von q .	„	18,8	14,9	„	38,0	15,0
Nach Drehung der Fussschraube	„	3,7		„	23,0	
Nach Drehung von q	„	18,7	15,0	„	38,0	15,0
Nach Drehung der Fussschraube	„	5,5		„	25,5	
Nach Drehung von q	„	19,0	13,5	„	39,0	13,5
Nach Drehung der Fussschraube	„	5,4		„	25,6	
Nach Drehung von q	„	18,7	13,3	„	39,1	13,5
Nach Drehung der Fussschraube	„	5,5		„	25,9	
Nach Drehung von q	„	18,7	13,2	„	39,1	13,2

Hierauf wurden die Mikroskope abgelesen, und es fand sich im Mittel:

$$270^\circ 39' 41''.$$

Die Gesammtänderung des linken Endes der Blase in der Richtung von links nach rechts war demnach

$$= 15,0 + 14,9 + 15,0 + 13,5 + 13,3 + 13,2 = 84,9$$

Theile des Niveaus,

und die des rechten Endes

$$= 15,0 + 15,0 + 15,0 + 13,5 + 13,5 + 13,2 = 85,2$$

Theile des Niveaus.

Die Aenderung der Niveaublase also im Mittel

$$= \tfrac{1}{2}\,(84,9 + 85,2) = 85,05.$$

Derselben entsprach die Aenderung der Mikroskopablesung

$$= 270^\circ 49' 6'' - 270^\circ 39' 41'' = 9' 25'' = 565''$$

und es ist demnach der Werth eines Niveautheiles

$$= \frac{565''}{85,05} = 6'',64.$$

82. Es bleibt nur noch übrig zu zeigen, auf welche Weise man Zenithdistanzen misst, und zur grösseren Einfachheit wollen wir dabei annehmen, dass die zu beobachtenden Gegenstände unbewegliche oder terrestrische Objecte sind.

Wir wollen hierbei annehmen, dass das Instrument schon in jeder Beziehung berichtigt und auf gehörige Weise mittelst des Niveaus aufgestellt worden ist. Man bemerkt sich alsdann, bei welcher Lage des Höhenkreises die Beobachtungen anfangen, d. h. entweder Verticalkreis rechts, oder Verticalkreis links vom Beobachter, richtet darauf das Fernrohr aus freier Hand auf den zu beobachtenden Gegenstand und zieht dann die Druckschraube fest an. Darauf macht man vermittelst der Mikrometerschraube eine genaue Einstellung der Fernrohrs auf solche Weise, dass dadurch das Bild des Gegenstandes, von oben nach unten, dem Horizontalfaden in der Mitte des Fernrohrs näher kommend, genau in die Mitte des Raumes zwischen die beiden Horizontalfäden gebracht wird; dann liest man die Lage der beiden Enden der Blase ($+a$ und $-b$) an dem Höhenniveau ab, und schreibt zugleich die Angaben der Mikroskope an diesem Kreise auf, indem man nur beim ersten Mikroskope die Grade abzulesen braucht, die Minuten und Secunden aber an beiden. Sobald diese erste Beobachtung des Gegenstandes beendigt ist, macht man eine zweite auf solche Weise,

dass hierbei durch die Drehung der Fernrohr-Mikrometerschraube das Bild des Gegenstandes sich den beiden Horizontalfäden von unten nach oben nähert und wiederum genau in die Mitte zwischen diese beiden Fäden kommt; dann liest man die Blasenenden am Niveau ab, und auch die Angaben der Mikroskope. Verbessert man darauf die Ablesungen, welche bei der ersten und zweiten Einstellung des Gegenstandes erhalten wurden, für ihre entsprechenden Niveauangaben, und nimmt darauf ihre halbe Summe, so erhält man das Mittel der Ablesungen bei der ersten Lage des Instruments. Alsdann dreht man den oberen Theil des Instruments um einen Halbkreis oder 180° in horizontaler Richtung herum, wodurch der Verticalkreis sich nun in der entgegengesetzten Lage befinden wird, z. B. von der linken Seite nach der rechten Seite des Beobachters zu, und in dieser neuen Lage des Instruments wiederholt man die Messungen noch ein Mal, indem man zwei neue Einstellungen durch entgegengesetzte Bewegungen der Mikrometerschraube hervorbringt.

Aus diesen Beobachtungen wird man nun die Zenithdistanz des Gegenstandes $= z$, und auch den Ort des Zeniths auf dem Limbus finden können, d. h. diejenige Angabe $= M$, welche die Mikroskope zeigen werden, wenn die optische Achse des Fernrohrs genau nach dem Zenithe gerichtet wird. Auf den beschriebenen Instrumenten nimmt die Gradtheilung an den Verticalkreisen fortwährend von 0 bis 360°, an dem obersten Theile des unbeweglichen Kreises von rechts nach links zu. Wenn wir daher annehmen, dass die Mittelzahl der schon wegen der Ablesung des Niveaus corrigirten Ablesungen der Verniere oder Mikroskope, bei derjenigen Lage des Instruments, als der Verticalkreis sich für einen Beobachter, der sein Gesicht nach dem Gegenstand wendete, auf der rechten Seite der verticalen Achse befand, $= R$ war, und ferner, als der Verticalkreis sich links befand, $= L$ war, so wird bei den beschriebenen Instrumenten $L > R$ anzunehmen sein, und folglich überhaupt:

$$\textit{Ort des Zeniths} \text{ oder } M = \frac{L+R}{2};$$

$$\textit{Zenithdistanz} \text{ oder } z = \frac{L-R}{2};$$

wenn es nicht möglich sein sollte, die letztere Grösse R von L abzuziehen, so legt man zu L einen ganzen Umkreis oder 360° hinzu; so dass alsdann: $M = \frac{360°+L+R}{2}$, und dann wird in diesem Falle:

$$z = M-R = L-M.$$

Wenn die Theilung am obersten Theile des Kreises ebenfalls von der Rechten nach der Linken zunimmt, aber die Alhidade sich mit dem Fernrohre dreht, während der Kreis fest ist, so muss man offenbar die obige Regel umkehren, und erhält alsdann:

$$z = \frac{R-L}{2} = M-L = R-M.$$

83. Da die Zenithdistanzen der Gestirne sich unaufhörlich ändern, so muss man bei jeder Beobachtung die Zeit aufschreiben. Der Stern wird hierbei entweder in die Mitte der Fäden, oder in die Mitte des kleinen Rechtecks eingestellt, welches von den gegenseitigen Durchschnitten der beiden horizontalen und beiden verticalen Fäden gebildet wird. Wenn man die Sonne beobachtet, so muss man den Ober- oder Unterrand auf solche Weise auf die Mitte der Fäden, oder in das erwähnte kleine Rechteck einstellen, dass eine an diesen Rand horizontal gelegte Tangente den Raum zwischen den beiden Horizontalfäden in zwei gleiche Hälften zu theilen scheint. Wünscht man ausserdem die Zenithdistanz des Centrums eines Gestirns unabhängig von seinem Halbmesser zu finden, welcher in schwachen Fernröhren wegen einiger später zu erwähnenden Ursachen etwas zu gross erscheint, so muss man abwechselnde Beobachtungen des Ober- und Unterrandes in gleicher Anzahl aufstellen. Bei dem Monde wird dieses selten möglich sein, weil man meistens

nur einen Rand des Mondes sehen kann; in diesem Falle erhält man die Zenithsdistanz des Mondcentrums dadurch, dass man zu der beobachteten Zenithdistanz seines Oberrandes den scheinbaren Halbmesser dieses Gestirns zulegt, oder von der Zenithdistanz seines Unterrandes diesen Halbmesser abzieht.

Es versteht sich von selbst, dass die Beobachtungen überhaupt in beiden Lagen des Instruments angestellt werden müssen. In jeder besonderen Lage des Instruments (bei KR und KL) muss man zwei Einstellungen nach zwei entgegengesetzten Richtungen machen; im ganzen also werden vier Beobachtungen gemacht, welche eine vollständige Reihe bilden. Beabsichtigt man eine zweite ähnliche Reihe von Beobachtungen anzustellen, so muss man zwei Einstellungen in einer Lage des Instruments (z. B. bei KL), vier bei der anderen (bei KR) und darauf wiederum zwei Einstellungen bei der ersten Lage des Instruments (KL) machen. Ebenso verfährt man auch, wenn man eine grössere Anzahl von Beobachtungsreihen veranstalten will. Um aber zugleich den Einfluss der zufälligen Fehler der Gradtheilung an dem Kreise zu verringern, so muss man, wo die Einrichtung des Instruments es erlaubt, nach Beendigung einer oder einiger vollständiger Beobachtungsreihen den Ort des Zeniths regelmässig um aliquote Theile des Kreises ändern, und darauf neue Beobachtungsreihen anstellen.

Weit ausserhalb des Meridians ändert sich die Zenithdistanz eines Gestirns rasch genug, so dass man nicht mehr nöthig hat, das Fernrohr mittelst der Mikrometerschraube einzustellen; und es genügt, das Fernrohr so zu richten, dass das Gestirn durch seine scheinbare tägliche Bewegung in kurzer Zeit in die Mitte des Raumes zwischen beiden Horizontalfäden tritt. Befestigt man den beweglichen Verticalkreis durch die Druckschraube, so braucht man ihn nur ein wenig im Azimuth zu drehen und abzuwarten, bis der Stern (oder der Rand des Gestirns, welches einen

merklichen Durchmesser hat) in die Mitte des erwähnten kleinen Rechtecks tritt; in diesem Augenblicke fängt man im Kopfe, nach den Schlägen der Uhr, Null zu zählen an, und bemerkt bald darauf, indem man immer mit den Schlägen der Uhr fortzählt, die genaue Angabe des Secundenzeigers am Chronometer, und ebenfalls die Stunden und Minuten; zieht man von dieser Angabe die mitgezählten Schwingungen der Unruhe, indem man sie in Secunden und Theile von Secunden verwandelt, ab, so bekömmt man die entsprechende Zeit der Beobachtung nach dem Chronometer.

In diesen Fällen wird es bequemer sein, statt zweier sehr naher horizontalen Fäden nur einen zu gebrauchen, und alsdann die Zeit eines Durchgangs des Sterns durch diesen Horizontalfaden ebenso zu beobachten, wie es bei der Beobachtung eines Sterns durch die Verticalfäden des Mittagsrohrs geschieht. Man kann daher im Fadennetze zwei einander sehr nahe Horizontalfäden und, in einer gewissen Entfernung von ihnen, einen dritten mit diesen parallelen und recht feinen Faden aufspannen; die ersten beiden kann man bei der Beobachtung von Zenithdistanzen in der Nähe des Meridians, den dritten aber in solchen Fällen benutzen, wenn die Höhe des Gestirns sich rasch ändert. Den Vortheil solcher Netze haben wir bei vielen Gelegenheiten erprobt; sie können auch ebenfalls mit Nutzen bei Sonnenbeobachtungen angewandt werden, wenn man nämlich sehr dunkel gefärbte Blendgläser gebraucht; in diesem Falle ist es nicht gut möglich, den Raum zwischen den beiden Horizontalfäden zu sehen, man beobachtet daher weit sicherer die Berührung mit einem besonderen Horizontalfaden.

Da nun die Zenithdistanzen eines Gestirns sich fortwährend verändern, so muss man, um die scheinbare Zenithdistanz aus jeder entsprechenden Einstellung des Fernrohrs finden zu können, vorläufig den Ort des Zeniths am Verticalkreise kennen, welcher am einfachsten durch die Beobachtung irgend eines terrestrischen Gegenstands bestimmt werden kann; jedoch

kann man dazu auch die Beobachtung eines dem Meridiane sehr nahen Sterns anwenden. Zieht man nun von dem Orte des Zeniths das Mittel der für Niveau verbesserten Ablesungen der Mikroskope bei Verticalkreis rechts ab, oder zieht man von dem ebenso verbesserten Mittel der Ablesungen bei Verticalkreis links den Ort des Zeniths selbst ab, so erhält man an den beschriebenen Instrumenten die Zenithdistanz. Damit aber eine Ungenauigkeit in der Bestimmung des angenommenen Orts des Zeniths keinen Einfluss auf das Endresultat hat, so muss man den Stern, dessen Zenithdistanz zu messen ist, bald bei Kreis rechts, bald bei Kreis links beobachten; die Beobachtungen aber in kurzen Zeitintervallen regelmässig und abwechselnd in gleicher Zahl, in beiden Lagen des Instruments nach einander folgen lassen.

84. Beobachtet man bei Tage, so muss man das Instrument im Schatten aufstellen, weil die Sonnenstrahlen durch ihre Wärme die verschiedenen Theile des Instruments nicht gleichmässig ausdehnen würden, und mithin grössere oder kleinere ungleichförmige Veränderungen dadurch hervorgebracht würden. Den allerschädlichsten Einfluss bringen die Sonnenstrahlen auf das Niveau hervor; wenn nämlich ein Theil des letzteren sich im Schatten befindet, der von irgend einem Theile des Instruments herrührt, der andere Theil des Niveaus aber der directen Wirkung der Sonnenstrahlen ausgesetzt ist; denn alsdann wird der leere Raum, oder die Blase, welche sich in der mit Spiritus oder Schwefeläther angefüllten Röhre des Niveaus befindet, nicht mehr auf den höchsten Punkt der gläsernen Röhre einspielen, sondern sich nach derjenigen Seite hin bewegen, welche am stärksten erwärmt ist, und so wie die Lage des Instruments, oder der Ort der Sonne sich ändert, wird auch die Blase sich bewegen, wodurch es also ganz unmöglich werden würde, sich auf die Angabe des Niveaus zu verlassen.

Man muss daher stets die grösste Aufmerksamkeit auf das Niveau wenden; bei manchen Instrumenten kann man die

Niveauangaben, welche jeder Einstellung des Fernrohrs entsprechen, leicht vom Fernrohre aus ablesen; bei den beschriebenen Instrumenten befindet sich aber der Mikroskopenträger, an welchem das Niveau sitzt, weit vom Beobachter ab; sollte daher das Stativ, auf dem das Instrument steht, eine so geringe Festigkeit haben, dass es sich zwischen der Einstellung des Gegenstandes und der Ablesung des Niveaus verändern kann, so muss der Beobachter sich eines Gehülfen bedienen, welcher bei jeder Beobachtung das Niveau, in dem Augenblicke, wenn die Einstellung mit dem Fernrohre gemacht ist, abliest.

Von dem Einflusse des Collimationsfehlers des Fernrohrs und der nicht genauen Verticalität des Höhenkreises auf die Messung von Zenithdistanzen.

85. Wenn man auch das Instrument noch so sorgfältig berichtigt, so wird sich doch eine solche Berichtigung niemals ganz genau erreichen lassen, und daher wollen wir jetzt untersuchen, wie klein die Fehler werden müssen, um keinen merklichen Einfluss mehr auf die Messung der Zenithdistanzen hervorzubringen. Es sei daher der Collimationsfehler der optischen Achse des Fernrohrs oder der Hauptgesichtslinie in Bogensecunden ausgedrückt $= c$; die Neigung des Kreises aber, an welchem die Zenithdistanzen abgemessen werden, gegen die Verticalebene sei in Bogensecunden $= i$; und nun wollen wir annehmen, dass in Fig. 29, Taf. I, Z das Zenith ist, S der Ort des beobachteten Gegenstands, SE die Ebene, welche die optische Achse des Fernrohrs bei der Drehung um die horizontale Achse beschreibt, und welche sehr nahezu eine verticale Lage hat; und endlich sei DB eine Ebene, welche

mit der Ebene parallel ist, die von der optischen Achse beschrieben würde, wenn sie wirklich auf der Umdrehungsachse des Fernrohrs senkrecht stände. Alsdann wird SE einen kleinen, DB aber einen grossen Kreis der Himmelskugel darstellen, welcher der Ebene des Limbus entspricht; nehmen wir nun an, dass der Punkt A der Pol des Kreises DB ist, und ziehen die Bögen ZA und SA, so folgt, dass der Bogen $ZB = i$, und der Bogen $BE = DS = c$ sein wird. Der wirkliche Winkelabstand des Gegenstands S vom Zenith Z wird gleich $ZS = z'$ sein, die durch das Instrument gegebene Zenithdistanz wird aber $= DB$ oder $=$ Winkel A sein, welchen wir gleich z setzen wollen; wenn wir dabei voraussetzen, dass das Zenith Z weiter von dem Punkte A, der kleine Kreis SE aber näher an A liegt, als der grosse Kreis BD, so erhält man in dem sphärischen Dreiecke $ZSA : ZAS = z$, $ZS = z'$; $SA = 90° - c$, $ZA = 90° + i$, folglich:

$$\cos z' = -\sin i \sin c + \cos i \cos c \cos z \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$\cos z - \cos z' = \cos z\,(1 - \cos i \cos c) + \sin i \sin c$$

$$2 \sin\left(\frac{z'+z}{2}\right) \sin\left(\frac{z'-z}{2}\right) = (2 \sin^2 \tfrac{1}{2} i + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} c$$
$$- 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} i \sin^2 \tfrac{1}{2} c) \cos z + \sin i \sin c.$$

Vernachlässigt man hierbei wegen der Kleinheit der Werthe von i und c die Glieder vierter Ordnung, so kann man mit genügender Annäherung annehmen, dass:

$$z' - z = \tfrac{1}{2}(i^2 + c^2) \frac{\sin 1''}{tg\, z} + \frac{i.c}{\sin z} \sin 1'', \text{ oder}$$

$$z' - z = \frac{(i+c)^2}{2\, tg\, z} \cdot \sin 1'' + i.c.\, tg \tfrac{1}{2} z \sin 1'' \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Hieraus sieht man, dass die untersuchten Fehler nur alsdann merkliche Correctionen nöthig machen, wenn die Zenithdistanzen klein werden; wenn z. B. der beobachtete Ort des Sterns dem höchsten Punkte E des kleinen Kreises SE entspricht, so wird $z = o$ und aus der genauen Formel (a) folgt

dann, dass $z' - z = i + c$; wenn daher z eine kleine Anzahl von Minuten beträgt, so dass man in der Gleichung (a) annehmen kann, dass $\cos z = 1$, so wird auch die Correction von z, gleich der algebraischen Summe der Fehler i und c werden. Bei gut berichtigten Instrumenten werden die Fehler i und c nie mehr als ein paar Minuten betragen können; gewöhnlich aber werden sie noch kleiner sein; setzten wir z. B. $i = +60''$ und $c = +60''$, so wird in diesem Falle, wenn $z = 1°$ ist, nach der Formel (b), die Correction $z' - z$ sehr nahe $= 2''$ gefunden werden; bei $z = 5°$ wird sie aber schon kleiner als $0'',4$ und endlich bei $z = 10°$, kleiner als $0'',2$, so dass sie also über diese Grenze hinaus beinahe als verschwindend angesehen werden kann.

Fehler der Zenithdistanzen, welche von der Wirkung der Schwere auf das Instrument herrühren.

86. Da die Metalle, aus denen die verschiedenen Theile der Instrumente angefertigt werden, nicht vollkommen hart und nicht gleichartig sind, so bewirkt die Schwerkraft verschiedene Durchbiegungen in der horizontalen Umdrehungsachse, im Fernrohr und im Körper des Verticalkreises. Die Biegung der Horizontalachse verändert ihre Neigung zum Horizont; es sei y diese Biegung in Secunden ausgedrückt; z die wahre Zenithdistanz des beobachteten Gegenstandes, ζ die fehlerhafte Zenithdistanz, insofern der Fehler von y abhängt; dann ist $\cos \zeta = \cos z \cos y$; gewöhnlich ist y sehr klein, und wenn ζ einen Grad übersteigt, so hat man nahezu

$$z = \zeta - {}^1/_2\, y^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} \zeta.$$

Der Einfluss der Schwerkraft auf die Durchbiegung des Fernrohrs ist mit der Wirkung zu vergleichen, welche ein an

dem Ende des Fernrohrs angehängtes Gewicht hervorbringen würde. Ein solches Gewicht strebt das Fernrohr durchzubiegen und dadurch die Richtung der optischen Achse zu verändern. Nach dem Lehrsatz des Kräfteparallelogramms kann man die Wirkung der Schwere in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine in der Richtung des Fernrohrs wirkt und nur die Länge des letzteren beeinflussen kann, und eine zweite, welche senkrecht zu der Richtung des Fernrohrs ist und das Fernrohr zu biegen strebt. Es sei z die Zenithdistanz, also der Winkel, welchen das Fernrohr mit der Verticallinie bildet; g die volle Wirkung der Schwere; dann sind $g \cos z$ und $g \sin z$ die beiden Componenten der Schwerkraft; $g \cos z$ verschwindet und $g \sin z$ geht in g über, wenn $z = 90°$ ist, oder das Fernrohr in die horizontale Lage kommt; dann wird auch die Biegung des Fernrohrs die grösste sein. Wenn wir folglich die Biegung im Horizont b nennen und in Secunden ausdrücken, so wird $b \sin z$ die Biegung des Fernrohrs bei der Zenithdistanz z darstellen; ist z die wahre, ζ die wegen dieser Biegung fehlerhafte Zenithdistanz, so ist

$$z = \zeta + b \sin z.$$

Den Einfluss der Schwerkraft auf den Körper des Verticalkreises kann man mit der Wirkung vergleichen, welche auf allen Punkten des Umfangs des Kreises angehängte Gewichte ausüben würden; oben streben sie den Verticalkreis zusammenzudrücken, unten denselben auszudehnen; dadurch wird seine Gestalt verändert; der Bogen, welcher bei der Winkelmessung gebraucht wird, ist dann nicht mehr ein Kreisbogen und kann die Grösse des Winkels nicht genau angeben. Die davon abhängenden Fehler der Zenithdistanzen werden für jede Zenithdistanz verschieden ausfallen; nachdem aber die Gesichtslinie 360° beschrieben hat, kommen die Fehler in einer und derselben Ordnung zurück, und sie können durch eine periodische Function der Zenithdistanz ausgedrückt werden.

87. Vereinigen wir die Aenderungen der Zenithdistanz, welche die Biegungen des Fernrohrs und des verticalen Limbus-

kreises hervorbringen, so ist die Correction Δz der Zenithdistanz z durch die Gleichung

$$\Delta z = b' \sin z + a' \cos z + b'' \sin 2z + a'' \cos 2z + \ldots.$$

dargestellt, wo die Coefficienten a', b', a'', b'', ... von z unabhängig sind und auf verschiedene Weise bestimmt werden. Man kann sie aus Beobachtung der Meridianhöhen solcher Sterne ableiten, von welchen einige nördlich, andere südlich vom Zenith culminiren und dabei einige in der Nähe des Zeniths, andere nicht weit vom Horizont gesehen werden; es ist nur nöthig, die Declinationen dieser Sterne und die astronomischen Refractionen sehr genau zu kennen. Aus jeder gemessenen Zenithdistanz z wird dann zur Bestimmung der Polhöhe eine Gleichung aufgestellt, in welcher die Correction

$$a' \cos z + b' \sin z + a'' \cos 2z + b'' \sin 2z + \ldots \quad (1)$$

der Zenithdistanz vorkommt. Es bilden sich auf diese Weise mehrere Bedingungsgleichungen, welche zur Berechnung der Coefficienten a', b', a'', b'', ... benutzt werden.

88. Viel sicherer erhält man die Coefficienten a', b', a'', b'', ... mit Hülfe des sogenannten Quecksilberhorizonts. Es wird nämlich in der Ebene des Meridians und in passender Entfernung vom Fernrohr ein Gefäss mit Quecksilber auf eine feste Unterlage aufgestellt, so dass der Beobachter das Bild eines bekannten Sterns in der spiegelnden Oberfläche des Quecksilbers durch das Fernrohr sehen kann. Man beobachtet zuerst den Stern direct; bald darauf richtet man das Fernrohr auf den Quecksilberhorizont und beobachtet das Bild des Sterns im Quecksilber; oder umgekehrt, man beobachtet zuerst das Bild und dann den Stern direct; bei jeder Beobachtung werden die Zeiten derselben und die Angaben der Niveaus und der Verniere oder Mikroskope notirt. Alle Ablesungen am Verticalkreise corrigirt man wegen der astronomischen Refraction, wegen Neigung des Niveaus und wegen der bekannten Theilungs- und Mikrometerschraubenfehler; dann werden sie auf die Culminationszeit des

Sterns genau reducirt. Es seien A und B die auf diese Weise corrigirten und reducirten Ablesungen am Verticalkreise, wenn das Fernrohr auf den Stern und auf sein Bild im Quecksilber-Horizont gerichtet war; z die Zenithdistanz des Sterns und also $180° - z$ die Zenithdistanz seines Bildes.

Vernachlässigt man zuerst die Wirkung der Schwere auf den Verticalkreis, so es ist leicht, die Biegung des Fernrohrs abzuleiten; nennen wir b die Biegung im Horizont, so sind $A + b\,sin\,z$ und $B + b\,sin\,(180° - z)$ oder $B + b\,sin\,z$ die vom Einfluss der Biegung befreiten Ablesungen am Limbuskreise bei der Visirung nach dem Stern und nach seinem Bilde in der Quecksilberoberfläche; da diese Oberfläche eine horizontale Ebene ist, so muss der halbe Unterschied von $A + b\,sin\,z$ und $B + b\,sin\,z$, d. h. $\frac{1}{2}(B - A)$, die Sternhöhe frei von der Biegung des Fernrohrs angeben. Die halbe Summe: $\frac{1}{2}(A + B) + b\,sin\,z$, zeigt die horizontale Lage des Fernrohrs und wird der Horizontpunkt am Limbuskreise genannt*). Wenn b unbekannt ist, das Instrument aber in beiden Lagen des Limbuskreises gebraucht werden kann, so wird die Zenithdistanz des Sterns aus Beobachtungen in beiden Lagen des Verticalkreises abgeleitet; sie ist dann wegen der Biegung des Fernrohrs fehlerhaft; ihre Ergänzung zu 90° giebt die unrichtige Sternhöhe, welche von der wahren Höhe $\frac{1}{2}(A - B)$ abgezogen, als Differenz giebt $b\,sin\,z$, woraus auch b leicht zu bestimmen ist.

Wenn das Instrument in beiden Lagen (Verticalkreis Ost und West) angewandt werden kann, so kann man nicht nur die Biegung des Fernrohrs, sondern auch die Biegung des Verticalkreises selbst untersuchen. Dazu beobachtet man direct den Stern und dann sein Bild im Quecksilberhorizont, sowohl in einer (Verticalkreis Ost), wie auch in der anderen Lage des Instru-

*) Auf diese Art sind die Sternhöhen in Greenwich an den grossen Meridiankreisen bestimmt.

ments (Verticalkreis West), ausserdem werden die Temperatur der Luft am äusseren Thermometer und der Luftdruck am Barometer notirt, um die entsprechenden astronomischen Refractionen genau berechnen zu können. Alsdann werden alle Ablesungen am Verticalkreise corrigirt und auf die Culminationszeit des Sterns reducirt, wie wir oben schon erklärt haben; sie bleiben fehlerhaft nur wegen der verschiedenen Durchbiegungen des Instruments.

Mögen nun Z' und Z'' solche verbesserte Ablesungen am Verticallimbuskreis in der ersten Lage des Instruments (Verticalkreis Ost) bedeuten, Z' bei der directen Beobachtung des Sterns und Z'' bei der Beobachtung seines Bildes im Quecksilberhorizont; es seien Z''' und Z^{IV} ähnliche Ablesungen bei der Beobachtung des Sterns und seines Bildes in der zweiten Lage des Instruments (Verticalkreis West). Die Meridian-Zenithdistanz des Sterns wollen wir ζ nennen. — Wenn der Ort des Zeniths am Verticalkreise Null ($0°0'0''$) wäre und man hätte ζ bei der Beobachtung des Sterns in der ersten Lage des Instruments am Verticalkreise abgelesen, so müsste $180° - \zeta$ die Ablesung sein bei der Beobachtung des Sternbildes in der ersten Lage des Instruments, $360° - \zeta$ die Ablesung bei der Beobachtung des Sterns und $180° + \zeta$ die Ablesung bei der Beobachtung des Sternbilds in der zweiten Lage des Instruments. Es wird aber fast niemals zutreffen, dass der Ort des Zeniths wirklich Null wäre; es ist also nöthig, den Ort des Zeniths oder des Nadirs genau zu bestimmen; es sei N' der Ort des Nadirs in der ersten Lage und N'' der Ort des Nadirs in der zweiten Lage des Instruments; $180° + N'$ und $180° + N''$ sind dann die entsprechenden Oerter des Zeniths am Verticalkreise.

Es ist nun leicht, den Ort des Nadirs zu finden; man bringt das Fernrohr in verticale Richtung, mit dem Objectiv nach unten, und stellt den Quecksilberhorizont unter das Objectiv, so dass durch das Ocular die horizontalen Fäden in der Ocularröhre, wie auch die vom Quecksilber abgespiegelten Bilder dieser Fäden

zugleich gesehen werden. Durch sanfte Bewegung des Fernrohrs um die horizontale Umdrehungsachse wird der horizontale Faden mit seinem Bilde in Coincidenz gebracht; alsdann muss die Gesichtslinie des Fernrohrs senkrecht sein zur horizontalen Ebene des Quecksilbers; folglich ist ihre Richtung vertical; die Ablesung am Verticalkreise giebt dann den Ort des Nadirs, N' oder N''. Der Einfluss der Schwere auf diesen Ort lässt sich aus dem allgemeinen Ausdruck der Correction ableiten, welche von der Wirkung der Schwerkraft auf das Instrument abhängt (S. 209, Gl. 1); dazu braucht man nur $z = 180°$ zu setzen; die Correction des Orts des Nadirs ist also $-a' + a'' - a''' + \ldots.$

Nun ist überhaupt in einer Lage des Instruments: Zenithdistanz = der Ablesung am Verticalkreise — dem Ort des Zeniths; verbessern wir die Ablesungen wegen der Biegung des Fernrohrs und der Biegung des Verticalkreises, so bekommen wir aus der Gleichung (1) (S. 209) folgende Relationen:

In der 1. Lage des Verticalkreises:

1) für den Sternort:

$$\begin{aligned}\zeta = \; & Z' + a' \cos\zeta + a'' \cos 2\zeta + a''' \cos 3\zeta + \ldots \\ & + b' \sin\zeta + b'' \sin 2\zeta + b''' \sin 3\zeta + \ldots \\ & -(180° + N') + a' - a'' + a''' - \ldots\end{aligned}$$

2) für den Ort des Sternbildes:

$$\begin{aligned}180° - \zeta = \; & Z'' - a' \cos\zeta + a'' \cos 2\zeta + a''' \cos 3\zeta + \ldots \\ & + b' \sin\zeta - b'' \sin 2\zeta + b''' \sin 3\zeta - \ldots \\ & -(180° + N') + a' - a'' + a''' - \ldots\end{aligned}$$

In der 2. Lage des Kreises:

3) für den Sternort:

$$\begin{aligned}360° - \zeta = \; & Z''' + a' \cos\zeta + a'' \cos 2\zeta + a''' \cos 3\zeta + \ldots \\ & - b' \sin\zeta - b'' \sin 2\zeta - b''' \sin 3\zeta - \ldots \\ & -(180° + N'') + a' - a'' + a'''\end{aligned}$$

4) für den Ort des Sternbildes:

$$180^\circ + \zeta = Z^{IV} - a' \cos\zeta + a'' \cos 2\zeta - a''' \cos 3\zeta + \ldots.$$
$$- b' \sin\zeta + b'' \sin 2\zeta - b''' \sin 3\zeta + \ldots.$$
$$- (180^\circ + N'') + a' - a'' + a''' - \ldots.$$

Die halbe Differenz der Gleichungen 1) und 2), 3) und 4) giebt:

$$90^\circ - \zeta = \frac{Z'' - Z'}{2} - a' \cos\zeta - a''' \cos 3\zeta - \ldots - b'' \sin 2\zeta - \ldots.$$

$$90^\circ - \zeta = \frac{Z''' - Z^{IV}}{2} + a' \cos\zeta + a''' \cos 3\zeta - \ldots - b'' \sin 2\zeta - \ldots.$$

im Mittel: $$90^\circ - \zeta = \frac{Z'' - Z' + Z''' - Z^{IV}}{4} - b'' \sin 2\zeta - \ldots.$$

Beschränkt man die Correction auf die Glieder von der Form: $a' \cos\zeta + b' \sin\zeta$, oder $b'' = 0$ vorausgesetzt, so erhält man sogleich die wahre Sternhöhe aus der letzten Gleichung.

Die halben Summen der Gleichungen 1) und 2), 3) und 4) sind:

$$90^\circ = \frac{Z' + Z''}{2} + a'' \cos 2\zeta - \ldots. + b' \sin\zeta + b''' \sin 3\zeta \ldots.$$
$$- (180^\circ + N') + a' - a'' + a''' - \ldots.$$

$$270^\circ = \frac{Z''' + Z^{IV}}{2} + a'' \cos 2\zeta + \ldots. - b' \sin\zeta - b''' \sin 3\zeta \ldots.$$
$$- (180^\circ + N'') + a' - a'' + a''' - \ldots.$$

Wenn man diese Gleichungen zu einander addirt und von einander abzieht, so kommt

$$360^\circ = \frac{Z' + Z''}{2} + \frac{Z''' + Z^{IV}}{2} + 2a'' \cos 2\zeta - (N' + N'') +$$
$$2(a' - a'' + a''' - \ldots.)$$

$$180^\circ = \frac{Z''' + Z^{IV}}{2} - \left(\frac{Z' + Z''}{2}\right) - 2b' \sin\zeta - 2b''' \sin 3\zeta + N' - N''.$$

Wenn mehrere Sterne und ihre Bilder in beiden Lagen des Instruments beobachtet sind, so bilden sich viele der erwähnten ähnliche Gleichungen, aus welchen a'' und b'' bestimmt werden. Man muss aber in Betracht nehmen, dass die Zenithdistanz des

Sternbildes im Quecksilberhorizont sich nicht auf die Polhöhe des Standpunkts des Verticalkreises bezieht, sondern auf die Polhöhe desjenigen Punkts, welcher in der Mitte des Quecksilbergefässes liegt. Es sei δ die in englischen Zollen ausgedrückte Entfernung der Mitte des Quecksilbergefässes von der Verticallinie, welche durch die Mitte des Fernrohrs geht, und h die Erhebung (auch in englischen Zollen) der horizontalen Umdrehungsachse des Instruments über dem Quecksilberhorizont. Da ein Bogen von einer Secunde auf dem Erdmeridian nahezu 101,4 englische Fuss enthält, so ist $\frac{\delta}{101,4}$ oder $\frac{h \operatorname{tg} z}{101,4}$ die Correction, welche zu der Zenithdistanz des Sternbildes zugelegt werden muss, um die entsprechende Distanz vom Zenith des Verticalkreises zu bekommen. Die Correction ist positiv, wenn die Polhöhe des Beobachters die nördliche ist und der Quecksilberhorizont nördlich vom Fernrohr stand; dagegen wird die Correction negativ, wenn bei der nördlichen Polhöhe der Quecksilberhorizont südlich vom Fernrohr sich befand; das Umgekehrte findet statt in südlichen geographischen Breiten.

Man kann die Biegungen auch mit Hülfe von horizontalen Collimatoren untersuchen; in diesem Fall muss man $\zeta = 90°$ setzen, dann ist die Correction, welche zur Ablesung bei der horizontalen Lage der Gesichtslinie am Verticalkreise zugelegt wird, gleich $-a'' + \ldots - b' - b''$.

Ohne uns weiter über diesen Gegenstand zu verbreiten, verweisen wir auf die schöne Abhandlung von Bessel, welche in den Astronomischen Nachrichten für das Jahr 1843 erschienen ist, auch auf die Untersuchungen von W. Struve in seiner Beschreibung der Pulkowaer Sternwarte.

Von den verschiedenen Fehlern der Gradtheilung an Winkelmessinstrumenten.

1) Von der excentrischen Lage des Umdrehungscentrums, und von der Entfernung der Verniere und Mikroskope.

89. Wir wollen zuerst annehmen, dass der eingetheilte Kreis nur einen einzigen Vernier hätte, der an einem Lineale (Alhidade) befestigt wäre, welches ganz fest mit dem Fernrohre verbunden wäre; und alsdann untersuchen, welcher Fehler in der Vernierablesung daraus entstehen könnte, dass das Centrum der Umdrehung des Fernrohrs nicht mit dem Centrum des Gradbogens, an welchem sich die Theilung befindet, zusammenfiele. Es sei deswegen C das Centrum dieses Bogens (Fig. 30, Taf. I), K der Punkt, durch welchen die Umdrehungsachse des Fernrohrs hindurchgeht, a und b die Punkte der Theilung, welche der Vernier am Kreisumfange zeigt, wenn das Fernrohr auf die Gegenstände A und B gerichtet wird, welche in der Ebene des Kreises selbst liegen. Der gesuchte Winkel wird $= BKA = K$ sein; der am Instrument gemessene Winkel aber ist $= bCa = C$. Zieht man nun durch C und K den Durchmesser $QCKP$ und bezeichnet durch P das an K zunächstliegende, durch Q aber das am entferntesten von K liegende Ende des Durchmessers $QCKP$, so wird der Einfluss der Excentricität CK auf die Angabe des Verniers nur dann verschwinden, wenn der Vernier gegen den Punkt P oder Q gerichtet ist, in jedem anderen Falle aber dieser Einfluss mehr oder weniger merklich werden.

Es sei nun Winkel $aCP = x$, $aKP = z$, $bKP = z'$, der Radius $CP = r$, $CK = e$; nimmt man nun an, dass e sehr klein in Vergleich zu r ist, und setzt $\frac{e}{r \sin 1''} = \varepsilon$, so werden die Winkel CaK und CbK beinahe gleich $\varepsilon \sin z$ und $\varepsilon \sin z' = \varepsilon \sin (z + K)$ werden, so dass folglich:

$$z = x + \varepsilon \sin z;\; z' = z + K = x + C + \varepsilon \sin (z + K)$$

$$\text{mithin } K = C + \varepsilon.[\sin(z + K) - \sin z] \;.\; .\; (1).$$

Hieraus sieht man, dass, wenn man mit Hülfe eines Kreises, welcher nur einen Vernier hat, die Winkel frei von Excentricität zu bestimmen wünscht, man jedesmal die Winkel in beiden Lagen des Instruments bestimmen muss. Wenn nämlich in der ersten Lage bei der Einstellung des Fernrohrs auf A und B, die Verniere die Punkte a und b geben, so wird bei der zweiten Lage des Instruments der Mittelpunkt C des Kreises sich auf der entgegengesetzten Seite von K (z. B. von links nach rechts) befinden; ferner wird der Einfluss der Excentricität auf die Winkel sich entgegengesetzt wie vorher äussern, und also bei der Einstellung des Fernrohrs auf die Gegenstände A und B, der Vernier auf die Punkte a' und b' zeigen, in welchen der Umfang des getheilten Kreises von den Verlängerungen der Linien aK und bK geschnitten wird; nun folgt aber sogleich aus der Elementargeometrie, dass der gesuchte Winkel $BKA = bKa$ $=$ der halben Summe der gemessenen Winkel bCa in der ersten Lage, und $b'C'a'$ in der zweiten Lage des Instruments sein wird.

Wenn aber das Instrument statt eines Vollkreises nur einen gewissen, in Graden eingetheilten Bogen haben sollte, so werden alle mit diesem Instrumente gemessenen Winkel durchaus mit Excentricität behaftet sein. Nimmt man nun an, dass a und b die Anzahl der Grade, Minuten und Secunden bezeichnen, welche den Punkten a und b (Fig. 30, Taf. I) am Verniere entsprechen, und bezeichnet man ferner durch p die Zahl der Grade, Minuten und Secunden, welche dem Punkte P angehören, so erhält man aus der obigen Formel: $b - a = C$; $b - p + \varepsilon \sin z' = z'$ $= z + K$; $a - p + \varepsilon \sin z = z$. Nimmt man nun ferner an, dass α und β die Vernierablesungen waren, als man auf zwei neue Gegenstände, die zwischen sich ganz genau den Winkel L bildeten, visirte, so erhält man mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung, in Beziehung auf ε:

$$K = b - a + \varepsilon\,[\sin(b-p) - \sin(a-p)],$$

$$L = \beta - \alpha + \varepsilon\,[\sin(\beta-p) - \sin(\alpha-p)].$$

Wenn K und L, eben so wie $b-a$, und $\beta-\alpha$, bekannt sind, so wird man aus den beiden vorhergehenden Gleichungen leicht die Unbekannten ε und p finden können, welches durch folgende Formeln geschieht:

$$\frac{K-(b-a)}{2\sin\frac{1}{2}(b-a)} = n;\ \frac{L-(\beta-\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)} = m;$$

$$\frac{b+a}{2} = B;\ \frac{\beta+\alpha}{2} = A;\ \varepsilon\sin(A-p) = \frac{m\cos(B-A)-n}{\sin(B-A)}$$

$$\varepsilon\cos(A-p) = m.$$

Hieraus sieht man, dass man bei einem solchen Instrumente nur zwei bekannte und zwischen einander sehr verschiedene Winkel zu messen nöthig hat, um sogleich die in Secunden ausgedrückte Excentrität ε, und den Punkt der Gradtheilung p, welche dem Punkte des Kreises entspricht, der dem Umdrehungscentrum zunächst liegt, zu finden; hat man ε und p gefunden, so kann man leicht die Correctionen wegen Excentricität für alle anderen Winkel berechnen.

Wir wollen jetzt annehmen, dass der ganze Vollkreis eines Instruments eingetheilt ist; und dass man anstatt des Lineals (Alhidade), einen Vernier- oder Alhidadenkreis hat, an welchem sich n Verniere befinden, die alle von einander um einen gleichen Kreisbogen $= \frac{360^\circ}{n} = q^\circ$ abstehen; behalten wir nun die obige Bezeichnungsweise bei, so finden wir für den von der Excentricität abhängigen Fehler der ersten Vernierablesung, den Werth $= z - x$ oder sehr nahe $= \varepsilon\sin x$, wenn ε recht klein ist; für die zweite Vernierablesung wird dieser Fehler $= z_{,} - x_{,}$ oder sehr nahe $= \varepsilon\sin x_{,} = \varepsilon\sin(x+q)$; für die dritte ferner $= z_{,,} - x_{,,} = \varepsilon\sin(x+2q)$ u. s. w., wobei $z_{,}$ und $x_{,}$, $z_{,,}$ und $x_{,,}$ u. s. w. ganz dasselbe für den zweiten, dritten u. s. w.

Vernier bezeichnen, was z und x für den ersten bezeichneten. Nun wird in der Lehre der trigonometrischen Functionen bewiesen, dass:

$$\left.\begin{array}{l} \sin x + \sin\left(x + 1 \, . \, \frac{360^\circ}{n}\right) + \sin\left(x + 2 \, . \, \frac{360^\circ}{n}\right) + \ldots \\ \quad \ldots\ldots + \sin\left(x + (n-1) \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) \end{array}\right\} = 0$$

Addiren wir also folgende Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned} z &= x + \varepsilon \sin x \\ z_{,} &= x_{,} + \varepsilon \sin(x + 1 \, . \, q) \\ z_{,,} &= x_{,,} + \varepsilon \sin(x + 2 \, . \, q) \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= x_{n-1} + \varepsilon \sin[x + (n-1) q] \end{aligned}$$

so bekommen wir:

$$\begin{aligned} z + z_{,} + z_{,,} + \ldots\ldots + z_{n-1} = \\ = x + x_{,} + x_{,,} + \ldots\ldots + x_{n-1} \end{aligned}$$

Hieraus sieht man, dass die Wirkung der Excentricität gänzlich verschwinden wird, wenn man die Ablesungen an einer beliebigen Anzahl von Vernieren macht, welche alle am ganzen Kreisumfange so vertheilt sind, dass ihre Entfernung von einander durchweg $= \frac{360^\circ}{n} = q^\circ$ ist, wo n eine beliebige Zahl von Vernieren bezeichnet; so z. B. verschwindet diese Wirkung bei drei Vernieren, die untereinander einen Winkel von 120° bilden, ebenso auch bei sechsen, wo der Winkel 60° würde, auch bei vieren, wo er 90° würde, u. s. w.; daher richten auch die Künstler die Verniere am Kreise möglicherweise so ein, dass ihre Entfernung sehr nahe $= \frac{360^\circ}{n} = q^\circ$ wird, wesshalb auch, wenn die wahre Entfernung zwischen zwei benachbarten Vernierlagen $= q + \lambda$ ist, alsdann λ immer nur eine sehr kleine Grösse sein

wird. Nehmen wir z. B. an, dass die Ablesung der Kreistheilung am ersten Verniere $= a$, die am zweiten Verniere $= \alpha$ war, und dass ferner a' und α' dieselben, aber schon für Excentricität verbesserten Werthe ausdrücken; so wird:

$$\alpha' = \alpha + \varepsilon \sin(\alpha - p),\ a' = a + \varepsilon \sin(a - p).$$

Der Unterschied $\alpha' - a'$ ist aber nichts anderes als der Winkel $q + \lambda$, welcher zwischen den Vernieren gelegen ist; mithin hat man:

$$q + \lambda = \alpha - a + \varepsilon . [\sin(\alpha - p) - \sin(a - p)].$$

Wenn man nun den ersten Vernier auf $180° + a = (a)$ einstellt, so wird die Ablesung am zweiten Vernier sehr nahe $= 180 + \alpha$ werden; wegen der kleinen Einwirkung der Excentricität und des Werthes λ aber wollen wir die Ablesung des zweiten Verniers durch (α) bezeichnen, so dass alsdann:

$$q + \lambda = (\alpha) - (a) + \varepsilon \{\sin[(\alpha) - p] - \sin[(a) - p]\}$$
$$= (\alpha) - (a) - \varepsilon [\sin(\alpha - p) - \sin(a - p)];$$

hieraus folgt nun: $q + \lambda = \frac{1}{2}[\alpha - a + (\alpha) - (a)]$,
d. h. die Entfernung der Verniere wird unabhängig vom Einflusse der Excentricität erhalten, wenn man das arithmetische Mittel aus dem Unterschiede der Ablesungen beider Verniere bei zwei Lagen nimmt, die um 180° von einander verschieden sind.

Die zufälligen Theilungsfehler müssen jedenfalls einen Einfluss auf die Bestimmung des Werthes $q + \lambda$ haben; diesen letzteren findet man daher genauer, wenn man den ersten Vernier fortwährend von 10° zu 10°, oder 20° zu 20° auf dem Gradbogen vorrückt; alsdann wird $q + \lambda$ durch die arithmetische Mittelzahl aus allen beobachteten Unterschieden zwischen der Ablesung am ersten und zweiten Vernier ausgedrückt werden, d. h. $q + \lambda = \frac{\Sigma(\alpha - a)}{n}$ sein, wo Σ das Summenzeichen ist und n die Zahl 36 bedeutet, wenn man die Verniere fortwährend um 10° vorrückte, oder auch 18 sein wird, wenn die Verrückung von 20° zu 20° stattfände u. s. w.

Nachdem man $q + \lambda$ genau gefunden hat, kann man den wahrscheinlichsten Werth von ε und p bestimmen; hierzu zieht man von jedem der Werthe $(\alpha - a)$ den Werth $q + \lambda$ ab, und es sei dieser Unterschied $= \mu$, so hat man alsdann, wenn man den zufälligen Theilungsfehler nicht berücksichtigt:

$$\mu = (\alpha - a) - (q + \lambda) = -\varepsilon[\sin(\alpha - p) - \sin(a - p)]$$

und da α immer sehr nahe $= a + q$, so folgt:

$$\mu = +2\,\varepsilon \sin\frac{q}{2} \sin(a + R), \text{ wo } R = \frac{q}{2} - p - 90°.$$

Und wenn man am ersten Vernier die Ablesungen machte:	so wird man am zweiten Verniere erhalten:
0°	$0° + q + \lambda + \mu' + m'$
10°	$10° + q + \lambda + \mu'' + m''$
20°	$20° + q + \lambda + \mu''' + m'''$
⋮ ⋮	⋮
350°	$350° + q + \lambda + \mu^{(n)} + m^{(n)}$,

wo $m', m'', m''' \ldots\ldots m^{(n)}$ die jeder einzelnen Einstellung entsprechende Summe des Theilungs- und Ablesungsfehlers bei beiden Vernierangaben bezeichnen. Diese Fehler m', m'' u. s. w. sind uns unbekannt, aber gerade weil diese Fehler zufällige sind, so werden wir mit vieler Wahrscheinlichkeit annehmen können, dass sie in gleicher Anzahl positiv und negativ sein werden, mithin hat man mit Vernachlässigung dieser Fehler folgende Gleichungen von gleichem Gewichte und gleicher Wahrscheinlichkeit:

$$\mu' = \Theta \sin R = \Theta(\sin R \cos 0° + \cos R \sin 0°)$$
$$\mu'' = \Theta \sin(R + 10°) = \Theta(\sin R \cos 10° + \cos R \sin 10°)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\mu^{(n)} = \Theta \sin(R + 350°) = \Theta(\sin R \cos 350° + \cos R \sin 350°)$$

wo $\Theta = 2\,\varepsilon \sin\frac{q}{2}$ gesetzt ist.

Um diese Gleichungen in Beziehung auf $\Theta \sin R$ und $\Theta \cos R$ nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen, bemerken wir, dass überhaupt:

$$\cos^2 0^\circ + \cos^2\left(\frac{360^\circ}{n}\right) + \ldots + \cos^2\left(\frac{(n-1)}{n} 360^\circ\right) = \frac{n}{2}$$

$$\sin^2 0^\circ + \sin^2\left(\frac{360^\circ}{n}\right) + \ldots + \sin^2\left(\frac{(n-1)}{n} 360^\circ\right) = \frac{n}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin 0^\circ \cos 0^\circ + \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \sin\left(\frac{(n-1)}{n} 360^\circ\right) \cos\left(\frac{(n-1)}{n} 360^\circ\right) \end{array}\right\} = 0.$$

In unserem Falle wird $n = 36$, und daher:

$$\Theta \sin R = \frac{2}{n} (\mu' \cos 0^\circ + \mu'' \cos 10^\circ + \ldots + \mu^{(n)} \cos 360^\circ)$$

$$\Theta \cos R = \frac{2}{n} (\mu' \sin 0^\circ + \mu'' \sin 10^\circ + \ldots + \mu^{(n)} \sin 360^\circ);$$

so dass man nun hieraus Θ und R, und folglich auch ϵ und $p = \frac{1}{2} q - R - 90^\circ$ bestimmen kann.

Bei den Beobachtungen selbst muss man stets das Instrument so aufstellen, dass das Licht auf gleiche Weise auf den ersten und zweiten Vernier einfällt, damit keine Fehler in den Ablesungen durch verschiedenartige Beleuchtung entstehen; es ist auch vortheilhaft, wenn die Beleuchtung sich während der ganzen Dauer der Beobachtungen gar nicht ändert; daher muss man auch, wenn der zu untersuchende Kreis ein Horizontalkreis ist, nach jeder Verrückung der Verniere das System der Kreise um eben so viel zurückstellen.

Ausserdem muss man die Verniere so stellen, dass man so nahe wie nur irgend möglich am Anfangspunkte (Nullpunkte) ablesen kann; denn wenn wir den ersten Vernier ganz genau auf 0° oder auf 10° oder auf 20° u. s. w. stellen, so wird es sich zuweilen ereignen können, dass man am Ende des zweiten

Verniers selbst ablesen muss, wodurch wir dann den vollen Fehler des Verniers in die Bestimmung einführen würden.

2) Ueber die Theilungsfehler des Limbuskreises.

90. Die geschicktesten Künstler, mit den besten Hülfsmitteln ausgerüstet, sind nicht im Stande, die Theilstriche am Gradbogen so genau an den richtigen Stellen zu ziehen, so dass der gegenseitige Abstand der Striche von einander, längs dem ganzen Umfang des Kreises überall gleich wird. Aus den vorkommenden Abweichungen entstehen sogenannte Theilungsfehler, welche entweder zufällige, d. h. nur bei einzelnen Strichen im positiven und negativen Sinn vorkommende, ohne Einfluss auf andere Striche sind, oder periodische, welche nach einer gewissen Ordnung sich von Strich zu Strich fortpflanzen und von Hülfsmitteln abhängen, welche bei der Theilung des Kreises gebraucht werden. Die Correction der Ablesung wegen solcher periodischer Fehler ändert sich mit dem Abstande des gelesenen Theilstrichs vom Nullstrich des Gradbogens und kommt nach dem Uebergange von 360° in derselben Weise wieder. Man kann in diesem Fall die Correction durch eine periodische Function des Bogens darstellen, welcher den Abstand des Theilstriches vom Anfang der Theilung bedeutet.

Es seien u die mit Hülfe des Verniers oder des Mikroskops abgelesenen Grade, Minuten und Secunden am Limbuskreise; Δu die Correction, welche zur Ablesung zugelegt werden muss, um den Einfluss der periodischen Fehler zu beseitigen; alsdann wird Δu durch die Gleichung

$$\Delta u = a' \cos u + b' \sin u\, a'' \cos 2u + b'' \sin 2u + a''' \cos 3u + b''' \sin 3u + ..$$

dargestellt, wo a', b', a'', b'', ... vom Bogen u unabhängige Coefficienten sind.

Die Glieder $a' \cos u + b' \sin u$ bedeuten den Einfluss der

Excentricität, alle andern Glieder beziehen sich auf den übrigen Theil der periodischen Fehler.

91. Die Correction der Ablesung wird gefunden aus den Messungen von gleich grossen Bögen längs dem ganzen Umfange des Limbuskreises. Dazu werden wenigstens zwei Mikroskope angewandt; hat das Instrument zwei diametral entgegengesetzte Mikroskope, so kann man mit ihnen den Bogen von 180° auf verschiedenen Stellen des Limbuskreises messen, ohne die Mikroskope aus ihren Lagern herauszunehmen; überhaupt kann man den Bogen ausmessen, welcher dem Abstande von zwei Mikroskopen gleich ist. Bei der Untersuchung anderer Bögen bleibt ein Mikroskop in seiner Lage, das andere aber wird herausgenommen und auf einer besonderen Stütze so befestigt, dass der Abstand des zweiten Mikroskops von dem ersten dem Bogen gleich wird, welchen man messen will. Werden die Theilungsfehler am Verticalkreis von Repsold untersucht, so hat man noch das Rohr, welches die Objectivlinsen trägt, und sein Gegengewicht abzunehmen, damit man den Limbuskreis eine volle Umdrehung um die Horizontalachse machen lassen kann.

Um periodische Fehler zu bestimmen, werden zuerst die Bogen zwischen den Theilstrichen 0° und $\omega°$, $\omega°$ und $2\,\omega°$, $2\,\omega°$ und $3\,\omega°$, ... $(n-1)\,\omega°$ und $n\,\omega°$ auf dem Limbuskreise gemessen, wo $\omega = \frac{360°}{n}$ ist und die ganze Zahl n so gewählt wird, dass auch ω eine ganze Zahl von Graden bedeutet. Man fängt damit an, dass man zwei Mikroskope in einem Abstande von einander, welcher nahezu dem Bogen ω gleich ist, auf einer zuverlässigen Stütze befestigt, so dass bei der Bewegung des Limbuskreises die Mikroskope ihre Lage nicht verändern und die Theilungsstriche auf dem Limbus deutlich sichtbar werden. Als erstes wollen wir dasjenige Mikroskop annehmen, unter welchem nach der Richtung der wachsenden Zahlen gerechnet, die kleinere Anzahl von Graden abgelesen wird.

Zur Messung des Bogens ω stellt man, durch die Bewegung

des Limbuskreises, den Nullstrich auf demselben (0°) genau unter den Doppelfaden des ersten Mikroskops und liest das zweite Mikroskop ab. Nun dreht man wieder den Limbus so, dass der Theilstrich von ω Graden genau unter den Doppelfaden des ersten Mikroskops kommt, und liest das zweite Mikroskop ab; auf dieselbe Weise wird der Bogen zwischen den Theilstrichen von $2\,\omega°$ und $3\,\omega°$, ... $(n-1)\,\omega°$ und $n\,\omega°$ gemessen. Nennen wir ω', ω'', ... $\omega^{(n)}$ die Grösse desselben Bogens, wie er aus der ersten, zweiten, n^{ten} Messung folgt, so ist

$$\omega = \frac{\omega' + \omega'' + \ldots + \omega^{(n)}}{n}$$

der wahrscheinlichste Werth dieses Bogens, befreit vom Einfluss der Excentricität und der periodischen Theilungsfehler; dabei wird auch die Wirkung der zufälligen Messungs- und Theilungsfehler verringert. Da die Correction für den Theilstrich 0° 0′ 0″ als Null anzunehmen ist, so erhält man:

für die Abl. 0° die Corr. 0 (Null).
„ „ „ $\omega°$ „ „ $\omega - \omega' = \Delta(\omega)$
„ „ „ $2\,\omega°$ „ „ $2\,\omega - \omega' - \omega'' = \Delta(2\,\omega)$
⋮
„ „ „ $(n-1)\,\omega°$ „ „ $(n-1)\,\omega - \omega' - \omega'' - \ldots - \omega^{(n-1)}$
$= \Delta\,[(n-1)\,\omega]$.

Ebenso werden die Correctionen für andere Ablesungen gefunden, indem man statt ω einen anderen Bogen nimmt; hat man z. B. zuerst $\omega = 60°$ angenommen und die Correctionen für die Ablesungen von 60°, 120°, 180°, 240° und 300° bekommen, so macht man $\omega = 45°$ oder nimmt 8 statt 6 für n; stellt die Mikroskope in der Entfernung 45° von einander und bestimmt durch eine Reihe von Messungen, wie oben erklärt wurde, die Correctionen der Ablesungen bei 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° und 315°. Oder man kann $\omega = 30°$ setzen und die

Correctionen für 30°, 60°, 90°, ... 200°, 330° suchen u. s. w. Man erhält dann die Correctionen für dieselben Theilstriche aus verschiedenen Reihen von Messungen und berechnet die wahrscheinlichsten Correctionen wie oben gezeigt wurde (S. 169); die kleinen gegenseitigen Abweichungen hängen von zufälligen Messungs- und Theilungsfehlern ab.

Wenn die Correctionen $\triangle(\omega)$, $\triangle(2\omega)$ u. s. w. der Ablesungen $\omega°$, $2\omega°$ u. s. w. am vortheilhaftesten bestimmt sind, so werden folgende Ausdrücke zur Berechnung der Coefficienten a', b', a'', b'', ... angewandt:

$$
\begin{aligned}
0 &= a' + a'' + \ldots\ldots \\
\triangle(\omega) &= a' \cos\omega + b' \sin\omega + a'' \cos 2\omega + b'' \sin 2\omega + \ldots \\
\triangle(2\omega) &= a' \cos 2\omega + b' \sin 2\omega + a'' \cos 4\omega + b'' \sin 4\omega + \ldots \\
&\vdots \\
\triangle[(n-1)\omega] &= a' \cos(n-1)\omega + b' \sin(n-1)\omega + a'' \cos 2(n-1)\omega + b'' \sin 2(n-1)\omega + \ldots
\end{aligned}
$$

Die Gewichte dieser Gleichungen sind verschieden, im Falle guter Messungen kann man sich aber erlauben, sie alle gleich anzunehmen, ohne viel an der Genauigkeit der Resultate zu verlieren; dann werden a', b', a'', b'', ... sehr einfach nach der Methode der kleinsten Quadrate folgendermassen bestimmt:

$$a' = 2\left\{\frac{\triangle(\omega)\cos\omega + \triangle(2\omega)\cos 2\omega + \ldots + \triangle[(n-1)\omega]\cos(n-1)\omega}{n}\right\}$$

$$b' = 2\left\{\frac{\triangle(\omega)\sin\omega + \triangle(2\omega)\sin 2\omega + \ldots + \triangle[(n-1)\omega]\sin(n-1)\omega}{n}\right\}$$

$$a'' = 2\left\{\frac{\triangle(\omega)\cos 2\omega + \triangle(2\omega)\cos 4\omega + \ldots + \triangle[(n-1)\omega]\cos 2(n-1)\omega}{n}\right\}$$

$$b'' = 2\left\{\frac{\triangle(\omega)\sin 2\omega + \triangle(2\omega)\sin 4\omega + \ldots + \triangle[(n-1)\omega]\sin 2(n-1)\omega}{n}\right\}$$

u. s. w.

Mit diesen Coefficienten kann man die Correction $\Delta(z)$ für jede beliebige Ablesung nach der Gleichung

$$\Delta(z) = a' \cos z + b' \sin z + a'' \cos 2z + b'' \sin 2z + \ldots.$$

berechnen. Es ist auch leicht die Correction für die Mittel aus den Ablesungen an zwei diametral entgegenstehenden Vernieren oder Mikroskopen zu finden; es sei $\Delta\mu$ diese Correction, u und $180° + u$ die Ablesungen am ersten und zweiten Vernier oder Mikroskop; $\Delta(u)$ und $\Delta(180° + u)$ die entsprechenden Correctionen; setzt man u und dann $180° + u$ statt z in den Ausdruck $\Delta(z)$, so kommt

$$\Delta(\mu) = \frac{\Delta(u) + \Delta(180° + u)}{2}\, a'' \cos 2u + b'' \sin 2u + \ldots.$$

Das Mittel der beiden Ablesungen ist hier frei vom Einfluss der Excentricität und auch des Fehlers, welcher von unregelmässiger Gestalt der Zapfen der Umdrehungsachse des Kreises herrührt und wie eine variable Excentricität wirkt.

Wenn der Kreis mit vier Vernieren oder Mikroskopen versehen ist, welche von einander um 90° abstehen und u die Ablesung am ersten Vernier oder Mikroskop bedeutet, so werden $u + 90°$, $u + 180°$, $u + 270°$ am zweiten, dritten und vierten abgelesen; das Mittel der Correctionen $\Delta(u)$, $\Delta(u + 90°)$, $\Delta(u + 180°)$ und $\Delta(u + 270°)$ von jenen vier Ablesungen ist

$$a^{IV} \cos 4u + b^{IV} \sin 4u + \ldots.$$

Ueberhaupt wenn n Verniere oder Mikroskope in gleichen Entfernungen von $\frac{360°}{n}$ von einander am Kreise vorhanden sind, so wird die Correction der Ablesungen an allen Vernieren oder Mikroskopen gleich

$$a^{(n)} \cos nu + b^{(n)} \sin nu + \ldots.$$

sein.

Im Mittel der Ablesungen verschwindet also ein desto grösserer Theil der periodischen Fehler, je mehr gleich weit untereinander entfernte Verniere oder Mikroskope sich am Kreise befinden.

Ueber die Theilungsfehler kann man viel Lehrreiches finden in Bessels Königsb. Beobachtungen, Bd. I u. VII, Astronomische Nachrichten, Nr. 841; Struves Observ. Dorpat., Vol. VI; Peters Mémoires de l'Acad. des Sciences de St. Petersbourg; auch in den Lehrbüchern der sphärischen Astronomie von Brünnow und Chauvenet.

Von den astronomischen Uhren.

92. Man gebraucht bei astronomischen Beobachtungen Uhren von zweierlei Art; die einen von ihnen können nur dann gebraucht werden, wenn sie an einem Orte lothrecht und fest aufgestellt sind; die anderen aber kann man auch auf Reisen brauchen, weil sie in jeder beliebigen Lage gehen. Die Uhren der ersten Art heissen Pendeluhren, weil mit ihnen ein Pendel verbunden ist, dessen gleichförmige Schwingungen den beständigen Gang der Uhr oder die gleichmässige Umdrehung der Zeiger bedingen. An einer Walze, die sich in der Uhr befindet, ist ein Gewicht angebracht, dessen Schwere die Bewegung des Zahnrädersystems, welches die Zeiger dreht, hervorbringt, und welches am Anfange einer jeden neuen Pendelschwingung dem Pendel einen kleinen, sich immer gleichbleibenden Impuls ertheilt, ohne welchen mit der Zeit das Pendel, durch den Widerstand der Luft und die Reibung zur Ruhe kommen würde.

Je länger das Pendel ist, desto langsamer geht die Uhr;

bei Secunden-Pendeluhren verändert sich der tägliche Gang nahezu um 100 Secunden mittlere Zeit, wenn die Pendellänge sich um 0,09 englische Zoll ändert. Die Schwingungsdauer des Pendels ist ferner abhängig von der Grösse des Schwingungsbogens; wenn z. B. eine Secundenuhr sehr nahe nach mittlerer Zeit geht, bei einem halben Schwingungsbogen (oder dem Winkel, um welchen das Pendel bei jeder Schwingung sich im Maximum von der Verticalen entfernt) von 2°, so wird die Uhr nahezu um 3 Secunden täglich retardiren, wenn der Schwingungsbogen auf 3° gebracht wird. Es ist immer vortheilhaft, die Pendeluhr so zu berichtigen, dass der halbe Schwingungsbogen sehr klein ist, z. B. nicht über 1° beträgt.

Die Uhren zweiter Art haben statt des Pendels eine kreisförmige Unruhe, die aus einem Messingringe besteht, dessen Schwingungen durch die Wirkung einer stählernen Spiralfeder unterhalten werden, während dabei das ganze System der Zahnräder durch eine andere, weit stärkere Feder in Bewegung gesetzt wird; diese Feder ist ebenfalls aus Stahl gearbeitet und spiralförmig gestaltet; beim Aufziehen der Uhr wird sie aufgewickelt, darauf strebt sie sich durch ihre Elasticität wieder abzuwickeln, und bringt dadurch bei dieser Abwickelung den ganzen Mechanismus in Bewegung. Eine ähnliche kleinere Spiralfeder befindet sich auch an den astronomischen Pendeluhren, deren Zweck nur ist, den Gang der Uhr während derjenigen Zeit fortzuführen, wenn das Gewicht in der Uhr aufgezogen wird. Huyghens war der erste, welcher ein Pendel bei den Wanduhren, bei den Reise- oder Taschenuhren aber die Balance als das beste Mittel vorschlug, um einen gleichförmigen Gang der Uhr zu erzielen.

Durch die Wärme dehnt sich die Pendelstange aus oder nimmt ihre Länge zu, so dass dann die Uhr anfängt, langsamer zu gehen. Damit aber die Veränderungen der Temperatur keine Störungen in dem Gange der Uhr veranlassen können, so setzt man das Pendel aus Stangen von zwei Metallen zusammen,

welche sich verschieden durch die Wärme ausdehnen. Grösstentheils braucht man hierzu drei Eisen- und zwei Zinkstangen, die eine solche Länge haben und auf solche Weise mit einander verbunden sind, dass die Ausdehnung der Eisenstangen die sogenannte Linse des Pendels um ebensoviel nach unten senkt, wie die Ausdehnung der Zinkstangen sie wieder in die Höhe hebt. Solche Vorrichtungen heissen Compensations-Rost-Pendel, und wurden zuerst in England von Harrisson im Jahre 1726 erfunden. Es giebt aber noch andere Arten, die Compensation zu bewerkstelligen; von denen eine, von Graham angegebene, besonders bemerkenswerth ist, und darin besteht, einen mit Quecksilber angefüllten Glascylinder am Ende einer Eisenstange zu befestigen; durch die Wärme dehnt sich alsdann die Stange aus; zugeich steigt aber auch das Quecksilber im Glascylinder in die Höhe, und wenn man eine gehörige Menge Quecksilber eingefüllt hat, so wird der Schwingungsmittelpunkt des Pendels in constanter Entfernung vom Aufhängepunkt bleiben; wodurch denn also auch das Pendel bei jeder andern Temperatur mit derselben Geschwindigkeit schwingen wird. Indessen sind die Harrissonschen Compensationspendel der anderen Art von Compensationspendeln vorzuziehen, weil die grosse Menge Quecksilber die Temperaturveränderungen nicht so schnell annimmt, wie die dünne Eisenstange *).

*) Es wird vielleicht nicht überflüssig sein, die genäherten Dimensionen der Secunden-Pendeluhren mitzutheilen:

Compensirtes Rostpendel (St.-Z.)

	Par. Zoll	Linien
Länge der Stahlfeder	0	11,0
Länge der mittleren Eisenstange	35	11,8
Länge der Zinkstangen	21	4,0
Länge jeder äusseren Eisenstange	22	11,8

Die Stangen sind cylindrisch; die Eisenstangen 2,7, die Zinkstangen 4,4 Linien dick.

Compensirtes Quecksilberpendel.	P. Z.	P. L.
Länge der Stahlfeder	0	11
Länge der Eisenstange	31	8,5

Der Gang der Uhren zweiter Art, welcher durch die Bewegung einer elastischen Feder hervorgerufen wird, wird sich ebenfalls durch die Einwendung der Temperatur ändern; denn ausser der Veränderung in den Dimensionen der Kreisbalance wird noch die Feder ihre Dichtigkeit, und folglich auch ihre Elasticität ändern; es werden alsdann in einer geringeren Temperatur die Schwingungen der Balance rascher, als in einer höheren Temperatur erfolgen. Um diesen Einfluss der Temperatur so viel wie möglich zu eliminiren, befestigt man an entgegengesetzten Seiten der Kreisbalance zwei kleine bogenförmige Platten, die jede besonders aus fest mit einander verbundenen Silber- und Platina-, oder Messing- und Stahlplättchen besteht. Das am stärksten sich ausdehnende Metall, das Silber oder das Messing, ist nach aussen, das Platina- oder Stahlplättchen aber nach innen angebracht; das eine Ende dieser Platten ist an der Kreisbalance befestigt, das andere aber hält ein frei zu bewegendes kleines Gewicht, welches man mittelst Schrauben hin und her stellen kann, um den Gang der Uhr auszugleichen. Wenn nun die Temperatur zunimmt, so werden die Plättchen sich krümmen, und das Gewicht sich der Kreisbalance nähern, so dass dann also die Schwingungen rascher werden müssen; zugleich aber wird sich die Elasticität der Spiralfeder, welche diese Schwingungen hervorbringt, verringern; und mithin bei gehöriger Länge der Plättchen, und berichtigter Lage der Gewichte der

---

	PZ.	PL.
Länge des Rahmens, in welchem der Glascylinder angebracht ist	7	8,3
Länge des Glascylinders	6	11,5
Höhe des Quecksilbers im Cylinder	6	0

Der Rahmen ist 2 Par. Z. 4 Linien breit; der Glascylinder hat inwendig 1 Z. 10,5 L. im Durchmesser; wird mit reinem Quecksilber gefüllt, wozu circa 10 bis 11 englische Pfund erforderlich sind.

Falls dieses Pendel in der Temperatur von — 1° Reaumur richtig geht, aber in der Wärme von + 26° Reaumur eine Secunde in 24 Stunden verliert, so müssen ungefähr 20 Loth Quecksilber mehr in den Glascylinder gethan werden, und im umgekehrten Fall ebenso viel herausgenommen werden.

Gang der Uhr constant bleiben. Auf solche Weise eingerichtete Uhren nennt man nun *Chronometer*.

Eine vollständige und recht deutliche Beschreibung des Mechanismus der Uhren findet man in dem 1842 erschienenen Werke des dänischen Künstlers Jürgensen: „Die höhere Uhrmacherkunst", angegeben.

Der Gang guter Uhren darf sich im Laufe eines Tages nicht über einige wenige Bruchtheile einer Secunde ändern. Früher wurden die Chronometer von Lepaute, Breguet, Arnold, W. Jürgensen, Haut u. s. w. sehr geschätzt; jetzt aber werden die Herren Dent und Frodsham in London, Knoblich in Hamburg und Tiede in Berlin zu den berühmtesten Künstlern gezählt, welche astronomische Pendeluhren und Chronometer anfertigen.

Die astronomischen Pendeluhren muss man an einer Steinmauer, noch besser aber an einer isolirten Steinsäule, oder überhaupt auf ein recht festes Stativ aufstellen: denn sogar kleine Erschütterungen würden Störungen im Gange der Uhr zur Folge haben. Diese Aufstellung muss man aber immer so einrichten, dass die horizontalen Umdrehungsachsen auch wirklich genau horizontal, und zugleich das Pendel gleiche Schwingungsbögen auf beiden Seiten derjenigen Verticallinie macht, welche es, in Ruhe gesetzt, einnehmen würde. Zieht man das an der Uhr befindliche Gewicht auf, und setzt das Pendel mit der Hand in Bewegung, so wird es leicht sein, sich zu überzeugen, ob die Uhr richtig aufgestellt ist; denn wenn man auf die Schläge des Pendels horcht und bemerkt, dass die Pendelschläge alle auf einander regelmässig nach gleichen Intervallen folgen, so ist dieses ein Beweis, dass die Uhr richtig aufgestellt ist; findet dieses aber nicht statt, so berichtigt man die Lage der Uhr durch einige dazu angebrachte Schrauben. Auf diese Art wird man den Abfall der Uhren nahezu berichtigen können. Herr Professor Knorre bemerkt aber, dass ein einfaches und viel genaueres Mittel dazu durch den Gradbogen unter dem Pendel

selbst gewährt wird. Durch langsame Bewegungen des Pendels mit der Hand hin und her, bestimmt man auf dem Gradbogen die Punkte, welchen der Zeiger am untern Ende des Pendels in dem Augenblicke entspricht, wenn die Zähne des Steigrades überspringen, und ebenfalls den Punkt, an welchem das Pendel in Ruhe bleibt. Stehen die beiden ersten Punkte gleich weit vom letzterem ab, so ist der Abfall ausgeglichen.

Die Chronometer sind entweder Kasten- (Box) oder Taschen-Chronometer; jedoch sind meistens die ersteren den letzteren vorzuziehen. Sehr selten wird die Chronometer-Spiralfeder ihrer ganzen Länge nach eine gleichförmige Elasticität haben; dieser Fehler wird grösstentheils durch einen besondern, im Werke befindlichen Apparat, die sogenannte Schnecke aufgehoben; trotzdem wird es gut sein, das Chronometer immer um dieselbe Zeit aufzuziehen, damit immer alle Theile der Feder auf gleiche Weise wirken, und dadurch der Gang gleichförmig bleibt. Wenn das Chronometer stehen geblieben ist, so muss man es zuerst aufziehen, und dann rasch aber vorsichtig das ganze Chronometer horizontal drehen; hierdurch kommt die Unruhe in Schwingung und das Chronometer fängt an zu gehen; in allen anderen Fällen aber muss man stets sorgfältig jeden Stoss und namentlich jede schnelle Drehung vermeiden, weil dadurch sehr leicht der Stand und zuweilen auch der Gang des Chronometers geändert werden könnte. Ueberhaupt übt jede starke Erschütterung einen schädlichen Einfluss auf den Gang des Chronometers aus, und daher muss man es niemals von einem Orte nach einem andern transportiren, als zu Fuss gehend, oder in einem guten, mit starken Federn versehenen Reise- oder Eisenbahnwagen, und selbst in diesem Falle das Chronometer auf ein elastisches Kissen ganz fest aufstellen, damit es nicht auf der Reise durch Stösse zu leiden hat. Auf Schiffen stellt man das Chronometer in einem dem Compass ähnlichen Kasten auf, so dass es sich frei um zwei horizontale Achsen drehen kann, und von den Schwankungen des Schiffes in seiner horizontalen Aufstellung nicht afficirt wird.

Wenn man aber mit dem Chronometer zu Lande reist; so wird das Chronometer anstatt sanften und langsamen Schwankungen, die auf Schiffen stattfinden, kurzen und heftigen Stössen ausgesetzt; in diesem Falle muss man das Chronometer so in seinem Kasten feststellen, dass er sich nach keiner Seite bewegen kann. Trägt man das Chronometer mit den Händen, so muss man es nicht an seinen Griffen, sondern an dem Kasten selbst halten, und sorgfältig jegliche Schwankung, rasche Bewegung oder Umdrehung vermeiden.

Ebenso muss man auch das Chronometer immer in derselben Lage aufstellen; die beste hierzu ist die horizontale Lage, wenn das Zifferblatt nach oben gekehrt ist; aber wenn man ein Taschenchronometer während einer Reise in der Tasche aufbewahrt, so muss es auch nachher immer in ähnlicher Lage aufgestellt werden. Manche Beobachter ziehen es vor, so lange das Chronometer müssig liegt, es immer mit dem Zifferblatte nach oben zu halten, um die Zapfen zu schonen, auf welche die Schwere der Räder und der Unruhe wirkt, wenn das Chronometer zu Beobachtungen gebraucht wird; doch muss man sich dann durch geeignete Untersuchungen davon überzeugen, ob das Chronometer in jeder Lage denselben Gang hat, was keineswegs immer der Fall ist. Vorzüglich darf der Reisende nicht versäumen, seine Chronometer regelmässig aufzuziehen; denn sollte eines von ihnen während der Reise stehen bleiben, so würde durch die unaufhörlichen Erschütterungen, welche alsdann nicht mehr durch die Gegenwirkung des Ganges des Chronometers selbst geschwächt werden, die Balance durch ihr Gewicht in eine solche Bewegung gerathen, dass dadurch das Chronometer vielleicht ganz zerstört wird. Ist man genöthigt, ein Chronometer auf sehr schlechten Wegen, oder in Wagen ohne Federn zu transportiren, so ist es rathsam, die Unruhe anzuhalten und durch kleine untergeschobene Keile von Kork zu arretiren.

Im Laufe einiger Jahre werden selbst die besten Pendeluhren und Chronometer ihren gleichförmigen Gang verlieren;

was grösstentheils von dem Dickwerden und Eintrocknen des Oeles herrührt, womit die verschiedenen Zapfen und andere Theile dieser Instrumente eingeschmiert werden, welche der Reibung unterworfen sind; die Pendeluhren wird ein geschickter Astronom selbst zum Reinigen auseinandernehmen können; die Chronometer aber wird er den Händen eines Künstlers überliefern müssen, welcher sich mit der Construction solcher Instrumente beschäftigt; und man darf sie ja nicht unvorsichtigerweise einem gewöhnlichen Uhrmacher anvertrauen. Es ist noch zu bemerken, dass gleich nach der Reinigung, wenn frisches Oel an die Zapfen gethan ist, die Pendeluhren und Chronometer während mehrerer Tage sehr unregelmässig gehen, so dass sie bei astronomischen Beobachtungen nicht gut zu gebrauchen sind; man muss meist mehr als eine Woche warten, bis sie einen regelmässigen Gang annehmen.

Obgleich nun die Chronometer eine Compensationsbalance haben, so ändern sie doch fast alle ihren Gang ein wenig, sobald man sie stärkeren Temperaturveränderungen aussetzt, weswegen man sie auch so viel wie möglich hiervor schützen muss. Beobachtet man bei Tage, so muss das Chronometer in den Schatten gestellt werden; ebenso ist es auch im Winter nöthig, während der Beobachtungen das Chronometer mit dickem, warmen, wollenen Zeuge zu bewickeln, und nicht lange in der Kälte zu lassen, denn sonst könnte es vielleicht, wenn es eine geraume Zeit im starken Froste bliebe, nicht nur einen sehr veränderten Gang erhalten, sondern sogar stehen bleiben.

Es kommt bisweilen vor, dass die Stahltheile der Unruhe bei ihrer Bearbeitung einen mehr oder weniger hohen Grad von Magnetismus annehmen. Solche Chronometer gehen meist sehr unregelmässig, und namentlich sind sie auf Kriegsschiffen, welche gewöhnlich grosse Eisenmassen mit sich führen, gänzlich unbrauchbar.

93. Den Stand und Gang des Chronometers untersucht man mit Hülfe astronomischer Beobachtungen; die Zahl der Minuten

und Secunden, um welche die Chronometerangabe, in einem gegebenen bestimmten Augenblicke von Sternzeit oder mittlerer Zeit verschieden ist, nennt man die Uhrcorrection oder den Chronometerfehler; unter dem täglichen Gange versteht man diejenige Zahl von Minuten und Secunden, um welche es in 24 Stunden, gegen eine der eben erwähnten Zeiten, voreilt oder sich verspätet; man zählt den Chronometerfehler und den Gang dann positiv, wenn die Uhrangabe resp. zu klein ist oder retardirt. Will man Sterne beobachten, so ist es gut, sich eines Chronometers zu bedienen, welches nach Sternzeit geht; beobachtet man dagegen oft die Sonne, so ist es bequemer, ein Chronometer zu gebrauchen, welches nach mittlerer Zeit geht. In allen Fällen aber muss man die Beobachtungen mit demselben Chronometer anstellen, und zur Berichtigung der übrigen vergleicht man diese mit dem ersteren vor und nach den Beobachtungen.

Gewöhnlich vergleicht man ein nach Sternzeit gehendes Chronometer mit einem, welches nach mittlerer Zeit geht; da nun 1^s Sternzeit $= 0^s,9973$ mittlere Zeit, und die Schläge in Bruchtheilen von Secunden aufeinanderfolgen, so wird es sich allemal nach kurzer Zeit ereignen, dass die Schläge der Balancen beider zu vergleichenden Chronometer in demselben Momente zusammenschlagen werden; diese Coincidenz der Schläge zweier Chronometer kann man nun mit grosser Schärfe durch das Gehör bestimmen. Wenn die Schläge anfangen deutlich sich einander zu nähern, so sieht man auf das eine Chronometer, und bemerkt sich die Angabe seines Secundenzeigers, ganz kurz vor der Zeit, wenn die Coincidenz stattfinden wird, wobei man Null zu zählen anfängt; dann zählt man mit den Schlägen dieses Chronometers immer fort, und zwar so lange, bis die wirkliche Coincidenz der Schläge der Balancen selbst bei beiden Chronometern stattfindet, wo man denn auf das zweite Chronometer sieht und die genaue Angabe seines Secundenzeigers abliest; darauf schreibt man die im Kopfe behaltene Zahl der Secunden des ersten Chronometers

auf, fügt die gezählten Schläge hinzu, und schreibt zugleich die Secundenzahl des zweiten Chronometers auf; hiermit verbindet man alsdann die gehörige Zahl der Stunden und Minuten an beiden Chronometern; so dass dadurch ihre entsprechenden Stände im Moment der Coincidenz bestimmt sein werden. Um sich dies Verfahren zu erleichtern, muss man kurz vor der Coincidenz sich beim ersten Chronometer den Ort des Secundenzeigers bei einer vollen Zahl von Secunden merken, gegen welchen auf dem Zifferblatte ein grosser Strich, oder eine Ziffer verzeichnet ist; jedoch darf die Zählung der Schläge nicht zu lange fortgesetzt werden, weil man sonst sich sehr leicht bei der Zählung irren und die Schläge des einen Chronometers mit denen des anderen verwechseln könnte. Um dieses vollständig zu erläutern, folgt hier ein Beispiel. Man verglich ein Chronometer A, dessen Schläge sich immer nach $0^s,4$ mittlerer Zeit wiederholten, mit einem anderen Chronometer B, bei welchem die Schläge sich immer nach $0^s,5$ Sternzeit wiederholten, und fand, dass die Schläge beider Balancen sich um die Zeit $9^h\ 13^m\ 10^s$ nach dem Chronometer A sehr zu nähern anfingen; man behielt nun 10^s im Kopfe, und zählte nach den Schlägen des Chronometers A fort, indem man nun fortwährend auf das Chronometer B achtete. Darauf hörte man, dass bei dem vierten Schlage des Chronometers A die Coincidenz der Schläge beider Chronometer stattfand, wo alsdann gefunden wurde, dass das Chronometer B $42^s,5$ zeigte; nun las man die entsprechenden Angaben der Stunden- und Minutenzeiger, welche bei dieser Coincidenz stattfanden, ab, und fand bei A: $9^h\ 13^m$ und bei B: $5^h\ 28^m$, so dass also auf diese Weise:

$9^h\ 13^m\ 10^s + 4$ Schläge bei $A = 5^h\ 28^m\ 42^s,5$ bei B,

oder: $9^h\ 13^m\ 11^s,60$ . . . . . bei $A = 5^h\ 28^m\ 42^s,5$ bei B,

denn 1 Schlag bei $A = 0^s,4$, also 4 Schläge $= 1^s,6$.

Man kann auch noch die Zeit der Coincidenz auf andere Arten finden; z. B. wenn die Uhr ganze oder halbe Secunden schlägt, so kann man um die Zeit der Coincidenz die Secunden,

welche die Uhr zeigt, in Gedanken weiter zählen, und zugleich auf das zu vergleichende Chronometer sehen; so bald alsdann die Coincidenz der Schläge stattfindet, ist es nur nöthig, die Zahl der in Gedanken gezählten Secunden der Uhr und zugleich die Angabe des Secundenzeigers an dem verglichenen Chronometer aufzuschreiben, indem man die nöthigen Stunden und Minuten hinzufügt. Um hierbei Fehler zu vermeiden, macht man gewöhnlich wenigstens zwei Vergleichungen.

Wenn beide Chronometer ungefähr nach gleichen Intervallen schlagen und entweder nach Sternzeit oder nach mittlerer Zeit gehen, so werden die Schläge beider sich sehr langsam nähern, so dass ein Zusammenfallen der Schläge sich nicht in einer kurzen Zeit wiederholen kann. In diesem Falle wird man sich mit einer genäherten Vergleichung begnügen müssen, deren Fehler nicht grösser als die Hälfte desjenigen Bruchtheiles einer Secunde werden wird, nach welchem sich die Schläge der rascher schwingenden Balance wiederholen. Uebrigens hat man Chronometer, welche man zur Vergleichung aller Arten von Uhren bequem benutzen kann; so hat man z. B. Chronometer, deren Balancen auf solche Weise eingerichtet sind, dass sie 13 Schwingungen in 6^s mittlerer Zeit machen; so dass also im Laufe von jeden 6 Secunden die Schläge solcher Chronometer mit den Schlägen eines Chronometers, welches nach mittlerer oder Sternzeit geht, zusammenfallen müssen, und die Ungenauigkeit der Coincidenz niemals $^1/_{26}$ Theil einer Secunde übersteigen kann.

Wenn das Chronometer eine Excentricität hat, so muss man bei der Vergleichung entweder die Angabe von Excentricität befreien, oder immer die Vergleichungen an demselben Ort auf dem Zifferblatte anstellen. Um den Fehler wegen der ungenauen Aufstellung der Pendeluhren, oder wegen des ungleichen Abfalles der Uhren zu eliminiren, muss man sich zur Regel machen, immer zwei Coincidenzen zu beobachten, die eine bei einem geraden, die zweite bei einem ungeraden Uhrschlage, und aus diesen das Mittel nehmen.

94. Wenn man für zwei Zeitepochen T und T' die genauen Chronometercorrectionen u und u' gefunden hat, so kann man unter der Annahme, dass der Gang gleichförmig ist, sehr leicht die Chronometercorrection für irgend eine andere Zeit berechnen. Aber viele Umstände beeinträchtigen die Gleichförmigkeit des Ganges der Uhren, so dass man auf solche Weise die Chronometercorrection nicht ganz zuverlässig berechnen kann; da wir die Ursache dieser Veränderungen des Ganges nicht kennen, und zugleich auch nicht wissen, nach welchem Gesetze sie mit dem Intervall der gegebenen Zeiten T und T' wachsen, so können wir nur annehmen, dass die Ungleichförmigkeiten, welche im Gange der Uhr stattfinden, zufällig sind, also zuweilen positiv und zuweilen negativ. Bezeichnen wir in diesem Falle den mittleren Werth der Ungleichförmigkeit im Laufe einer gewissen Zeiteinheit durch $\mp \alpha$, so können wir annehmen, dass im Laufe der Zeit t die wahrscheinliche Summe der Quadrate der Ungleichförmigkeiten gleich $\alpha^2 t$ sein wird, so dass alsdann die Chronometercorrection, welche in der Annahme eines gleichförmigen Ganges berechnet wurde, den Fehler $\mp \alpha \sqrt{t}$ einschliessen wird. Es sei nun gefordert, die Correction x für die Zeit $T + t = T' - t'$ zu bestimmen, welche zwischen T und T' liegt, und es sei $u' - u = m\,(t + t')$; hier bedeutet m den täglichen mittleren Gang des Chronometers im Zeitraum $t + t' = T' - T$; wobei ein Tag als Einheit der Zeit betrachtet wird. Zählt man m positiv, so folgt durch einfache Interpolation: $x = u + m\,t$, oder $x = u' - m\,t'$. Nach Elimination von m erhalten wir $x = \frac{u t' + u' t}{t + t'}$; aber wenn wir u und m kennen, u' aber nicht, oder wenn wenn wir u' und m kennen, und u nicht, so können wir in dem ersten der erwähnten Werthe von x einen Fehler $= \mp \alpha \sqrt{t}$ erwarten, in dem zweiten Ausdruck aber einen $= \mp \alpha \sqrt{t'}$; die Zahlen, welche nun den Grad des Zutrauens ausdrücken, den man jeder Bestimmung beilegen kann, werden in der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung Ge-

wichte genannt, und sind den Quadraten der angeführten Fehler umgekehrt proportional; folglich haben wir in unserem Falle $x = u + mt$, mit dem Gewichte $= \frac{k}{t}$, und $x = u' - mt'$ mit dem Gewichte $\frac{k}{t'}$, wo k ein gewisser constanter Zahlenwerth ist. Um nun hieraus den wahrscheinlichsten Werth von x aus u und u' abzuleiten, müssen wir jede einzelne Bestimmung mit ihrem Gewichte multipliciren, und die Summe der so erhaltenen Grössen durch die Summe der Gewichte dividiren; der so gefundene Werth von x wird alsdann ein Gewicht haben, welches der Summe der angegebenen Gewichte gleich sein wird; folglich haben wir:

$$x = \frac{ut' + ut}{t + t'}, \text{ mit dem Gewichte } = \frac{k(t + t')}{tt'},$$

$$\text{oder auch sein mittlerer Fehler } = \mp \alpha \sqrt{\frac{tt'}{t + t'}};$$

wenn wir aber x durch einfache Interpolation bestimmen, so wird der Fehler am grössten bei $t = t'$, oder in der Mitte der Zeit zwischen T' und T sein, wie dieses von selbst klar ist.

Wenn der Gang des Chronometers sich beständig nach einer Seite ändert, so wird der Fehler, welcher von der Ungleichförmigkeit des Ganges abhängt, einen anderen Ausdruck erhalten; nehmen wir z. B. an, dass u und u' die Uhrcorrectionen zu den Zeiten T und T' $(T' = T + t + t')$ bezeichnen und die tägliche Verspätung $= \mu$ war; dass ferner μ jeden Tag um 2β wächst; so hat man nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung: $u' = u + \mu\ (t + t') + \beta(t + t')^2$. Setzt man nun $u' - u = m(t' + t)$, so wird $m = \mu + \beta(t + t')$; hat man daher m constant gesetzt, und die für die Zeit $T + t$ entsprechende Chronometercorrection x nach der Formel $x = u + mt$ berechnet, während man sie $= u + \mu t + \beta t^2$ hätte setzen müssen; so muss in diesem Falle der Fehler in unserem $x = \beta t t'$ werden; er ist am grössten, wenn $t = t' = \frac{1}{2}(t + t')$ gesetzt wird.

Uebrigens hat jedes Chronometer seine Eigenthümlichkeiten, und daher lassen sich seine Fehler nur aus wirklichen Beobachtungen erforschen. Bei der Untersuchung des Ganges gewisser astronomischer Uhren hat Struve gefunden, dass die Unrichtigkeit ihrer Correctionen, wie sie durch einfache Interpolation zwischen den vorhergehenden und nachfolgenden Beobachtungen hergeleitet werden, auf eine befriedigende Weise durch folgende empirische Formel ausgedrückt wird: nämlich $k\frac{tt'}{t+t'}$, wo x, t und t' ähnliche Bedeutungen wie oben haben; siehe Expédition Chronométrique de 1843, p. 97—105.

Ueber die Veränderlichkeit im täglichen Gange der Pendeluhren und Chronometer und die Bestimmung der Correctionen, welche von der Unvollständigkeit der Compensirung abhängen.

95. Wir wollen hier die Ursachen kurz erwähnen, welche nach den Erfahrungen der Astronomen und Hydrographen die hauptsächlichsten Veränderungen im Gange von Pendeluhren und Chronometern bewirken können.

1) Der tägliche Gang einer Pendeluhr, unter sonst gleichen Umständen, hängt etwas von dem Luftdruck ab; man hat gefunden, dass bei der Zunahme der Quecksilberhöhe im Barometer um einen englischen Zoll, die tägliche Retardation der Uhr sich vergrössert oder die Acceleration sich vermindert um $0^s,3$ für die Secunden-Rostpendeluhr, und um $0^s,4$ für die Secundenpendeluhr mit Quecksilbencompensirung.

   Auf den Gang des Chronometers hat die Aenderung des Luftdrucks keinen merklichen Einfluss.

2) Man hat oft bemerkt, dass die Boxchronometer, bisweilen auch die Taschenchronometer ihren Gang ändern, wenn das Zifferblatt verschieden zum Horizont geneigt wird. Die Chronometermacher suchen diesen Fehler, besonders bei Taschenchronometern, mitunter dadurch zu beseitigen, dass sie das Gewicht von einer Hälfte der Balance kleiner oder grösser machen, als das andere, so dass die Lage des Schwerpunkts der Unruhe etwas verändert wird. Eine theoretische Erklärung der dabei von den Künstlern angewandten Regel hat H. Philipps in den Denkschriften der Pariser Academie (Februar 1864) gegeben.

3) Das allmähliche Ausschleifen der Achsen und Zapfen bewirkt mit der Zeit eine Beschleunigung, dagegen die Verdickung des Oels, mit welchem verschiedene Theile angefeuchtet werden, eine Verspätung im Gange der Pendeluhren und Chronometer; jenachdem die erste oder die zweite von diesen Ursachen die andere übertrifft, geht die Uhr schneller oder langsamer.

4) In veränderlichen Temperaturen kann die Unvollkommenheit der Compensirung am meisten zur Ungleichförmigkeit im Gange des Chronometers beitragen. Weil die Ausdehnung der Metalle nicht genau der Zunahme der Wärme proportional ist, so ist es möglich, die Compensirung nur zwischen gewissen Grenzen herzustellen, was auch nicht immer erreicht wird. Die Officiere der französischen Marine, H. Lieussou und H. Pagel*), haben in dieser Hinsicht viele Chronometer untersucht und die Anweisung gegeben, wie der Gang des Chronometers bei verschiedenen Temperaturen zu berechnen ist.

Zahlreiche Versuche sind auch auf der Pulkowaer Sternwarte ausgeführt, aus denen O. v. Struve Rechnungsvor-

*) Récherches sur la marche des chronomèters, par M. Lieussou; Récherches chronométriques, par M. Pagel.| Mémoires publiés par l'Administration de la marine, V[me] cahier.

schriften abgeleitet hat, die sehr bequem sind und auf dem Wege der Erfahrung erprobt wurden; wir wollen diese Regel hier erklären.

Es sei m der mittlere tägliche Gang des Chronometers in der Temperatur T; n der mittlere tägliche Gang in der Temperatur $T + t$; dann ist n eine stetige Function von m und t; nach dem Taylorschen Lehrsatz kann man $n - m$ in eine Reihe von Gliedern entwickeln, die nach wachsenden Potenzen von t fortschreiten; begnügt man sich mit den Gliedern, in welchen nur die erste und zweite Potenz von t vorkommt, so wird n durch eine Gleichung von der Form:

$$n = m + p \, . \, t + q \, . \, t^2$$

ausgedrückt, wo p und q von t unabhängig sind und aus Bestimmungen des Chronometerganges in verschiedenen Temperaturen berechnet werden.

Es ist aber beschwerlich, das Thermometer am Tage und in der Nacht so oft abzulesen, wie es nöthig ist, um die mittlere Temperatur des Locals zu erhalten, in welchem die Chronometer aufbewahrt werden.

Da die Temperatur einen grossen Einfluss auf den Gang eines guten, uncompensirten Chronometers hat, so kann man auch umgekehrt aus der Grösse seiner täglichen Beschleunigung oder Verspätung auf die Temperatur schliessen, in welcher dieses Chronometer sich befand. Wenn also im Verlauf von zwei oder drei Tagen die compensirten Chronometer in einem Local neben dem uncompensirten stehen werden und tägliche Gänge der compensirten und des uncompensirten Chronometers aus Vergleichungen mit einer astronomischen Uhr von bekanntem Gange abgeleitet werden, so hat man hinreichende Mittel, um die Wirkung der Wärme auf die Chronometer abzuschätzen. Auf diese Weise, nach dem Vorschlage von Peters, sind auf der Pulkowaer Sternwarte viele Chronometer untersucht; O. v. Struve hat in der Zeitschrift der russischen Marine, März 1856, die Regeln bekannt

gemacht, nach welchen aus diesen Versuchen der Gang des Chronometers zu berechnen ist.

Es sei n der tägliche Gang des compensirten und μ der tägliche Gang des uncompensirten Chronometers in derselben Temperatur und auf dieselbe Zeit bezogen; es sei ferner m der tägliche Gang des compensirten Chronometers in solcher Temperatur, in welcher der tägliche Gang des uncompensirten Chronometers $= 0$ ist. Also geht n in m über, sobald $\mu = 0$ ist; nach dem Taylorschen Lehrsatz kann man überhaupt

$$n = m + \mu . x + \mu^2 . y + \ldots$$

annehmen, wo die Coefficienten x und y von μ unabhängig sind. Um sehr grosse Zahlen zu vermeiden, wird

$$\gamma = \frac{\mu}{100}; \ \xi = 100 . x; \ \eta = (100)^2 . y$$

gesetzt; dann ist

$$n = m + \gamma . \xi + \gamma^2 . \eta.$$

Die Coefficienten p und q, sowie x und y oder ξ und η, werden am besten während der kalten Jahreszeit bestimmt; man verfährt dabei folgendermassen. — Die Chronometer werden in einem Zimmer gehalten, welches man heizen kann, so dass die Temperatur desselben nach Belieben erhöht oder erniedrigt werden kann. Das uncompensirte und die compensirten Chronometer nebst einem Thermometer werden in diesem Zimmer aufgestellt; man öffnet die Fenster oder Thüren, um das Zimmer bis nahezu zu einer Temperatur von $+ 5°$ Reaumur abzukühlen, und sucht diese Temperatur während drei oder vier Tagen constant zu erhalten. Zuerst lässt man dort die Chronometer 24 oder mehr Stunden ruhig liegen, bis sie die Temperatur des Zimmers annehmen; dann werden sie untereinander und mit einer astronomischen Uhr, vermittelst eines besonders dazu bestimmten Chronometers verglichen und die Angaben des Thermometers abgelesen; nach jeden 24 Stunden, während zwei oder

drei Tagen wiederholt man alle diese Vergleichungen und die Ablesung der Temperatur. Durch Heizung des Zimmers geht man darauf zu einer anderen Temperatur über und verfährt auf dieselbe Weise und in derselben Ordnung, wie oben gesagt ist. Da zur Ausführung der Versuche 10 bis 14 Tage erforderlich sind, so ist es möglich, dass in diesem Zeitintervall manche Chronometer ihren Gang etwas verändert hätten, wenn sie auch in derselben Temperatur gelassen wären; um den Einfluss solcher Aenderungen möglichst zu beseitigen, ist es rathsam, die Versuche in gleichen Zeitintervallen nacheinander folgen zu lassen und in einer wiederkehrenden Reihe der Temperaturen auszuführen; z. B. die Versuche in der Temperatur von beinahe + 5° Reaumur anzufangen; dann sie in den Temperaturen von + 15, von + 25, darauf wieder in der Temperatur von + 15 und endlich in der Temperatur von + 5° Reaumur zu wiederholen und zwar in solcher Ordnung, dass das Mittel der Zeiten vom ersten und letzten Versuche bei + 5 Grad, sowie das Mittel vom ersten und letzten Versuche bei + 15 Grad, gleich der Mitte der Zeiten von Versuchen bei + 25 Grad wird; dann sind alle Versuche auf einen und denselben Zeitmoment reducirt.

Des Beispiels wegen wollen wir aus zahlreichen Versuchen, welche H. Smislow in Pulkowa gemacht hat, diejenigen auswählen, welche zur Berechnung der Compensationscoefficienten p und q, ξ und η des Chronometers Kessels Nr. 1297 dienen; dieses Chronometer geht nach Sternzeit; seine täglichen Gänge, ebenso auch die täglichen Gänge des uncompensirten Chronometers Dent Nr. 2022, sind in Bezug auf mittlere Zeit gegeben. Die Gänge in der Temperatur von + 5° Reaumur und in der Temperatar von + 15° Reaumur sind die Mittel aus den ersten und letzten Versuchen.

	Compens. Chr. Kessels No. 1297.			Uncompens. Chr. Dent Nr. 2022.		
Temp.	+ 5° R.	+ 15° R.	+ 25° R.	+ 5° R.	+ 15° R.	+ 25° R.
tägl. G.	— 235ˢ,06	— 237ˢ,32	— 235ˢ,89	— 144ˢ,30	— 1ˢ,57	+ 145ˢ,89.

1. Berechnung der Coefficienten p und q aus Thermometerangaben.

Wir nehmen hier $T = +15°$; $m = -237^s,32$; für die Temperatur von $+5°$ ist $T+t = +5°$. oder $t = -10°$, $n = -235^s,06$; für die Temperatur von $+25°$ ist $t = +10°$, $n = -235^s,89$; wir erhalten also die Gleichungen:

$-235^s,06 = m - 10p + 100q$	folglich
$-237,32 = m$	$p = -0^s,04150$
$-235,89 = m + 10p + 100q$	$q = +0,01845$

und überhaupt ist $n = -237^s,32 - 0^s,04150\,t + 0^s,01845\,t^2$.

2. Berechnung der Coefficienten ξ und η aus Vergleichungen des compensirten Chronometers mit dem uncompensirten.

Hier ist in der Temperatur

von $+5°$ R. . . . $n = -235^s,06$; $\gamma = -\frac{144,30}{100}$

von $+15°$ R. . . . $n = -237,32$; $\gamma = -\frac{1,57}{100}$

von $+25°$ R. . . . $n = -235,89$; $\gamma = +\frac{145,89}{100}$

Rechnet man nach der Formel: $n = m + \gamma\xi + \gamma^2\eta$, so kommt

$-235^s,06 = m - 1,443 . \xi + 2,0823\,\eta$	woraus: $m = -237^s,33$
$-237,32 = m - 0,157 . \xi + 0,0246\,\eta$	$\xi = -\ 0^s,31$
$-235,89 = m + 1,459 . \xi + 2,1285\,\eta$	$\eta = +\ 0,88.$

An vielen Chronometern angestellte Untersuchungen haben Folgendes ergeben:

1) Meistens verlieren die Chronometer den gleichförmigen Gang, sobald sie in der Temperatur unter $+4$ oder $5°$ R. sich befinden. Es ist also nöthig, für die Polarfahrten die Chronometer anders als gewöhnlich einzurichten.

2) Nicht selten ist eine Uebercompensirung vorhanden, d. h. manche Chronometer gehen schneller in der Wärme, als in

der Kälte; der Coefficient p (oder ξ) ist dann negativ und ziemlich gross.

3) Es gelingt durch Versuche häufig, die kleinen Gewichte an der compensirten Balance so zu vertheilen, dass der Coefficient p (oder ξ) der ersten Potenz des Zuwachses der Temperatur sehr klein wird; dagegen ist es auf diesem Wege nicht möglich, den Coefficienten der zweiten Potenz verschwinden zu machen.

4) Wiederholt man nach Verlauf von drei oder mehr Jahren die Untersuchung der Compensirung an demselben Chronometer ohne vorangehende Reinigung, so erhält man oft andere Werthe für die Coefficienten p und q, als die, welche früher gefunden waren. Diese Veränderung wird wahrscheinlich durch die zunehmende Verdichtung des Oels auf den Zapfen bewirkt.

Die Wirkung verschiedener Ursachen, welche auf den Gang des Chronometers Einfluss haben, ist überhaupt mit der Zeit Veränderungen unterworfen, die bei behutsamer Behandlung des Chronometers klein werden und nur allmählich zum Vorschein kommen; es wird also immer erlaubt sein, den täglichen Gang als eine stetige Function der Zeit und des Temperaturwechsels zu betrachten. Es sei m der tägliche Gang des Chronometers zur Zeit T und in der Temperatur τ; man kann den täglichen Gang zur Zeit $T+t$ und in der Temperatur τ', wenn t keine grosse Anzahl von Tagen bedeutet, und wenn τ' und τ innerhalb der Grenzen der Compensirung liegen, durch den Ausdruck

$$m+2b.t+p(\tau'-\tau)+q(\tau'-\tau)^2+2\{p'(\tau'-\tau)+q'(\tau'-\tau)^2\}.t+..$$

darstellen, wo $2b$ die tägliche, von der Compensirung unabhängige Zunahme des Ganges ist; und $2p'$ und $2q'$ die täglichen Zunahmen der Coefficienten p und q bedeuten; es wird am besten sein, für τ' das arithmetische Mittel aus den Temperaturen anzunehmen, welche während der nach der Zeit T verflossenen Tage (t) beobachtet wurden. Multiplicirt man den obigen Ausdruck mit dem Differential von t, und integrirt

zwischen den Grenzen $t = 0$ und t, so erhält man die Zunahme der früheren Uhrcorrection. Wenn also u die Uhrcorrection zur Zeit T bedeutet, so ist

$$u + [m + p(\tau' - \tau) + q(\tau' - \tau)^2] . t + [b + p'(\tau' - \tau) + q'(\tau' - \tau)^2] . t^2 + \ldots .$$

die Uhrcorrection zur Zeit $T + t$.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung der Breite eines Ortes, und des Standes der Uhren durch Messung von Zenithdistanzen der Gestirne.

Allgemeine Bemerkungen.

96. Es sind hier drei Aufgaben zu lösen, nämlich:

1) Die Breite eines Ortes zu ermitteln, wenn die Zeit der Beobachtung als bekannt vorausgesetzt wird.
2) Den Stand der Uhr zu berichtigen, wenn die Breite bekannt ist.
3) Die Breite des Ortes und die Zeit zu bestimmen, wenn beide unbekannt sind.

Wir wollen aber vorher diejenigen Fälle in Betracht ziehen, in welchen die Fehler der Beobachtung den geringsten Einfluss auf die Genauigkeit des Endresultates äussern.

Hierzu wollen wir uns das sphärische Dreieck denken, welches vom Zenithe, vom sichtbaren Pole des Aequators und vom Sterne gebildet wird, und dieselbe Bezeichnung wie in § 6, S. 17 beibehalten. Wenn die Sternzeit der Beobachtung und die gerade Aufsteigung eines Sterns bekannt sind, so können wir

leicht seinen entsprechenden Stundenwinkel $= t$, in Graden ausgedrückt, finden (§ 5, S. 9). Beobachtet man daher einen bekannten Stern, so kann man die Breite des Ortes φ vermittelst der Höhe des Sternes $= h$ und des Stundenwinkels $= t$ bestimmen, wobei man annehmen kann, dass ein Fehler in φ gleich $\delta\varphi$, nur unabhängig sein wird von dem Fehler der Höhe $= \delta h$ und dem Fehler des Stundenwinkels des Sterns $= \delta t$. Wenn δh und δt sehr klein sind, so folgt aus der Differenzialrechnung:

$$\delta\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dh}\right)\delta h + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\delta t.$$

Wenn man die Gleichung (1) in § 6, S. 17, oder:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

nach h, t und φ differenziirt, so erhält man:

$$\left(\frac{d\varphi}{dh}\right) = \frac{\cos h}{\cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos t},$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin t}{\cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos\delta \cos t};$$

und wegen der Gleichungen (2) und (3) § 6, S. 17; wird man haben:

$$\left(\frac{d\varphi}{dh}\right) = -\sec a; \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\cos\varphi \operatorname{tg} a,$$

wo a das Azimuth, bei nördlicher Breite von Süden nach Westen, nach der Richtung der täglichen Bewegung bis 360° gezählt, bedeutet. Folglich wird:

$$\delta\varphi = -\sec a . \delta h - \cos\varphi \operatorname{tg} a . \delta t \quad . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Hieraus sieht man, dass bei sonst gleichen Fehlern in h und t, der Fehler $\delta\varphi$ in der Breite des Orts am kleinsten sein wird, wenn das Azimuth a nahe an 0° oder 180° ist; folglich wird die günstigste Zeit zur Breitenbestimmung durch Höhenmessungen diejenige sein, wenn das Gestirn sich im Meridiane befindet; aber man wird hierzu diejenigen Sterne, welche nahe am Pole sind, auch dann mit Vortheil beobachten können, wenn

sie schon entfernter vom Meridiane sind; denn für diese wird das Azimuth, vom sichtbaren Weltpol aus nach beiden Seiten des Meridians gezählt, immer sehr klein, und die Bewegung der Sterne in Höhe sehr langsam sein.

Will man dagegen aus der Höhe des Sterns und der Breite des Orts den Stundenwinkel t berechnen, um die Zeit der Beobachtung zu bestimmen, so ersieht man aus der Gleichung:

$$-\delta t = sec\,\varphi\,cotg\,a . \delta\varphi + sec\,\varphi\,cosec\,a . \delta h \quad . \; . \; . \; . \; (3),$$

dass der Fehler in der Breite des Orts $\delta\varphi$ und der Fehler in der Höhe des Sterns δh den geringsten Einfluss auf die Bestimmung des Stundenwinkels in demjenigen Falle äussern wird, wenn $a = 90°$ oder $a = 270°$, d. h. wenn der Stern sich im ersten Vertical befindet; und folglich ist dieser Fall der günstigste, wenn man die Zeit durch Höhenmessungen bestimmen will.

Meridian-Beobachtungen.

97. Es sei z' die unmittelbar beobachtete scheinbare Zenithdistanz des Gestirns; ϱ die diesem z' entsprechende Strahlenbrechung für den Stand des Barometers und Thermometers schon verbessert, π die Horizontalparallaxe des Gestirns, aus den astronomischen Ephemeriden entnommen und auf die Zeit und den Ort des Beobachters reducirt. Alsdann hat man, wenn π klein ist, die wahre Zenithdistanz des Gestirns $z = z' + \varrho - \pi\,sin\,z'$.

Es sei jetzt $HZPP'$ (Fig. 1, Taf. I) die Ebene des Meridians, C der Mittelpunkt der Himmelskugel, welchen wir im Centrum der Erde voraussetzen; HCR die Richtung der Mittagslinie im wahren Horizonte des Beobachters, Z das Zenith und

P der sichtbare Pol des Aequators ANQ, und es sei der Punkt S der Ort der oberen Culmination eines nahe am Pole gelegenen Sterns; der Ort der unteren Culmination sei der Punkt S'; bezeichnet man nun die geographische Breite des Orts, oder die Höhe des Pols über dem Horizonte durch φ (§ 3, S. 5) und die Declination des Sterns durch δ, so ist $PS = 90° - \delta = PS'$ und $ZP = 90° - \varphi$. Setzt man nun zur Vereinfachung $ZS = z$, $ZS' = z_{,}$, so findet man $ZP = ZS + SP = ZS' - S'P$, und folglich:

$$\varphi = \delta - z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$
$$\varphi = 180° - \delta - z_{,} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wenn das Gestirn in T zwischen dem Aequator und dem Zenithe durch den Meridian geht, d. h. wenn die Declination des Gestirns positiv und kleiner als die Breite des Orts ist, und man die wahre Zenithdistanz TZ des Gestirns durch z bezeichnet, so folgt: $AZ = \varphi$, $AT = \delta$, $ZT = z$, und wir haben:

$$\varphi = z + \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wenn die Declination des Gestirns negativ ist (d. h. südlich auf der nördlichen, und nördlich auf der südlichen Halbkugel), so durchschneidet es den Meridian in T' zwischen dem Aequator und dem Horizonte; es sei $ZT' = z$ $T'A = \delta$, wo δ die Anzahl von Graden, Minuten und Secunden bedeutet, die in der Declination enthalten sind; so ist alsdann $\varphi = AZ = ZT' - AT'$, und

$$\varphi = z - \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

98. Hieraus erhellt, dass die Genauigkeit der Breitenbestimmung ganz und gar von der Genauigkeit der angenommenen Declination des Gestirns abhängt; aber es giebt zwei Methoden die Breite eines Orts, unabhängig von der Declination, zu bestimmen; die erstere und in den meisten Fällen vorzüglichere von diesen Methoden besteht darin, die Zenithdistanzen eines in der Nähe des Pols gelegenen Sterns, zur Zeit der oberen und

unteren Culmination durch den Meridian zu beobachten, und die andere darin, die Zenithdistanzen der Sonne zur Zeit des Sommer- und Winter-Solsticiums zu bestimmen.

1) Wenn wir annehmen, dass ein Circumpolarstern in der oberen Culmination durch den Meridian, zwischen dem Pole des Aequators und dem Zenithe durchgeht, und seine Zenithdistanz in der oberen Culmination $= z$, oder seine Höhe $= H = 90° - z$, und seine wahre Zenithdistanz in der unteren Culmination $= z_{,}$, oder Höhe $h = 90° - z_{,}$ ist, so folgt aus (1) und (2) § 97, S. 251:

$$\varphi = 90° - \tfrac{1}{2}(z_{,} + z) = \frac{H + h}{2}.$$

Wenn der Stern in der oberen Culmination durch den Meridian zwischen dem Aequator und dem Zenithe durchgeht, und seine Declination $\delta > 90° - \varphi$ und $< \varphi$ ist, so wird man ihn auch in der unteren Culmination beobachten können; in diesem Falle aber geben die Gleichungen (2) und (3) § 97, S. 251:

$$\varphi = 90° - \tfrac{1}{2}(z_{,} - z) = 90° - \tfrac{1}{2}(H - h).$$

Man muss übrigens bei Breitenbestimmungen solche Sterne vermeiden, welche bei der unteren Culmination eine so kleine Höhe haben, dass man die Strahlenbrechung nicht genau bestimmen kann.

Die Declination des Sterns wird sich zwischen den Beobachtungen der oberen und unteren Culmination verändern können, vorzüglich wenn der Zeitraum zwischen den Beobachtungen mehrere Tage umfasst. Diese Veränderung der Declination lässt sich aber mit der grössten Schärfe berechnen, wenn auch die Declination selbst nur genähert bekannt ist, und folglich wird man alle Beobachtungen immer auf dieselbe Zeitepoche reduciren können. Es ist klar, dass, wenn $\delta > \varphi$, alsdann eine positive Zunahme in der Declination eine ebenso grosse Zunahme in der Zenithdistanz des Gestirns in der oberen Culmination hervorbringt, dagegen die Zenithdistanz des Gestirns in der unteren Culmination um eben so viel abnimmt.

2) Wir wollen durch $z\odot$ die wahre Zenithdistanz des Centrums der Sonne zur Zeit des Sommersolsticiums, durch $Z\odot$ aber dieselbe Grösse zur Zeit des Wintersolsticiums bezeichnen, und es seien S und S' (Fig. 1, Taf. V) die Oerter des Sonnencentrums in der Sommer- und Wintersonnenwende, Z das Zenith, HR der wahre Horizont und EQ der Aequator. Wenn sich die Neigung der Ecliptik gegen den Aequator nicht veränderte und beide Sonnenwenden sich genau im Mittage ereigneten, so würde man haben: $ES = ES' =$ Schiefe der Ecliptik $= \omega$; $SZ = z\odot$, $S'Z = Z\odot$, $EZ = \varphi = \frac{Z\odot + z\odot}{2}$ und $\omega = \frac{Z\odot - z\odot}{2}$.

Aber es wird sich sehr selten die Sonnenwende im Mittage des Beobachtungsorts selbst ereignen. Es sei daher z' die wahre Zenithdistanz in der Nähe der Sommersonnenwende; die Declination der Sonne $= + \delta$, und die gerade Aufsteigung $= \alpha$; es sei ferner Z' die wahre Zenithdistanz des Sonnencentrums in der Nähe der Wintersonnenwende, und alsdann die Declination der Sonne $= - \delta'$, die gerade Aufsteigung $= \alpha'$. Die Sonnenwenden finden dann statt, wenn $\alpha = 90°$ und $\alpha' = 270°$; folglich werden die Werthe $(90° - \alpha) = y$ und $(270° - \alpha') = y'$, in der Nähe der Sonnenwenden sehr klein sein. Nun denke man sich das sphärische Dreieck $\Upsilon \odot A$ (Fig. 2, Taf. V), in welchem Υ den Frühlingspunkt darstellt; $\odot$ den Ort des Sonnencentrums in der Ecliptik $\Upsilon\odot$; $\odot A$ einen grössten Kreisbogen, welcher senkrecht auf dem Aequator ΥA steht; hier ist der Winkel $\odot \Upsilon A = \omega$, der Bogen $\Upsilon A = \alpha$, oder α', $\odot A = \delta$ oder δ'; folglich $tg\,\delta = tg\,\omega \sin\alpha = tg\,\omega \cos y$; $tg\,\delta' = tg\,\omega \cos y'$. Daraus folgt:

$$\sin(\omega - \delta) = 2 \sin\omega \cos\delta \sin^2\frac{y}{2}$$

$$\sin(\omega - \delta') = 2 \sin\omega \cos\delta' \sin^2\frac{y'}{2}$$

In dem zweiten Theile der Gleichungen braucht man δ und δ' nicht sehr genau zu kennen; wenn δ und δ' wenig verschieden von ω, und $\omega - \delta$ oder $\omega - \delta'$ nicht grösser als $10'$ ist, so kann man annehmen, dass:

$$\omega - \delta = \frac{\sin 2\omega}{2} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} y}{\sin 1''} + \sin 2\omega . \sin^2 \omega \cdot \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} y}{\sin 1''} =$$

$$= \frac{\sin 2\omega}{2} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} y}{\sin 1''} + 0{,}116 . \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} y}{\sin 1''},$$

indem man im letzten Gliede $\omega = 23° 27'$ voraussetzt.

Nun findet man die gerade Aufsteigung der Sonne in allen astronomischen Ephemeriden in Zeit ausgedrückt, so dass $(6^h - AR\odot) = y$ in Zeit gegeben ist; ferner braucht man die Werthe von $\frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} y}{\sin 1''}$ und von $\frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} y}{\sin 1''}$ nicht zu berechnen, sondern man entnimmt sie aus einer Tafel, welche bei der Berechnung von Circummeridianhöhen angewandt, und weiter unten erwähnt werden wird.

Es sei $\omega - \delta = x$, $\omega - \delta' = x'$; berechnet man daher x und x', so erhalten wir $z\odot = z' - x$, $Z\odot = Z' + x'$.

Durch die Störungen, welche in der Bewegung der Erde durch die Anziehung der Planeten und des Mondes hervorgebracht werden, nimmt die mittlere Schiefe der Ecliptik jährlich um $0'',457$ ab, und unterscheidet sich von der scheinbaren Schiefe um eine kleine Grösse, welche abhängig ist von dem Schwanken der Erdachse, oder von der Nutation, deren Periode nahezu 18 Jahre $7\frac{1}{2}$ Monate ist. Ausserdem schwankt das Centrum der Erde selbst ein wenig um die Ebene der Ecliptik herum, und die Periode dieser Schwankung beträgt ungefähr 29 Tage; es wird daher die Linie, welche das Centrum der Erde und der Sonne verbindet, mit der Ebene der Ecliptik einen kleinen Winkel bilden, welcher die Breite der Sonne heisst. Um nun alle diese Umstände zu berücksichtigen, wollen wir annehmen, dass wir aus den in der Nähe der Wintersonnenwende gelegenen Beobachtungen die wahre Zenithdistanz des Sonnencentrums $= Z\odot$

abgeleitet hätten, zu dieser Zeit sei die scheinbare Schiefe der Ecliptik $= \omega'$, die Breite der Sonne $= \lambda'$, und es seien $z\odot$, ω'' und λ'' dieselben Werthe für die der Sommersonnenwende nahegelegenen Beobachtungen. Der Breitenkreis der Sonne fällt um die Zeit der Sonnenwenden beinahe mit dem Declinationskreise der Sonne zusammen, und wenn man daher auf der nördlichen Halbkugel λ' und λ'' positiv annimmt, wenn die Sonne nördliche Breite hat, so erhält man folgende Ausdrücke für die geographische Breite des Ortes:

$$\varphi = Z\odot - \omega' + \lambda' \text{ und } \varphi = z\odot + \omega'' + \lambda''$$

und hieraus folgt:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(Z\odot + z\odot) - \tfrac{1}{2}(\omega' - \omega'') + \tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda'').$$

Die Werthe von λ' und λ'', ω' und ω'' kann man aus allen guten astronomischen Ephemeriden entnehmen; in die letzte Formel tritt nur der Werth $\omega' - \omega''$ ein, welchen man stets ganz genau nach den bekannten Formeln berechnen kann, selbst wenn auch die Schiefe der Ecliptik ein wenig ungenau bekannt wäre, und daher kann man die geographische Breite eines Orts nach dieser letzten Formel, unabhängig von der Genauigkeit fremdartiger Elemente, bestimmen.

Die Sterne können weit genauer beobachtet werden als die Sonne, und ausserdem ist das Zeitintervall zwischen den Beobachtungen zweier aufeinander folgender Culminationen eines Sterns nur 12 Stunden, während der Zeitraum zwischen den Beobachtungen zweier aufeinander folgenden Sonnenwenden ein halbes Jahr beträgt. Daher wird diese Methode die Breite eines Orts durch die Sonnenbeobachtungen, unabhängig von der Declination zu bestimmen, nur dann gebraucht, wenn andere Methoden nicht anwendbar sind, namentlich unter dem Aequator, oder in sehr kleinen Breiten.

Bestimmung der Breite eines Ortes durch Circummeridianhöhen.

99. Die Zahl der Beobachtungen im Meridiane ist stets beschränkt, und gewöhnlich werden solche nur an grösseren astronomischen Instrumenten angestellt, die unveränderlich in der Ebene des Meridians aufgestellt sind. Bei der Anwendung unserer beschriebenen Instrumente ist es daher weit vortheilhafter, mehrere Zenithdistanzen in der Nähe des Meridians zu messen, um dadurch die Zahl der Breitenbestimmungen zu vermehren, von welchen alsdann jede einzelne eben so gut wie eine directe Meridianbeobachtung zu benutzen ist.

Wir wollen annehmen, dass zu den Sternzeiten s und s' entweder vor oder nach der Culmination eines Sterns, die schon von Strahlenbrechung befreiten, beobachteten wahren Zenithdistanzen dieses Sterns z und z' seien; nennen wir die ihnen entsprechenden Stundenwinkel t und t', so wird $t = s - \alpha$, und $t' = s' - \alpha$ sein, wo α die gerade Aufsteigung des Sterns ist; wenn wir ferner die Declination des Sterns durch δ, und die Breite des Orts durch φ bezeichnen, so erhalten wir:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\cos z' = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t'$$
$$\cos z - \cos z' = \cos\varphi \cos\delta (\cos t - \cos t')$$
$$\sin\left(\frac{z'-z}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{z'+z}{2}\right) = \cos\varphi \cos\delta \sin\left(\frac{t'-t}{2}\right) \sin\left(\frac{t'+t}{2}\right).$$

Wenn man $t' = 0$ annimmt, so geht z' in die wahre Meridianzenithdistanz über, welche wir $= \zeta$ setzen wollen. Aus der letzten Gleichung erhalten wir für die obere Culmination:

$$\sin\left(\frac{z-\zeta}{2}\right) = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin\left(\frac{z+\zeta}{2}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder $\sin\frac{x}{2} = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin\left(\zeta + \frac{x}{2}\right)}$, wo $x = z - \zeta$ und $\zeta = z - x$ ist.

Wenn die Beobachtungen in der Nähe der unteren Culmination angestellt werden, so muss man $t' = 180°$ setzen, und nimmt dann $t - 180° = T$ an; dann wird T der von der unteren Culmination abgezählte Stundenwinkel sein; wenn nun $\zeta_{,}$ die wahre Meridian-Zenithdistanz des Sterns in der unteren Culmination bedeutet, so ist:

$$\sin\left(\frac{\zeta_{,} - z}{2}\right) = \frac{\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}T}{\sin\left(\frac{\zeta_{,} + z}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

oder $\sin\frac{x}{2} = \frac{\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}T}{\sin\left(\zeta_{,} - \frac{x}{2}\right)}$, wo $x = \zeta_{,} - z$ und $\zeta_{,} = z + x$.

Die Werthe z und t oder T kann man als aus den Beobachtungen bekannt voraussetzen; berechnet man daher x, so erhält man sogleich ζ und $\zeta_{,}$, und da δ bekannt ist, so kann man die Breite φ je nach den Umständen aus einer der Gleichungen (1), (2), (3) und (4) (§ 97!, S. 251) bestimmen. Nun enthält der zweite Theil der Gleichung die Unbekannten φ, ζ oder $\zeta_{,}$; man kann aber φ, und folglich auch ζ und $\zeta_{,}$ vermittelst der Declination δ immer annähernd, entweder aus einer Landkarte, oder aus den Beobachtungen selbst bestimmen. Im letzteren Falle nimmt man anstatt ζ die allerkleinste von Strahlenbrechung befreite Zenithdistanz für die obere Culmination; oder anstatt $\zeta_{,}$ die allergrösste von Strahlenbrechung befreite beobachtete Zenithdistanz in der unteren Culmination. Uebrigens bringt ein Fehler von 1′ bis 2′ in dem angenommenen Werthe von φ keinen merklichen Einfluss auf die Bestimmung von x hervor; sollte dennoch die gefundene Breite φ zu sehr von der angenommenen abweichen, so wird man die Berechnung des Werthes x wiederholen müssen.

In der Nähe des Meridians, wenn die Stundenwinkel nicht 40^m in Zeit übersteigen, und ζ nicht zu klein ist, kann man anstatt der strengen Gleichungen (1) und (2) folgende anwenden:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\left(\zeta+\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{2\sin^2\frac{1}{2}t}{\sin 1''} \\ x &= \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\left(\zeta_{\prime}-\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{2\sin^2\frac{1}{2}T}{\sin 1''} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Die Grössen $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}t}{\sin 1''}$ oder $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}T}{\sin 1''}$ und ihre Logarithmen kann man in den von C. F. W. Peters herausgegebenen Hülfstafeln, mit den in Zeit ausgedrückten Stundenwinkeln t oder T, als Argument aufschlagen*). Mit Hülfe von δ und der genäherten Breite φ leitet man zuerst den Werth ζ oder $\zeta_{\prime}$ ab, und berechnet sich hierauf $\log\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\zeta \text{ oder } \zeta_{\prime})}$, indem man sich hierbei die logarithmische Differenz v für $1'$, bei $\log\sin$ (ζ oder $\zeta_{\prime}$) bemerkt. Darauf sucht man sich einen genäherten Werth von x, indem man $\frac{x}{2}$ zuerst im Nenner des vorhergehenden Ausdrucks vernachlässigt; und erhält alsdann einen genaueren Werth von x, wenn man bei der oberen Culmination von dem eben gefundenen genäherten Werth von $\log x$ das Product $\frac{v}{2}\cdot x'$ abzieht (wo x' in Minuten ausgedrückt ist), oder bei der unteren Culminatioon dieses Product $\frac{v}{2}\cdot x'$ zu dem genäherten $\log x$ zulegt.

100. Wenn man die Correction x nicht für jede einzelne Beobachtung besonders zu berechnen wünscht, sondern es vorzieht, sie gleich für das arithmetische Mittel aus allen Beobachtungen zu suchen, so kann man folgendes Verfahren anwenden. Ohne die Genauigkeit der Berechnung von x merklich zu beeinträchtigen, kann man alle Potenzen von $\sin\frac{x}{2}$, welche höher als die zweite sind, ohne Weiteres vernachlässigen, und erhält alsdann:

$$x = \frac{\cos\varphi\cos\delta\,.\,2\sin^2\frac{1}{2}t}{\left(\sin\zeta+\frac{x\sin 1''}{2}\cdot\cos\zeta\right)\sin 1''},$$

$$x = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta}\cdot\frac{2\sin^2\frac{1}{2}t}{\sin 1''}\left(1-\operatorname{cotg}\zeta\cdot\frac{x\sin 1''}{2}+\ \ldots\right).$$

*) S. 60—88 unter der Bezeichnung m und $\log m$.

Es sei $\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin\zeta} = p$; setzt man nun anstatt $\frac{x}{2}$ im zweiten Theile der Gleichung seinen genäherten Werth, wie er aus dem ersten Gliede folgt, so erhalten wir annähernd bis zur zweiten Ordnung inclusive:

$$x = p\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}t}{\sin 1''} - p^2 \operatorname{cotg}\zeta \cdot \frac{2\sin^4\frac{1}{2}t}{\sin 1''}.$$

Hier ist das Glied: $\frac{2}{3}p^3(1 + 3\,cotg^2\,\zeta)\cdot\frac{2\sin^6\frac{1}{2}t}{\sin 1''}$ von der dritten Ordnung vernachlässigt.

Diese Gleichung bezieht sich auf die obere Culmination; für die untere Culmination braucht man nur im zweiten Theile der Gleichung das Zeichen des zweiten Gliedes positiv zu nehmen und T anstatt t zu setzen.

Nimmt man an, dass z, z', z'' .... die wahren Zenithdistanzen in der Nähe der oberen Culmination sind t, t', t'' .... die Stundenwinkel und x, x', x'' .... die Reductionen auf den Meridian, so erhält man $\zeta = z - x$, $\zeta = z' - x'$, $\zeta = z'' - x''$ u. s. w. Ist die Zahl dieser Bestimmungen $= N$, so findet man:

$$\zeta = \frac{z + z' + z'' + \dots}{N} - \frac{x + x' + x'' + \dots}{N} = \frac{\Sigma(z)}{N} - \frac{\Sigma(x)}{N};$$

$$\zeta = \frac{\Sigma(z)}{N} - \frac{p}{N}\Sigma\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}t}{\sin 1''}\right) + \frac{p^2}{N}\,cotg\,\zeta\,\Sigma\left(\frac{2\sin^4\frac{1}{2}t}{\sin 1''}\right).$$

Σ bedeutet hier sowohl als in allen ähnlichen Fällen, das endliche Summenzeichen.

Nimmt man daher das arithmetische Mittel aus allen beobachteten, aber zuerst von Refraction befreiten scheinbaren Zenithdistanzen, und berechnet darauf die beiden obigen Glieder, so erhält man genau denjenigen Werth von ζ, welcher dem Mittel aller beobachteten Zenithdistanzen entspricht. Zur Bequemlichkeit der Rechnung hat man Tafeln construirt, welche die Werthe von $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}t}{\sin 1''}$ und $\frac{2\sin^4\frac{1}{2}t}{\sin 1''}$, nach dem in Zeit ausgedrückten Stundenwinkel als Argument geordnet, enthalten*).

*) Astronomische Tafeln und Formeln. Herausgeg. von Dr. C. F. W. Peters. Hamburg, Wilhelm Mauke, 1871. Hier sind die obigen Grössen resp. mit m und n bezeichnet.

Obgleich nun diese Methode, die Beobachtungen zu reduciren, sehr einfach ist, so ist es doch stets besser den Werth von ζ aus jeder einzelnen Beobachtung besonders abzuleiten, weil man dann aus der Uebereinstimmung der so erhaltenen Werthe von ζ unter einander auf den Werth der einzelnen Beobachtungen schliessen und zugleich entdecken kann, ob sich irgend ein zufälliger grober Schreibfehler in die Beobachtuugen eingeschlichen hat.

101. Da die Declination der Sonne sich unaufhörlich verändert, so muss man, wenn man anstatt eines Sternes die Sonne beobachtet hat, für jede einzelne Beobachtung die zugehörige Declination bestimmen. Gauss hat eine schöne Methode vorgeschlagen, durch welche man sehr bequem den Einfluss der Veränderung der Declination eliminiren kann, zu welcher Schumacher im Philosophical Magazin für 1843 einen Beweis gegeliefert hat, welchen wir hier mit einer geringen Aenderung auseinandersetzen wollen.

Es sei φ die Breite des Orts; δ die Declination des Sonnencentrums, positiv, wenn die Sonne sich auf derselben Seite des Aequators wie der sichtbare Weltpol befindet, im entgegengesetzten Falle aber negativ; μ die Zunahme der Sonnendeclination während eines Zeitraums von zwei Tagen in Secunden ausgedrückt, so gezählt, dass der Anfang dieses Zeitraums einen Tag früher und sein Ende einen Tag später als der Mittag des Beobachtungstages fällt; alsdann drückt $\mu\,.\,\tau$ genähert die Aenderung der Sonnendeclination gegen Mittag im Laufe der Zeit τ aus, indem 48 Sonnenstunden als Zeiteinheit angenommen werden. Setzt man nun $15\,\tau = t$ und drückt t in Graden aus, so erhält man $\mu\tau = \mu \cdot \frac{t^\circ}{720^\circ}$, denn 48 Stunden entsprechen 720°. Der Werth von μ ist positiv, wenn die Sonne sich dem sichtbaren Pole nähert (d. h. für uns in Europa dem nördlichen), im entgegengesetzten Falle aber negativ.

Unter dem Aequator selbst kann man den sichtbaren Pol

willkürlich annehmen, allein bei der Bestimmung des Zeichens von μ und δ muss man diese beiden Grössen auf einen und denselben Pol beziehen. Nehmen wir jetzt an, dass zur Zeit der Beobachtung der Stundenwinkel des Sonnencentrums, in Graden ausgedrückt, und bei nördlicher Breite von Süden nach Westen gezählt $= t$ ist, so wird, wenn die Beobachtung Vormittags angestellt ist, das Zeichen von t negativ werden. Setzen wir nun $\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin\left(\zeta + \frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{2}{\sin 1''} = a$, wo φ, δ, ζ und x die frühere Bedeutung haben, so erhalten wir die Reduction der Zenithdistanz der Sonne in der Nähe des Meridians, auf die Zenithdistanz derselben im wahren Mittage, gleich:

$$-x + \mu \cdot \frac{t^\circ}{720^\circ} = -a \sin^2 \tfrac{1}{2} t + \mu \cdot \frac{t^\circ}{720^\circ}.$$

Hier ist t eine kleine Grösse. Um das Glied $\mu \cdot \frac{t^\circ}{720^\circ}$ zu eliminiren, zähle man die Stundenwinkel, statt vom wahren Mittage von einer anderen Zeit an, und nehme an, dass $t + \delta t = t_,$ der Stundenwinkel der Sonne von dem neuen Zeitpunkte abgezählt bedeute; dann wird:

$$-a \sin^2 \tfrac{1}{2} t + \mu \cdot \frac{t^\circ}{720^\circ} = -a \sin^2 \tfrac{1}{2} t_, ;$$

hieraus folgt:

$$\mu \frac{t^\circ}{720^\circ} = -a \left(\sin^2 \tfrac{1}{2} t_, - \sin^2 \tfrac{1}{2} t\right).$$

Oder:

$$\mu \frac{t^\circ}{720^\circ} = -a \sin \tfrac{1}{2} (t_, - t) \sin \tfrac{1}{2} (t_, + t).$$

Nun ist aber $t_, - t = \delta t$ eine sehr kleine Grösse, und man kann daher ohne merklichen Fehler $\sin {}^1\!/_2 (t_, - t) = {}^1\!/_2 \delta t \sin 1''$ und $\sin {}^1\!/_2 (t_, + t) = \sin t$ setzen; drückt man alsdann δt in Bogensecunden aus, so erhält man:

$$\delta t = \frac{-\mu . 2t}{720^\circ . a \sin t \sin 1''}.$$

Will man anstatt t in Graden, seinen Werth in Secunden ausgedrückt, einführen, so muss man anstatt 720° seinen entsprechenden Werth 720°.3600″ setzen. Aber in der Nähe des Meridians kann man annehmen, dass $t \sin 1'' = \sin t$; führt man nun für a seinen Werth in die Gleichung ein, indem man $\frac{x}{2}$ im Nenner dieses Ausdrucks vernachlässigt, und $\zeta = \varphi - \delta$ setzt, so erhält man unter der Bemerkung, dass $\frac{1}{\sin 1''} = 206265''$ ist, den folgenden Ausdruck:

$$\delta t = -\frac{206265}{720 \,.\, 3600} \cdot \mu \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta}.$$

Hieraus sieht man, dass für alle nicht zu grossen Werthe von t die Grösse δt constant ist. Sie wird folglich auch für eine Reihe von Circummeridian-Beobachtungen, die an demselben Tage und an demselben Orte angestellt werden, constant sein.

Die letzte Gleichung giebt δt in Bogensecunden an, daher ist: $\frac{\delta t}{15} = \delta\tau$ die Verbesserung des Stundenwinkels in Zeitsecunden, und folglich:

$$\delta\tau = -A\,\mu \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta},$$

$$\text{wo } A = \frac{206265}{15 \,.\, 720 \,.\, 3600};\ \log A = 7{,}72470 - 10.$$

Man findet also den verbesserten Stundenwinkel $t_{,}$ auf die einfachste Weise, wenn man zuerst zum Stande des Chronometers im wahren Mittage den Werth:

$$+ A\,\mu \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta},$$

in Zeitsecunden ausgedrückt, zulegt, und darauf alle Stundenwinkel von diesem verbesserten Mittage abzählt. Reducirt man alsdann die Zenithdistanzen der Sonne mit diesen Stundenwinkeln, so kann man die Declination als constant und gleich der Declination der Sonne im wahren Mittage annehmen*).

*) Addirt man $+ A \cdot \frac{\mu \sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta}$ zur Zeit des wahren Mittages, so

102. Wir wollen jetzt einige praktische Regeln erwähnen, welche man bei der Bestimmung der Breite eines Orts immer befolgen muss.

1) Mit dem bekannten Stande und Gange des Chronometers muss man erst die genäherte Zeit des Durchgangs des zu beobachtenden Gestirns durch den Meridian berechnen, um dann nicht zu lange vor dieser Zeit die Beobachtungen noch vor dem Durchgange des Gestirns anfangen zu können. Hat man einen Fixstern beobachtet, so zieht man die genau berechnete Uhrzeit der Culmination des Sterns von den Beobachtungszeiten ab und verwandelt die so gefundenen Intervalle, vermöge des bekannten Ganges des Chronometers, in Sternzeit; auf diese Weise erhält man die Stundenwinkel des Sterns in Zeit. Wenn die Sonne beobachtet wurde, so muss man, um die Stundenwinkel zu berechnen, zuerst den Stand des Chronometers gegen den verbesserten Mittag bestimmen und diesen gefundenen Stand von den beobachteten Zeiten abziehen; die so erhaltenen Intervalle kann man leicht in wahre Sonnenzeit umwandeln, indem es nur nöthig ist, den Gang des Chronometers gegen wahre Sonnenzeit zu wissen; die so reducirten Zeitintervalle drücken die Stundenwinkel der Sonne selbst aus.

---

erhält man die Zeit, wenn die Sonne ihre grösste Höhe hat; es sei nun H die Meridianhöhe der Sonne, h ihre grösste Höhe, welche stattfindet, wenn der Stundenwinkel der Sonne $= t$; so folgt für ein positives μ, dass $h = H + \mu \cdot \frac{t}{720.3600''} - a\, sin^2 \frac{1}{2} t$ ist.

Da nun h ein Maximum sein soll, so folgt aus der Differenzialrechnung: $\frac{dh}{dt} = \frac{\mu}{720.3600} - a\, sin \frac{1}{2} t\, cos \frac{1}{2} t = 0$; daher $\frac{\mu}{720.3600.a} = \frac{1}{2} sin\, t$ oder sehr nahe $= \frac{1}{2} t\, sin\, 1''$, mithin $t = \frac{2\mu}{720.3600.sin\, 1''.a}$. Dividirt man t durch 15, um es in Zeit auszudrücken, und setzt für a seinen Werth, so folgt für den in Zeit ausgedrückten Stundenwinkel t der Werth:

$$+ A\mu \cdot \frac{sin(\varphi - \delta)}{cos\,\varphi\, cos\,\delta}.$$

Wenn man einen weit vom Pole entfernten Stern beobachtet, so muss der Stand des Chronometers bis auf 1^s genau bekannt sein, besonders wenn die Zenithdistanz des Sterns klein ist. Sollte aber die Zeitbestimmung nicht so genau sein, so muss man vorzüglich Sterne in der Nähe des Poles wählen und so nahe wie möglich am Meridiane beobachten.

Man muss ferner die Beobachtungen so gleichmässig wie möglich auf beide Seiten des Meridians vertheilen, indem man vor und nach dem Durchgange des Gestirns durch den Meridian, gleich viele Zenithdistanzen, wo möglich in gleichen Zwischenräumen nach einander misst; denn in diesem Falle wird ein Fehler in der Zeitbestimmung einen entgegengesetzten, aber beinahe gleichen Einfluss auf die Beobachtungen vor und nach dem Durchgange durch den Meridian äussern, und daher das mittlere Resultat beinahe ganz frei von diesem Fehler sein.

2) Man muss in beiden Lagen des Instruments beobachten, und überhaupt alle die Vorschriften befolgen, welche wir erläutert haben, als wir von der Messung der Zenithdistanzen sprachen (§ 80—84, S. 194—205).

3) Vor und nach, oder auch in der Mitte der Beobachtungen, muss man genau den Stand des Barometers, sowie den Stand des inneren und äusseren Thermometers ablesen.

4) Um den Einfluss der constanten Fehler des Instruments zu vermindern, muss man nördliche und südliche Sterne, die nahezu gleich weit vom Zenithe abliegen, beobachten. Aus den nördlichen Sternen erhalten wir: $\varphi = \delta - \zeta$ in der oberen, oder $\varphi = 180° - \delta - \zeta$ in der unteren Culmination, aus den südlichen Sternen aber $\varphi = \delta + \zeta$; folglich bringt ein Fehler in der Zenithdistanz in diesen beiden Fällen entgegengesetzten Einfluss auf φ hervor, so dass also das Mittel aus diesen Bestimmungen immer näher an der Wahrheit liegen wird.

Wenn man viele Beobachtungsreihen anzustellen wünscht, so muss man, wo die Einrichtung des Instruments es gestattet, nach Beendigung einer jeden vollständigen Beobachtungsreihe

entsprechender Sterne den Ort des Zeniths auf dem Instrumente verändern. Wünscht man 6 Beobachtungsreihen anzustellen, so muss man ihn von 15 zu 15° ändern; stellt man aber nur drei Reihen von Beobachtungen an, so ändert man ihn von 30 zu 30° u. s. w.

5) Man muss keine Sterne beobachten, deren Meridian-Zenithdistanz sehr klein ist, weil sonst die Fehler des Instruments (der Collimationsfehler der Gesichtslinie, die Neigung der verticalen Umdrehungsachse u. s. w.), zu grossen Einfluss auf die Genauigkeit der Zenithdistanz haben.

Ebenso ist es nicht gut, Sterne, deren Meridianhöhe sehr klein ist, zu beobachten, weil in der Nähe des Horizonts die Sterne undeutlich erscheinen und man auch ihre Strahlenbrechung nicht genau bestimmen kann. In der Regel darf man hierzu keine Sterne wählen, deren Zenithdistanz kleiner als 10° oder grösser als 75° ist.

6) Zu allen diesen Berechnungen reichen fünfstellige Logarithmen vollkommen aus; in vielen Fällen genügen sogar vierstellige.

7) Wenn die Gradtheilung auf dem beweglichen Limbus, wie es bei dem Verticalkreise von Repsold der Fall ist, von der linken zur rechten Seite, auf dem oberen Theile des Kreises fortgezählt wird, so muss man x oder die Reduction auf den Meridian, wenn der Verticalkreis nach rechts (bei nördlicher Polhöhe nach Westen) umgelegt ist, zur Ablesung zulegen; hingegen muss man x von der Ablesung abziehen, wenn der Kreis nach links (Osten) umgelegt ist, und in beiden Fällen erhält man alsdann die Ablesung, die der Meridian-Zenithdistanz entspricht. Sollte man indessen versäumt haben, die Lage des Verticalkreises zu bemerken, so ist es leicht, sie nachher zu bestimmen, denn zieht man diejenigen Reductionen auf den Meridian, welche hätten zugelegt werden sollen, von den Ablesungen des Nonius oder Mikroskops ab, so wird man anstatt eine Uebereinstimmung unter den auf den Meridian reducirten Noniusablesungen zu er-

zielen, ein bedeutendes Auseinandergehen finden, welches mit der Entfernung vom Meridiane sich immer vergrössert; es wird daher allemal leicht sein, das richtige Zeichen der jedesmaligen Reduction zu bestimmen.

1. Beispiel. Im Jahre 1836 am 30. September wurden zu Novotscherkask am Verticalkreise die Zenithdistanzen des Sterns α Aquilae gemessen; das bei der Beobachtung gebrauchte Chronometer war um $15^h\ 13^m\ 46^s,9$ Chronometerzeit, um $0^h\ 33^m\ 0^s,72$ zu spät gegen mittlere Zeit in Novotscherkask, und die Voreilung des Chronometers gegen mittlere Zeit betrug in einem mittleren Tage $3^s,84$. Die genäherte nördliche Breite des Beobachtungsorts war $= 47°\ 24'$; seine genäherte Länge $= 1^h\ 46^m\ 58^s$ östlich von Berlin; die scheinbare AR von α Aquilae war am 30. September 1836 $= 19^h\ 42^m\ 48^s,72$, seine Abweichung $\delta = +\ 8°\ 26'\ 34'',0$.

Wir wollen zuerst die Culminationszeit des Sterns genau nach Chronometerzeit berechnen. Aus dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1836 findet man, dass die Sternzeit im mittleren Berliner Mittage $= 12^h\ 36^m\ 53^s,99$ war; im Laufe von $1^h\ 46^m\ 58^s$ eilt die Sternzeit gegen mittlere Zeit um $17^s,59$ vor; da nun die Länge von Novotscherkask östlich ist, so wird der Mittag daselbst früher als in Berlin stattfinden, und folglich die Sternzeit im mittleren Mittage zu Novotscherkask $= 12^h\ 36^m\ 36^s,40$ sein. Aber die Sternzeit der Culmination von α Aquilae $= AR\ \alpha$ Aquilae war $= 19^h\,42^m\,48^s,72$; folglich wird die mittlere Zeit seiner Culmination in Novotscherkask $= 19^h\ 42^m\ 48^s,72 - 12^h\ 36^m\ 36^s,40 - (0^h\ 1^m\ 9^s,80$, oder die Voreilung der Sternzeit für das Sternzeitintervall $7^h\ 6^m\ 12^s,32)$ sein, daher die mittlere Zeit seiner Culmination $= 7^h\ 5^m\ 2^s,52$. Als das Chronometer $15^h\ 13^m\ 46^s,9$ zeigte, war die mittlere Zeit $= 15^h\ 46^m\ 47^s,62$, und in jeder Stunde mittlerer Zeit eilte es um $0^s,16$ vor, folglich war die Culminationszeit des Sterns nach dem Chronometer $= 6^h\ 32^m\ 0^s,41$ und ausserdem jede Chronometerstunde $=$ (1 Stunde $+\ 9^s,70$) Sternzeit.

Jetzt folgen die Beobachtungen selbst, wobei der Kürze wegen unter der Kreisablesung immer das Mittel aus den Ablesungen an den Vernieren verstanden wird. *K R* und *K L* bezeichnen die Lagen des Verticalkreises, als er nach rechts und links umgelegt war.

Ein Theil des Niveaus am Verticalkreise = 2″,40 in Bogen.

Verticalkreis	Chronometerzeit	Kreisablesung	Niveauablesung + Thle.	Niveauablesung − Thle.	Secunden der verbesserten Ablesung	Zeitraum zwischen der Culminationszeit und der Zeit der Beobachtung; in Chronometerzeit	Zeitraum zwischen der Culminationszeit und der Zeit der Beobachtung; in Sternzeit, oder Stundenwinkel
	h m s	° ′ ″			″	m s	m s
im Osten	6 23 58,0	239 34 53,9	12,0	14,8	50,5	− 8 2,4	− 8 3,7
oder *K. L.*	6 28 52,0	239 36 55,7	11,0	16,0	49,7	− 3 8,4	− 3 8,9
im Westen	6 37 34,0	317 31 51,8	13,8	13,3	52,4	+ 5 33,6	+ 5 34,3
oder *K. R.*	6 42 45,0	317 34 53,7	16,0	11,0	59,7	+ 10 44,6	+ 10 46,3

Die Höhe des Barometers bei der Mitte der Beobachtungen war = 30,15 englische Zoll, das innere Thermometer = + 12°,0 Réaumur; das äussere Thermometer = + 7°,5 Réaumur.

Durch die Beobachtung eines terrestrischen Gegenstandes wurde der Ort des Zeniths auf dem Kreise = 278° 34′,0 gefunden, und folglich die scheinbare genäherte Zenithdistanz in der ersten Beobachtung = 38° 59′,1; in der zweiten = 38° 57′,0; in der dritten = 38° 57′,9 und in der vierten = 39° 1′,9. Diese Zenithdistanzen sind so wenig unter sich verschieden, dass man die Strahlenbrechung für das Mittel aus ihnen z' = 38° 59′ berechnen kann; demzufolge findet man bei der erwähnten Beschaffenheit der Atmosphäre aus den Besselschen Tafeln*), dass die Strahlenbrechung = 47″,4 war.

---

*) C. F. W. Peters, Astronomische Tafeln und Formeln.

Das genäherte		Beispiel für den Stundenwinkel
$\varphi = 47° 24',0$		$= 0^h 8^m 3^s,7$
$\delta = + 8 26,6$	$\log \frac{2}{\sin 1''} = . 5,61546$	$\log \sin^2 \frac{1}{2} t = . . . 6,49038$
$z = 38° 57',4$		$\log const. = . . . 5,64275$
die Logarithmi-	$\log \cos \varphi = . . 9,83048$	$\log$ (genähertes x) $= . 2,13313$
sche Differenz	$\log \cos \delta = . . 9,99527$	$x = 2',2$; *Correction* $= - 18$
für 1′ bei $\log \sin z$	$comp. \log \sin z = 0,20154$	Der genaue $\log x = . 2,13295$
$= 0,00016$	Summe $= 5,64275$	$x = 2' 15'',8$

Auf eine ähnliche Art wird man die Reductionen auf den Meridian für die zweite, dritte und vierte Beobachtung = 0′ 20″,7, 1′ 4″,9 und 4′ 2″,3 finden; verbindet man diese mit ihren zugehörigen Zeichen, mit den Ablesungen am Verticalkreise, so erhalten wir folgende für Niveau verbesserte und auf den Meridian reducirte Kreisablesungen:

bei *K. L.*	bei *K. R.*	Hieraus folgt das Mittel
239° 37′ 6″,3	317° 30′ 47″,5	*K. R.* = 317° 30′ 52″,5
10 ,4	57 ,5	*K. L.* = 239 37 8 ,3

Doppelte scheinbare Zenithdistanz =	77° 53′ 44″,2
Scheinbare Meridian-Zenithdistanz =	38 56 52 ,1
Strahlenbrechung =	+ 47 ,4
Wahres z =	38° 57′ 39″,5
Declination δ =	+ 8 26 34 ,0
Die gesuchte Breite des Orts φ =	47° 24′ 13″,5

Wollten wir nicht jede Beobachtung besonders berechnen, sondern wünschten sogleich die scheinbare Meridian-Zenithdistanz abzuleiten, wie sie aus dem Mittel aller Beobachtungen folgt, so kann man den Ort des Zeniths = 278° 34′ 0″ setzen, und erhält alsdann mit Hülfe der mehrmals erwähnten Tafeln:

$$\frac{\text{Summe der gemessenen Zenithdistanzen}}{\text{dividirt durch die Zahl der Beobachtung}} = \frac{\Sigma(z')}{N} = 38° 58' 48'',00$$

$$\log p = 0,02729; \; .\;.\;.\;. \; \frac{-p}{N} \Sigma \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin 1''} = - \; 1\; 56,05$$

$$+ \frac{p^2 \cot g\, z}{N} \Sigma \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} t}{\sin 1''} = + \; 0 \; 0,06$$

Scheinbare Meridian-Zenithdistanz = 38° 56′ 52″,01 wie vorher.

2. Beispiel. Am 25. August 1842 wurden auf der academischen Sternwarte zu St. Petersburg gegen Mittag die Zenithdistanzen des oberen und unteren Sonnenrandes mit einem kleinen Universalinstrumente gemessen; die Beobachtungen wurden mit einer Uhr von Lepaute angestellt, welche im wahren St. Petersburger Mittage am 25. August $0^h\,1^m\,4^s,8$ zeigte; 1^h wahre Sonnenzeit $= 1^h$ Lepaute $- 0^s,41$. Ein Theil des Niveaus am Verticalkreise $= 7'',1$.

Verticalkreis	Beobachteter Rand der Sonne	Uhrzeit	Kreisablesung	Niveauablesung − Theile	Niveauablesung + Theile	Secunden der Ablesung für Niveau corrigirt
		h m s	° ′ ″			
im Westen	Oberrand	23 48 37	311 8 39,0	4,7	2,7	31″,9
	Unterrand	23 54 40	310 39 26,0	4,7	2,7	18 ,9
im Osten	Unterrand	0 7 31	49 19 52,0	4,2	2,6	46 ,3
	Oberrand	0 13 28	48 50 27,0	3,0	4,0	30 ,6

Die Barometerhöhe $=$ 341,2 Pariser Linien; inneres Thermometer $= + 18°,7$ Réaumur; äusseres Thermometer $= + 19°,0$ Réaumur.

Die genäherte nördliche Breite des Beobachtungsorts $= 59°\,56',5$; die östliche Länge von Greenwich $= 2^h\,1^m\,15^s$. Aus dem Nautical Almanac für 1842 findet man, dass für $2^h\,1^m\,15^s$ vor dem wahren Greenwicher Mittage, oder für den wahren St. Petersburger Mittag am 25. August die nördliche Declination des Sonnencentrums $= 10°\,51'\,58'',6$; die Horizontal-Parallaxe der Sonne $= 8'',5$; $log\,(-\mu) = 3,3950$, der Halbmesser der Sonne $= 15'\,51'',2$ und daher:

$$\varphi = 50°\,56',5 \qquad log\,\frac{cos\,\varphi\,cos\,\delta}{sin\,z} = 9,8136$$
$$\delta = +10\;\,52,0$$
$$z = 49°\;\,4',5 \qquad comp.\;.\;.\; = 0,1864$$

Die logarithmische Differenz für $log\ sin\ z$ für $1' = 0{,}0001$

Strahlenbrechung	. . . . =	$63'',7$
Sonnen-Parallaxe	. . . . =	$6\ ,4$
Strahlenbrechung — Parallaxe	. . =	$57'',3.$

μ ist hier negativ; wir berechnen daher die Mittagsverbesserung folgendermassen, $log\ A$ aus § 101, S. 62 entnehmend:

$$log\ A = 7{,}7247$$
$$log\ \mu = 3{,}3950_n$$
$$log\ \frac{sin\ z}{cos\ \varphi\ cos\ \delta} = 0{,}1864$$

Verbesserung . . = — $20^s,2$. $1{,}3061_n$
Wahrer Mittag . = $0^h\ 1^m\ 4^s,8$ nach Lepaute
Verbesserter Mittag = $0^h\ 0^m\ 44^s,6$ nach Lepaute oder $24^h\ 0^m\ 44^s,6$.

Folglich sind die Unterschiede zwischen den Beobachtungszeiten und dem verbesserten Mittage:

	$12^m\ 7^s,6$	$6^m\ 4^s,6$	$6^m\ 46^s,4$	$12^m\ 43^s,4$
Reduction auf wahre Zeit	— 0 ,1	— 0 ,0	— 0 ,0	— 0 ,1
Verbesserter Stundenwinkel in Zeit	12 7 ,5	6 4 ,6	6 46 ,4	12 43 ,3.

Hieraus folgen die entsprechenden Reductionen auf den Meridian:

	Kreis im Westen oder *K R.*		Kreis im Osten oder *K.L.*	
x . . . . =	0° 3′ 7″,8	0° 0′ 47″,2	0° 0′ 58″,6	0° 3′ 26″,8
Kreisablesung . . . =	311 8 31 ,9	310 39 18 ,9	49 19 46 ,3	48 50 30 ,6
Im Meridian. . . . =	311° 11′ 39″.7	310° 40′ 6″,1	49° 18′ 47″,7	48° 47′ 3″,8
Sonnenhalbmesser .	— 15 51 ,2	+ 15 51 ,2	— 15 51 ,2	+ 15 51 ,2
Für das Sonnencentrum	310° 55′ 48″,5	310° 55′ 57″,3	49° 2′ 56″,5	49° 2′ 55″,0

Bei dem angewandten Instrumente wurde die Gradtheilung von rechts aus nach dem oberen Theile des beweglichen Limbus gezählt, und die Kreisverniere waren fest, folglich ist $z = \frac{KL - K.R}{2}$ und man findet für die Kreisablesungen im Meridiane folgende Mittelzahlen:

K. L. (*oder Kreis im Osten*) . . .	=	360° +	49° 2′ 55″,7
K. R. (*oder Kreis im Westen*) . .	=		310 55 52 ,9
Doppelte scheinbare Meridian-Zenithdistanz	=		98° 7′ 2″,8
Scheinbare Meridian-Zenithdistanz.	=		49 3 31 ,4
Strahlenbrechung minus Parallaxe . . .	=		+ 57 ,3
Wahre Z. D. des ⊙ Centrums im Meridian	=		49° 4′ 28″,7
Declination δ . . .	=	+	10 51 58 ,6
Die gesuchte Breite φ	=		59° 56′ 27″,3

Diese Bestimmung ist wenig von der wahren Breite der academischen Sternwarte zu St. Petersburg verschieden, denn zufolge einer sehr genauen Untersuchung des Academiker Wisniewsky ist sie = 59° 56′ 31″,0.

Bestimmung der Breite des Orts aus Beobachtungen des Polarsterns.

103. Der Polarstern (*α Ursae minoris*) bewegt sich immer so langsam, dass man durch die gemessene Höhe oder Zenithdistanz dieses Sterns die Breite eines Orts bis auf 1″ in Bogen genau bestimmen kann, selbst wenn man die Beobachtungen ausserhalb des Meridians anstellt und die Zeitbestimmung bis auf 1 oder 2 Secunden fehlerhaft ist.

Die Berechnungen werden bequem und vollkommen strenge nach den Formeln (1) oder (2) § 99, S. 256 und 257 geführt; die erstere Formel wendet man bei der oberen, die letztere bei der unteren Culmination an.

Mit dem in Zeit ausgedrückten Stundenwinkel t als Argument kann man den $\log \sin^2 \frac{1}{2} t$ bequem aus den Tafeln des Barons von Wrangel bestimmen, welche von dem Hydrographi-

schen Depot des kaiserlichen Marinestabes zu St. Petersburg im Jahre 1835 herausgegeben wurden. Wenn die Stundenwinkel, auf die obere Culmination bezogen, mehr als 6 Stunden betragen, so muss man sie von der unteren Culmination abzählen und alles auf die untere Culmination beziehen. Hat man diese Tafeln aber nicht, so kann man $log\, sin^2 \frac{1}{2} t$ von $0^h\, 0^m$ bis $0^h\, 42^m$ aus C. F. W. Peters' Hülfstafeln entnehmen, für die übrigen Stundenwinkel dagegen selbst berechnen.

Vier Beobachtungen, von denen zwei in einer Lage des Instruments, und zwei in der entgegengesetzten Lage angestellt werden, bilden eine vollständige Beobachtungsreihe, und da nun vier solche beobachtete Zenithdistanzen wenig von einander verschieden sein werden, so kann man die Strahlenbrechung für das Mittel aus ihnen berechnen, und diese Strahlenbrechung für die ganze Reihe als beständig ansehen.

Beispiel. Am 1. October 1836 wurden zu Novotscherkask an einem Verticalkreise Zenithdistanzen des Polarsterns gemessen. Die obere Culmination des Polarsterns fand nach Chronometerzeit um $11^h\, 46^m\, 12^s,7$ statt.

1 Stunde des Chronometers = 1 Stunde Sternzeit + $9^s,70$.

1 Theil des Niveaus = 2",40 in Bogen.

Die genaue nördliche Declination des Polarsterns = 88° 26′ 14",9; seine *AR* = $1^h\, 1^m\, 42^s,3$; die genäherte nördliche Breite des Orts = 47° 24′.

Vertical-kreis	Chrono-meterzeit	Kreisablesung	Niveauablesung + Theile	Niveauablesung − Theile	Secunden der verb. Ablesung	Stundenwinkel in Sternzeit.
K. L.	$7^h\, 44^m\, 14^s,0$	207° 57′ 13",6	13,5	14,0	13",1	$4^h\; 2^m\, 37^s,4$
	7 50 7 ,0	207 59 16 ,5	12,8	14,2	15 ,0	3 56 43 ,5
K. R.	$7^h\, 59^m\, 57^s,5$	291° 31′ 44",2	13,5	14,0	43",7	$3^h\, 46^m\, 41^s,2$
	8 6 26 ,0	291 29 31 ,5	14,3	13,0	32 ,9	3 40 21 ,9
	8 13 25 ,0	291 27 9 ,3	14,3	13,0	10 ,7	3 33 20 ,8
	8 18 32 ,0	291 25 24 ,8	14,6	13,0	26 ,6	3 28 14 ,0
K. L.	$8^h\, 25^m\, 54^s,5$	208° 11′ 32",5	13,5	14,3	30",4	$3^h\, 20^m\, 50^s,4$
	8 32 48 ,5	208 13 48 ,2	12,3	14,4	44 ,7	3 13 55 ,2

Um die Zeit der Mitte der Beobachtungen war der Barometerstand = 30,19 englische Zoll; inneres Thermometer = + 13°,0 Réaumur; äusseres Thermometer = + 5°,8 Réaumur.

Mit dem genäherten Orte des Zeniths = 249° 7',5 findet man, dass die scheinbare Zenithdistanz für das Mittel der ersten vier Beobachtungen = 41° 46',2 war, für die letzten vier Beobachtungen findet man dagegen = 41° 36',9; folglich werden die den Mitteln dieser Zenithdistanzen entsprechenden Strahlenbrechungen, mit Rücksicht auf Barometer- und Thermometerstand = 51",5 für die erste Reihe, und = 51",4 für die zweite Reihe sein.

Um ein Rechnungsbeispiel zu geben, wollen wir $z-\zeta$ für die erste Beobachtung oder für den Stundenwinkel $4^h\,2^m\,37^s,4$ bestimmen. Näherungsweise ist:

$\varphi = 47°\ 24',0$
$\delta = 88\ \ 26\ ,2$
$\zeta = 41°\ \ 2',2$
$z = 41\ \ 51\ ,2$
$\frac{z+\zeta}{2} = 41°\,26',7$

Beobachtete scheinbare Zenithdistanz = 41° 50',3
Strahlenbrechung . . = 0,9
wahres z = 41° 51',2

$log\ sin^2 \tfrac{1}{2} t = 9,40650$
$log\ cos\varphi\ cos\delta = 8,26638$
$comp.\ log\ sin\left(\frac{z+\zeta}{2}\right) = 0,17919$

$log\ sin\left(\frac{z-\zeta}{2}\right) = 7,85207$
$\frac{z-\zeta}{2} = 0°\,24'\,27'',0$

Wir haben die Ablesung am Verticalkreise für Niveau corrigirt gefunden . = 207° 57' 13",1
$z-\zeta$ = 0 48 54 ,0

Summe = 208° 46' 7",1, welches die auf den Meridian reducirte Kreisablesung ist.

Auf ähnliche Weise kann man nun die Reductionen der anderen Beobachtungen berechnen, und findet sodann die folgenden auf den Meridian reducirten Kreisablesungen:

1. Reihe		2. Reihe	
K. L.	*K. R.*	*K. R.*	*K. L.*
208° 46′ 7″,1	290° 48′ 28″,5	290° 48′ 28″,3	208° 46′ 7″,2
2 ,2	28 ,1	26 ,0	9 ,7

Nimmt man das arithmetische Mittel, so folgt:

für die 1. Reihe		für die 2. Reihe	
K. R. . . .	= 290° 48′ 28″,3	*K. R.* . . .	= 290° 48′ 27″,2
K. L. . . .	= 208 46 4 ,6	*K. L.* . . .	= 208 46 8 ,5
Differenz . .	= 82° 2′ 23″,7	Differenz . .	= 82° 2′ 18″,7
halbe Differenz	= 41 1 11 ,8	halbe Differenz	= 41 1 9 ,4
Strahlenbrech.	= + 51 ,5	Strahlenbrech.	= + 51 ,4
Wahres ζ .	= 41° 2′ 3″,3	Wahres ζ .	= 41° 2′ 0″,8
		Das Mittel aus beiden ζ . .	= 41° 2′ 2″,1
		Wahre Declination δ . . .	= +88 26 14 ,9
		Die gesuchte Breite φ . .	= 47 24 12 ,8

Anmerkung. Wenn man keine grosse Genauigkeit verlangt, so kann man die Breite eines Orts sehr leicht aus Polarstern-Beobachtungen mit Hülfe der Tafeln berechnen, welche jedes Jahr in dem „Nautical Almanac“ erscheinen; die Form dieser Tafeln rührt von Littrow her. Da der Polarstern sehr nahe am Pole selbst ist, so wird seine wahre Höhe $= h$ nur immer wenig von der Polhöhe oder der Breite des Orts $= \varphi$ verschieden sein; es sei daher $h = \varphi - y$ und $d = 90° - \delta$, wo δ die Declination des Polarsterns ist; so wird y niemals grösser als d oder die Polardistanz des Sterns werden können, welche nahe $= 1° 32'$ ist; wenn nun t der Stundenwinkel des Sterns ist, so hat man:

$$\sin h = \sin(\varphi - y) = \sin\varphi \cos y - \cos\varphi \sin y$$
$$= \cos\varphi \sin d \cos t + \sin\varphi \cos d$$

folglich:
$$-\sin y = \sin d \cos t + tg\,\varphi (\cos d - \cos y)$$

Wegen der Kleinheit von y und d kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass: $\sin y = y \sin 1''$, $\sin d$

$= d \sin 1''$; $\cos y = 1 - \frac{1}{2} y^2 \sin^2 1''$, $\cos d = 1 - \frac{1}{2} d^2 \sin^2 1''$, folglich:

$$-y = d \cos t + tg\, \varphi\, (y^2 - d^2) \frac{\sin 1''}{2}$$

Vernachlässigt man einstweilen im zweiten Theile der Gleichung das letzte Glied, welches immer sehr klein ist, in Vergleich mit dem ersten, so folgt $y = -d \cos t$, und daher $y^2 - d^2 = -d^2 \sin^2 t$; alsdann hat man bis zu Gliedern der zweiten Ordnung inclusive:

$$y = -d \cos t + \frac{d^2 \sin 1''}{2} tg\, \varphi \sin^2 t \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Der Fehler dieser Bestimmung entspricht nahezu dem Ausdruck: $+ \frac{1}{6} \sin^2 1'' d^3 \cos t \sin^2 t (1 + 3 tg^2 \varphi)$, welcher nur in sehr hohen Breiten merklich wird.

Da der Werth von d sich beständig ändert, so kann man den Werth von d zu einer gewissen Epoche $= \Delta$ setzen; zu einer anderen Epoche wird alsdann $d = \Delta - (\Delta - d)$ werden, wo $\Delta - d$ eine sehr kleine Grösse ist; da ferner φ immer nahe $= h$, so kann man im zweiten Gliede der obigen Gleichung (a), Δ anstatt d und h anstatt φ setzen, und erhält alsdann:

$$\varphi = h - \Delta \cos t + \frac{\Delta^2 \sin 1''}{2} tg\, h \sin^2 t + (\Delta - d) \cos t$$

Das Glied $-\Delta \cos t$ ist immer positiv zwischen den Grenzen $t = 6^h\, 0^m$ oder 90°, und $t = 18^h\, 0^m$ oder 270°; dagegen negativ von $t = 0^h\, 0^m$ oder 0° bis $t = 6^h\, 0^m$ oder 90°, und von $t = 18^h\, 0^m$ oder 270° bis $t = 24^h\, 0^m$ oder 360°. Das darauf folgende Glied ist stets positiv, und das letzte zuweilen positiv, zuweilen negativ; um die Summe dieses Gliedes und des von der Veränderlichkeit von α abhängenden Gliedes, von welchem gleich die Rede sein wird, immer positiv zu machen, kann man $+1'$ oder $+2'$ dazulegen, muss aber dann vom ersten Theile der obigen Gleichung (a), d. h. von h ebensoviel abziehen.

Es sei s die Sternzeit der Beobachtung; α die gerade Aufsteigung des Polarsterns zu dieser Zeit; drückt man alsdann s und α in Graden aus, so wird $t = s - \alpha$, und:

$$\varphi = h - n - \Delta \cos(s - \alpha) + \Delta^2 \frac{\sin 1''}{2} tg\, h \sin^2(s - \alpha)$$
$$+ [n + (\Delta - d) \cos(s - \alpha)],$$

wo n gleich $1'$ oder $2'$ ist, welches man jedes Mal in den Tafeln angegeben findet. Nun ist auch α veränderlich; es sei α° der mittlere Werth von α im laufenden Jahre; da $t = s - \alpha^\circ - (\alpha - \alpha^\circ)$ ist, und man wegen der geringen Grösse von $\alpha - \alpha^\circ$ setzen kann: $\cos(s - \alpha) = \cos(s - \alpha^\circ) + \sin(s - \alpha^\circ) \sin(\alpha - \alpha^\circ)$, so erhalten wir:

$$\varphi = h - n - \Delta \cos(s - \alpha^\circ) + \tfrac{1}{2} \Delta^2 \sin 1'' \, tg\, h \sin^2(s - \alpha^\circ)$$
$$+ [n + (\Delta - d) \cos(s - \alpha^\circ) + \Delta . \sin(s - \alpha^\circ) \sin(\alpha - \alpha^\circ)].$$

Die erste Tafel giebt alsdann $- \Delta \cos(s - \alpha)$ mit der Sternzeit als Argument; die zweite Tafel enthält das folgende Glied mit zwei Argumenten: nämlich der Höhe des Sterns und der Sternzeit; die dritte Tafel enthält endlich die Summe der letzten Glieder ebenfalls mit zwei Argumenten: der Sternzeit und dem Datum oder dem Tag der Beobachtung; die letzten beiden Correctionen sind stets positiv. Bis zum Jahre 1845 wurde im Nautical-Almanac in der zweiten Tafel, für das eine Argument, statt der Höhe des Polarsterns die genäherte Breite des Beobachtungsorts gebraucht, welches übrigens in der Rechnung keinen merklichen Unterschied hervorbringt.

———

Elimination der Fehler des Instruments aus einem vollständigen System von Beobachtungen.

104. Wir haben schon früher § 83, S. 202 erwähnt, dass man bei der Messung von Zenithdistanzen durch einen Verticalkreis den Einfluss des Theilungsfehlers des Kreises dadurch sehr verringern kann, dass man nach jeder Beobachtungsreihe den Ort des Zeniths regelmässig verändert. Es bleiben aber noch Fehler übrig, welche von der Wirkung der Schwerkraft auf verschiedene Theile des Instruments und von anderen Ursachen herrühren. Um bei der Messung der Höhen oder Zenithdistanzen den Einfluss dieser systematischen Fehler zu entdecken, beobachtet man in der Nähe des Meridians die Höhen oder die Zenithdistanzen solcher Sterne, deren Positionen am Himmel (besonders die Declinationen) sicher bestimmt sind und von welchen einige südlich und die andern nördlich vom Zenith in nahezu gleichen Entfernungen von demselben durch den Meridian gehen; dabei muss man noch auf die astronomische Refraction jedesmal Rücksicht nehmen. Aus diesen Beobachtungen werden leicht die Bedingungsgleichungen abgeleitet, welche zur Berechnung der genauen Polhöhe und der Correctionen von beobachteten Zenithdistanzen dienen.

Es sei φ die gesuchte Polhöhe, z die Zenithdistanz und δ die scheinbare Declination des Sterns zur Zeit der Beobachtung in der oberen Culmination; Z und $\delta_{,}$ die Zenithdistanz und die Declination in der unteren Culmination. Wir setzen hier voraus, dass das Instrument gut berichtigt war, und dass z und Z von der Refraction und von sonst bekannten Fehlern befreit sind; alsdann können wir die Correction von z, welche von der Wirkung der Schwerkraft auf das Instrument abhängt, durch die periodische Reihe

$$a \cos z + b \sin z + \ldots .$$

ausdrücken, wo die Coefficienten a, b, ... von z unabhängig sind.

Wenn also bei nördlicher Polhöhe der Stern in der oberen Culmination sich befindet, so wird

$$\varphi = \delta \mp z \mp a \cos z \mp b \sin z \mp \ldots,$$

wo das Zeichen — anzunehmen ist, wenn der Stern nördlich und das Zeichen +, wenn er südlich vom Zenith durch den Meridian geht.

Für die untere Culmination hat man

$$\varphi = 180° - Z - \delta, - a \cos z - b \sin z - \ldots$$

Die Declination muss als positiv betrachtet werden, wenn sie gleichnamig ist mit der Polhöhe, d. h. wenn beide zugleich nördlich, oder beide südlich sind; im entgegengesetzten Fall ist die Declination negativ.

Man erhält auf diese Weise aus correspondirenden Beobachtungen nördlicher und südlicher Sterne die Gleichungen, in welchen die Coefficienten a, b u. s. w. mit verschiedenen Vorzeichen (+ und —) vorkommen; sie lassen sich daher gut bestimmen.

Beispiel. Zur Prüfung des Verticalkreises von Repsold hat H. Smislow in Pulkowa die Zenithdistanzen mehrerer Sterne in der Nähe des Meridians, nördlich und südlich vom Zenith in den Entfernungen von 14° bis 74° beobachtet. Im ganzen sind 16 Reihen von Messungen ausgeführt, acht bei der Zenithstellung des Limbuskreises von nahezu 0° und acht bei der Zenithstellung von nahezu 90°. Da jeder Stern in beiden Lagen des Instruments (Verticalkreis Ost und West) beobachtet und jedesmal an zwei Mikroskopen abgelesen wurde, die 180° von einander abstehen, so lässt sich erwarten, dass die Theilungsfehler am Limbuskreise sich grösstentheils gegenseitig aufgehoben haben. Die astronomischen Refractionen sind genau berechnet, alle Messungen sind auf die Culminationszeit der respectiven Sterne reducirt, und die scheinbaren Positionen dieser Sterne sind aus den besten Sternverzeichnissen abgeleitet. In der folgenden Tabelle bezeichnet O die obere, U die untere Culmination, N,

dass der Stern nördlich und S, dass er südlich vom Zenith durch den Meridian durchgeht; φ' ist der Werth der Polhöhe, welchen man erhält, wenn die Correction der Zenithdistanz, welche von der Wirkung der Schwerkraft auf das Instrument abhängt, vernachlässigt wird.

Sterne	Meridian-Zenithdistanz	φ' 59°46′ +	Sterne	Meridian-Zenithdistanz	φ' 59°46′ +
β Ur. min. O	14° 58′ *N.*	+ 18″,92	*β Ur. min. U*	45° 30′ *N*	+ 21″,71
α Cygni. O	15° 0′ *S.*	21 ,60	*α Tauri O*	43° 33′ *S*	19 ,34
α Aurigae O	13° 55′ *S.*	19 ,85	*α Aurigae U*	74° 23′ *N*	21 ,69
α Ur. min. O	31° 41′ *N.*	19 ,86	*α Persei U*	70° 52′ *N*	22 ,36
α Coronae. O	32° 35′ *S.*	20 ,04	*α Virg. O*	70° 12′ *S*	18 ,35

Im Mittel aus nördlichen und südlichen Sternen wird nahezu $\varphi' = 59°\,46'\,20''$; wenn wir die wahre Polhöhe $\varphi = 59°\,46'\,20'' + x$ setzen und in dem Ausdrucke der gesuchten Correction nur die Glieder: $a \cos z + b \sin z$ in Betracht nehmen, so bilden sich folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x &= -1'',08 - a\cos 14°\,58' - b\sin 14°\,58' \\
x &= +1\;,60 + a\cos 15°\;\;0' + b\sin 15°\;\;0' \\
x &= -0\;,15 + a\cos 13°\,55' + b\sin 13°\,55' \\
x &= -0\;,14 - a\cos 31°\,41' - b\sin 31°\,41' \\
x &= +0\;,04 + a\cos 32°\,35' + b\sin 32°\,35' \\
x &= +1\;,71 - a\cos 45°\,30' - b\sin 45°\,30' \\
x &= -0\;,66 + a\cos 43°\,33' + b\sin 43°\,33' \\
x &= +1\;,69 - a\cos 74°\,23' - b\sin 74°\,23' \\
x &= +2\;,36 - a\cos 70°\,52' - b\sin 70°\,52' \\
x &= -1\;,65 + a\cos 70°\,12' - b\sin 70°\,12'.
\end{aligned}
$$

Daraus erhält man nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$x = +0'',10;\; a = -1'',65;\; b = +2'',63;$$

die wahre Polhöhe wird $\varphi = 59°\,46'\,20'',1$,

und die mit dem untersuchten Instrument gemessene Zenithdistanz z erfordert die Correction

$$= -1'',65 \cos z + 2'',62 \sin z.$$

Setzen wir:

$$A.\sin B = a \text{ und } A\cos B = b,$$

so kommt

$$tg\,B = \frac{a}{b},\ A = \frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\cos B},$$

und

$$a\cos z + b\sin z = A\sin(z+B).$$

In unserm Fall ist also die Correction $= 3'',105 \sin(z - 32° 6')$.

Das reducirte System der Beobachtungen ist nun von der Richtigkeit der angewandten Declinationen abhängig, indem die Fehler, welche von der Einwirkung der Schwerkraft auf das Instrument herrühren, beinahe beseitigt sind. Wir haben übrigens erwähnt (S. 209 ff.) wie man die Einwirkung nach der Methode von Bessel eliminiren kann, ohne die genauen Declinationen zu kennen; die Eliminirung wird für jeden Stern besonders erreicht, wenn die Messung der Zenithdistanzen des Sterns in beiden Lagen des Instruments mit ähnlicher Messung der Zenithdistanzen des reflectirten Bildes des Sterns in einem Quecksilberhorizonte verbunden sind.

105. Bei der Küstenaufnahme in Nordamerika (*U. S. Coast Survey*) wurde zur Polhöhenbestimmung das sogenannte Zenithteleskop angewandt, welches im Jahre 1834 vom Herrn Talcott vorgeschlagen und später verbessert worden ist. Es besteht aus einem Fernrohr, welches mit einem Verticalkreis verbunden und mit einem Filarmikrometer versehen ist; zwei Niveaus dienen zur Berichtigung der verticalen und horizontalen Umdrehungsachse; ein horizontaler Kreis wird zur Einstellung des Fernrohrs im Azimuthe benutzt. Der Zweck des Instruments ist der, nahezu gleiche Zenithdistanzen von Sternen nördlich und südlich vom

Zenith zu beobachten und den Unterschied derselben mit dem Filarmikrometer scharf zu bestimmen; die Declinationen dieser Sterne müssen genau bekannt sein. — Das Fernrohr wird zuerst auf einen, z. B. den nördlichen Stern gerichtet und dann vermittelst der Druckschraube mit dem Verticalkreise fest verbunden; der bewegliche horizontale Faden wird durch das Drehen der Mikrometerschraube auf das Bild des Sterns eingestellt, die Zeit der Beobachtung und die Angaben sowohl auf dem Kopfe der Mikrometerschraube, als auch des Niveaus auf dem Verticalkreise aufgeschrieben; damit ist die Beobachtung des einen Sterns beendigt; auf dieselbe Weise kann man mehrere Beobachtungen machen. Gleich darauf werden das Fernrohr und der Verticalkreis nahezu um 180° im Azimuth um die verticale Umdrehungsachse gedreht und man beobachtet den andern Stern, z. B. den südlichen, ganz ebenso wie der erste beobachtet wurde; dabei behält das Fernrohr dieselbe Lage auf dem Verticalkreise, welche es bei der Beobachtung des ersten Sterns hatte.

Es sei für den südlichen Stern: m die Mikrometerablesung, m_0 die Ablesung an der Mikrometerschraube, wenn der Horizontalfaden im Gesichtsfelde des Fernrohrs durch den Punkt geht, welcher dem wahren Nullpunkt an der Mikrometerschraube entspricht; l die Angabe des Niveaus am Verticalkreise, positiv, wenn das nördliche Ende des Niveaus das höhere ist; z_0 und z die scheinbaren, dem m_0 und m entsprechenden Zenithdistanzen, r die Refraction und ρ die Reduction der Zenithdistanz z auf den Meridian; δ die Declination des südlichen Sterns, positiv, wenn sie gleichnamig mit der geographischen Breite φ des Beobachtungsorts ist. Nehmen wir an, dass die numerischen Mikrometerablesungen zunehmen, wenn die Zenithdistanzen abnehmen, so erhalten wir

$$z = z_0 + m_0 - m + l + r;\ \text{Meridian-Zenithdistanz} = \zeta = z - \rho.$$

Es mögen m', l', r', ρ' und z' ähnliche Bedeutungen in Bezug auf den nördlichen Stern haben, wie m, l, r, ρ und z auf

den südlichen. Da $z_0 + m_0$ eine constante Grösse bedeutet, falls das Fernrohr in Bezug auf das Niveau eine unveränderliche Lage behält, so ist

$$z' = z_0 + m_0 - m' - l' + r'; \text{ Meridian-Zenithdistanz} = \zeta' = z' - \varrho'.$$

Wenn die beiden Sterne in ihren oberen Culminationen beobachtet sind und ζ und ζ' die Meridian-Zenithdistanzen der nördlichen und südlichen Sterne bedeuten, so kommt:

$$\varphi = \delta + \zeta, \quad \varphi = \delta' - \zeta'$$

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta') = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta') + \tfrac{1}{2}(m' - m) + \tfrac{1}{2}(l + l') + \tfrac{1}{2}(r - r') - \tfrac{1}{2}(\varrho - \varrho').$$

Sind δ und δ' gut bekannt und die Mikrometerschraube gehörig untersucht, so wird auch die Polhöhe φ sicher bestimmt.

Zeitbestimmung.

106. Wenn die Breite eines Orts genau bekannt ist, so kann durch Messung der Höhe eines Gestirns die Zeit und folglich auch der Stand des Chronometers bestimmt werden; je schneller sich die beobachtete Höhe ändert, desto genauer wird das erhaltene Resultat sein; wir haben oben gesehen, dass dieses stattfindet, wenn das Gestirn den ersten Vertical oder das Azimuth $\pm 90°$ erreicht, was jedoch nur bei solchen Gestirnen der Fall sein kann, deren Declination δ positiv, d. h. gleichnamig mit der Polhöhe ist und zwischen 0° und der Breite des Orts $= \varphi$ liegt.

Es sei die scheinbare beobachtete Zenithdistanz des Gestirns $= z'$; die entsprechende Strahlenbrechung $= \varrho$, die Höhenparallaxe $= p$; dann wird die wahre Zenithdistanz z

$= z' + \varrho - p$. Wenn man nun die Breite des Orts $= \varphi$ setzt und annimmt, dass zur Zeit der Beobachtung die gerade Aufsteigung des Gestirns $= \alpha$, seine Delination $= \delta$, die Sternzeit $= s$, und der Stundenwinkel $= t$ ist, so erhält man:

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\delta \sin\varphi}{\cos\varphi \cos\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

oder: $$\sin \tfrac{1}{2} t = \pm \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(z+\zeta)\sin\frac{1}{2}(z-\zeta)}{\cos\varphi\cos\delta}} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

wo $\zeta = \varphi - \delta$, und $t = s - \alpha$ in Graden ausgedrückt ist. Hier werden die Stundenwinkel nach der Richtung der täglichen Bewegung, von Süden gegen Westen von 0° bis 360° gezählt; bei der Quadratwurzel nimmt man das Zeichen +, wenn das Gestirn im Westen des Meridians ist, dagegen —, wenn es im Osten ist.

Es ist klar, dass $\zeta = \varphi - \delta =$ der wahren Meridian-Zenithdistanz ist, wenn δ zur Zeit der Meridianpassage denselben Werth, wie zur Zeit der Beobachtung beibehält. Die Formel (b) ist für die logarithmische Berechnung die bequemste; aber wenn man an mehreren auf einanderfolgenden Tagen Beobachtungen mit denselben Sternen anstellt, deren Declinationen sich wenig ändern, so wird es bequemer sein, die Formel (a) zu brauchen, vorzüglich wenn man Tafeln der natürlichen Sinusse und Cosinusse zur Hand hat. Alsdann sucht man sich nämlich die Werthe $\sin\varphi \sin\delta$ und $C.\log \cos\varphi \cos\delta$ für δ und $\delta + 10''$; und kann dann ihre Werthe für jedes andere δ, welches der Zeit der Beobachtung entspricht, leicht durch Interpolation bestimmen. Sollten aber die Beobachtungen nicht zahlreich sein, so wird die zweite Formel (b) zum praktischen Gebrauche bequemer als die erste sein.

In der Nähe des ersten Verticales ändern sich die Höhen der Gestirne beinahe der Zeit proportional*); wenn daher der Zeitraum zwischen den Beobachtungen

*) Nimmt man an, dass, wenn der Stundenwinkel t in $t + \delta t$ über-

nicht gar zu gross ist (z. B. kleiner als eine halbe Stunde), so kann man annehmen, dass das arithmetische Mittel der beobachteten Zeiten dem arithmetischen Mittel der Zenithdistanzen entspricht. Uebrigens ist es sicherer, wenn die Beobachtungen ausserhalb des ersten Verticals angestellt sind, entweder das Mittel der Höhen oder das Mittel der Stundenwinkel zu verbessern, um auf die ungleichförmige Aenderung der Höhe bei gleichen Zeitintervallen Rücksicht zu nehmen.

Bezeichnet man nämlich durch H die aus den Beobachtungen zu bestimmende Höhe, die dem Mittel der beobachteten Zeiten $= \tau_0$ entspricht, durch t den dazu gehörigen Stundenwinkel der Sonne oder des Sterns, und durch H' irgend eine andere Höhe die wirklich zur Zeit τ', welche nahe am τ_0 ist,

---

geht, seine entsprechende Zenithdistanz z sich in $z + \delta z$ verwandelt, so erhält man nach dem Taylorschen Lehrsatze für ein nicht zu grosses Zeitintervall:

$$\delta z = \left(\frac{dz}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\frac{\delta t^2}{2} + \ldots.$$

Differentiirt man die Formel (1) § 6, S. 17 in Beziehung auf z und t, so ist: $\frac{dz}{dt} = \cos\varphi \cos\delta . \frac{\sin t}{\sin z} = \cos\varphi \sin a$; $\frac{d^2 z}{dt^2} = \cos\varphi \cos a \frac{da}{dt}$; wo a das Azimuth ist. Bezeichnet man den parallactischen Winkel durch q, und differentiirt man die Gleichung $\cotg a = \frac{-\cos\varphi \operatorname{tg}\delta + \sin\varphi \cos t}{\sin t}$ in Bezug auf a und t, so wird $\delta a = \frac{\sin a}{\sin t}(\sin\varphi \sin a \sin t + \cos a \cos t)\,\delta t$ oder nach Formel 8, § 6, S. 17: $\frac{da}{dt} = \cos q \cdot \frac{\sin a}{\sin t} = \cos q \cdot \frac{\cos\delta}{\sin z}$: folglich $\frac{d^2 z}{dt^2} = \cos\varphi \cos a \cos q \frac{\cos\delta}{\sin z}$, welcher Ausdruck für $a = 90°$ oder $270°$ in Null übergeht, wenn z nicht $= 0$ ist. Für solche Sterne, die nicht zugleich in den Meridian und in den ersten Vertical eintreten, wird also der Werth $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$ werden, sobald $a = 90°$ oder $270°$ ist, und alsdann werden sich auch ihre Zenithdistanzen in Zeit proportional ändern, weil in diesem Falle $\delta z = \delta t . \cos\varphi$, die Aenderung der Zenithdistanz bis auf Grössen der dritten Ordnung genau ausdrückt.

beobachtet wurde; so wird die gesuchte Höhe H nur wenig von dem Mittel aus den gemessenen Höhen verschieden sein. Kennt man den Gang des Chronometers, so kann man den kleinen Zeitraum $\tau_0 - \tau'$ in Secunden der wahren Zeit ausdrücken, und es sei $\tau_0 - \tau' = \Delta \tau'$. Da die Höhenmessungen selten länger als 20 Zeitminuten dauern werden, so kann man hinreichend genau, in Folge des Taylor'schen Lehrsatzes annehmen, dass:

$$h = h' + \frac{\partial h}{\partial t} \cdot (15 \Delta \tau') + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial^2 t} \cdot \sin 1'' . (15 \Delta \tau')^2.$$

Differentiirt man alsdann die Gleichung:

$$\sin h = \cos \varphi \cos \delta \cos t + \sin \varphi \sin \delta$$

in Bezug auf h und t, so erhält man $\frac{\partial h}{\partial t}$, und differentiirt man $\frac{\partial h}{\partial t}$, so bekommt auch $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$; auf diese Weise wird man leicht finden, dass:

$$H = H' + A . 15 \Delta \tau' + \tfrac{1}{2} B . \sin 1'' . (15 \Delta \tau')^2$$

ist, wo

$$A = - \cos \varphi \cos \delta \sin t . \sec H$$
$$B = A^2 . tg H + A . cotg\, t$$

sind. Es sei das Azimuth $= \alpha$, von Süden nach derselben Richtung wie der Stundenwinkel gezählt, und β der parallactische Winkel; alsdann ist:

$$\sin \alpha = \frac{\sin t . \cos \delta}{\cos H}; \quad \sin \beta = \frac{\sin t . \cos \varphi}{\cos H}$$
$$\cos t = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \sin H.$$

Setzt man nun:

$$\tfrac{1}{2} \sin 1'' . (15 \Delta \tau)^2; \text{ oder nahezu: } \frac{2 \sin^2 \left(\frac{15 \Delta \tau'}{2} \right)}{\sin 1''} = m',$$

so wird, weil $\cos\alpha \cos\beta = A \sin t \,tg H + \cos t$, auch:

$$H = H' + A \,.\, 15 \triangle \tau' + A \cdot \frac{\cos\alpha \cos\beta \, m'}{\sin t}.$$

Wenn man also die zu den Zeiten $\tau', \tau'' \ldots \tau^{(n)}$ gemessenen wahren Sonnen- oder Sternhöhen durch $H', H'' \ldots H^{(n)}$ bezeichnet, und $\tau_0 = \frac{\tau' + \tau'' + \ldots + \tau^{(n)}}{n}$ gesetzt wird, so muss:

$$H = H' + A \,.\, 15 \triangle \tau' + A \cdot \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t} \cdot m'$$

$$H = H'' + A \,.\, 15 \triangle \tau'' + A \cdot \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t} \cdot m''$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$H = H^{(n)} + A \,.\, 15 \triangle \tau^{(n)} + A \cdot \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t} \cdot m''$$

sein, wo $m'', m''' \ldots m^{(n)}$, ähnliche Bedeutungen wie m' haben. Nimmt man nun das arithmetische Mittel dieser Gleichungen, und achtet darauf, dass $\triangle \tau' + \triangle \tau'' + \ldots + \triangle \tau^{(n)} = 0$ ist, so erhält man:

$$H = \frac{H' + H'' + \ldots + H^{(n)}}{n} + \frac{M}{n} \cdot A \cdot \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t},$$

wo n die Anzahl der Beobachtungen ausdrückt, und $M = m' + m'' + \ldots + m^{(n)}$ ist. Alsdann wird man H als die zur Zeit τ_0 wirklich stattfindende Höhe betrachten können.

Man kann auch umgekehrt verfahren; man kann nämlich die Höhe $H_0 = \frac{H' + H'' + \ldots + H^{(n)}}{n}$ setzen, und dann die Zeit bestimmen, zu welcher sie gehört. Es sei $15\,T$ der Stundenwinkel, welcher der Höhe H_0 wirklich entspricht und $15\,T_0$ der Stundenwinkel, welcher im Momente des arithmetischen Mittels der beobachteten Zeiten stattfindet; da $15\,(T - T_0)$ immer eine sehr kleine Grösse ist, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass $T - T_0 = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{(H - H_0)}{15} = \frac{H - H_0}{15\,A}$ ist. Sind also n Höhen

genommen und berechnet man das Mittel H_0 aus denselben, so ist der wahre dazugehörige Stundenwinkel in Zeit:

$$T = T_0 + \frac{M}{n} \cdot \frac{\cos\alpha \cos\beta}{15 \sin 15\, T_0}.$$

107. Um aus Zenithdistanz- oder Höhenmessungen genaue Zeitbestimmungen ableiten zu können, muss man folgende allgemeine Regeln nie aus dem Auge verlieren.

1) Muss man die Beobachtungen symmetrisch und in gleicher Anzahl auf beide Lagen des Instruments vertheilen, indem man auf alles, was in § 80—84, S. 194—205 gesagt wurde, gehörige Rücksicht nimmt.

2) Ist es sehr vortheilhaft, die Beobachtungen auf beide Seiten des ersten Verticals symmetrisch zu vertheilen, also gleich viele Beobachtungen vor und nach dem Durchgange des Gestirns durch den ersten Vertical im Osten, oder im Westen anzustellen. Um diese Beobachtungen vorzubereiten, muss man sich den Stundenwinkel des Gestirns $= t_{,}$, und seine Zenithdistanz $= z_{,}$ für das Azimuth $a = 90°$ oder $270°$ aus den Gleichungen in § 6, S. 17 genähert vorausberechnen. Hierzu hat man:

$$\cos t_{,} = \frac{tg\,\delta}{tg\,\varphi};\ \cos z_{,} = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi};\ \mathfrak{d} z_{,} = \cos\varphi . \mathfrak{d} t_{,}$$

wo $\mathfrak{d} z_{,}$ die Aenderung in $z_{,}$ ist, welche einer Aenderung $\mathfrak{d} t_{,}$ in dem in Graden ausgedrückten Stundenwinkel $t_{,}$ entspricht. Bezeichnet man durch O die Sternzeit des Durchgangs des Gestirns durch den östlichen Theil des ersten Verticals, und durch W die Sternzeit seines Durchgangs durch den westlichen Theil des ersten Verticals, so hat man:

$$O = AR - \tau_{,} \text{ und } W = AR + \tau_{,}$$

wo AR die gerade Aufsteigung des Gestirns in Zeit ausgedrückt ist und $\tau_{,}$ den in Zeit ausgedrückten Stundenwinkel $t_{,}$ bedeutet.

3) Muss man zu Anfang und zu Ende, oder auch in der

Mitte der Beobachtungen den Barometerstand, so wie den Stand des inneren und äusseren Thermometers ablesen.

4) Um den Einfluss der Fehler des Instruments so viel wie möglich zu beseitigen, muss man im östlichen und westlichen Theile des ersten Verticals Sterne beobachten, die beinahe gleiche Höhe haben, wodurch sich nicht bloss die Fehler des Instruments im mittleren Resultate gegenseitig aufheben, sondern sogar eine Ungenauigkeit in der angenommenen Breite des Orts ohne Einfluss ist. Man darf keine Sterne beobachten, deren Höhe im ersten Verticale kleiner als 15° oder grösser als 80° ist.

5) Bevor man zur Berechnung der Beobachtungen übergeht, ist es nöthig die Beobachtungen durchzusehen, um grosse Versehen zu entdecken und zu beseitigen. Die Controlle wird leicht sein, wenn man das Fernrohr jedesmal im Voraus so einstellt, dass die Unterschiede der auf einander folgenden Kreisablesungen immer gleich werden. Man wartet dann jedesmal ab, bis der Stern die entsprechende Höhe erreicht, und schreibt dann die Zeit der Beobachtung, den Stand des Niveaus und die Ablesung an allen Vernieren oder Mikroskopen auf. Da gleiche Höhenunterschiede nahezu gleichen Zeitunterschieden entsprechen müssen, so wird dadurch die Controlle sehr erleichtert.

6) Man führt alle Rechnungen hinlänglich genau mit 6stelligen Logarithmen. In Ermangelung solcher Logarithmentafeln kann man auch 7stellige Logarithmen brauchen, und die siebente Decimale weglassen.

7) Es ist vortheilhaft, wenn auch nur genähert, den Ort des Zeniths auf dem Instrumente, zur bequemen Bestimmung der Zenithdistanzen, zu kennen. Dieses geschieht leicht dadurch, dass man den Ort des Zeniths vermittelst der Beobachtung eines terrestrischen Gegenstandes bestimmt.

Beispiel. Am 14. Juli 1837 wurden zu Alexandria, einem Dorfe am Kaukasus, dessen nördliche Breite = $44° 13' 40''$ und östliche Länge von Greenwich = $2^h 53^m 25^s$ ist, um den Stand eines Chronometers, welches beinahe nach mittlerer Zeit

ging, zu bestimmen, die Zenithdistanzen des Sterns (*α Bootis*) *Arcturus* im Westen, und des Sterns *α Aquilae* im Osten, in der Nähe ihrer Durchgänge durch den ersten Vertical gemessen. Die Beobachtungen wurden an einem Verticalkreise angestellt; jeder Theil des Niveaus, welches sich am Kreise befand, war gleich 2″,40.

Wir lassen jetzt die Beobachtungen des Sterns (*α Bootis*) *Arcturus* folgen:

Verticalkreis	Chronometerzeit	Kreisablesung	Niveaufehler + Theile	Niveaufehler − Theile	Kreisablesung für Niveau verbessert
	$10^h\,31^m\,11^s,5$	38° 35′ 52″,0	14,2	9,2	38° 35′ 58″,7
K. L.	10 37 59 ,5	37 22 45 ,5	13,4	10,2	37 22 49 ,6
K. R.	10 44 21 ,0	154 58 43 ,5	10,0	14,0	154 58 38 ,7
	10 48 47,0	155 46 25 ,0	10,0	14,0	155 46 20 ,0

Bei der Mitte der Beobachtungen war der Barometerstand = 29,11 englische Zoll; inneres Thermometer = + 17°,6 Réaumur; äusseres Thermometer = + 12°,6 Réaumur.

Am 14. Juli 1837 war die nördliche Declination des Arcturus = δ = 20° 2′ 0″,0; seine AR = $14^h\,8^m\,15^s,20$; die Sternzeit im mittleren Mittage zu Alexandria = $7^h\,28^m\,6^s,00$.

Durch die Beobachtung eines terrestrischen Gegenstands wurde der Ort des Zeniths auf dem Instrumente = 95° 36′ 31″,5 gefunden; folglich erhalten wir:

	Scheinbare Zenithdistanzen	Chronometerzeiten	
	57° 0′ 33″,5	$10^h 31^m 11^s,6$	φ = 44° 13′ 40″,0
	58 13 41 ,9	10 37 59 ,5	δ = 20 2 0 ,0
	59 22 7 ,2	10 44 21 ,0	ζ = 24° 11′ 40″,0
	60 9 48 ,5	10 48 47 ,0	$\frac{1}{2} z$ = 29° 21′ 31″,6
Summe =	234° 46′ 11″,1	$162^m 19^s,0$	$\frac{1}{2}\zeta$ = 12 5 50 ,0
¼ Summe =	58° 41′ 32″,8	$10^h 40^m 34^s,75$	$\frac{1}{2}(z+\zeta)$ = 41° 27′ 21″,6
Strahlenbrech. =	1 30 ,4		$\frac{1}{2}(z-\zeta)$ = 17 15 41 ,6
Wahres z =	58° 43′ 3″,2		

$\log \sin \frac{1}{2}(z+\zeta) =$	9,820887
$\log \sin \frac{1}{2}(z-\zeta) =$	9,472367
$comp. \log \cos\varphi \cos\delta =$	0,171842
Summe =	19,465096
Halbe Summe =	9,732548
	$= \log \sin \frac{1}{2} t$
$\frac{1}{2} t = 32° 41' 47'',9$	

$t =$	$4^h 21^m 34^s,38$
$AR =$	11 8 15,22
Sternzeit =	$18^h 29^m 49^s,60$
Sternzeit im mittl. Mittage =	7 28 6,00
Unterschied =	$11^h\ 1^m 43^s,60$
Voreilung der Sternzeit =	1 48,40
Mittlere Zeit =	$10^h 59^m 55^s,20$
Chronometerzeit =	10 40 35,75
Chronometer zu spät um =	$19^m 20^s,45$

Berechnet man jede einzelne Beobachtung für sich, so findet man, dass das Chronometer zu spät war gegen mittlere Zeit um: $19^m 20^s,9$; $19^m 20^s,5$; $19^m 20^s,5$; $19^m 20^s,0$; das Mittel aus diesen Bestimmungen giebt wieder dasselbe wie vorher. Wäre der Ort des Zeniths nicht genau bekannt gewesen, so würden die Bestimmungen aus *K. L.* von denen aus *K. R.*, wenn auch die Berichtigungen genau wären, abweichen; welches aber offenbar keinen Einfluss auf die endliche Zeitbestimmung haben würde.

An eben demselben Tage wurde nun auch der Stern *α Aquilae* im Osten, bei seinem Durchgange durch den ersten Vertical beobachtet. Die Berechnung dieser Beobachtungen, indem man auf den bekannten Gang des Chronometers Rücksicht nahm, ergab, dass um $10^h 40^m,5$ Chronometerzeit das Chronometer gegen mittlere Zeit um $19^m 21^s,0$ zu spät war; folglich war die wahrscheinliche Uhrcorrection, wie sie aus allen angestellten Beobachtungen im Osten und Westen folgt, für diese Zeit = $19^m 20^s,72$.

Zeit- und Breitenbestimmung, welche beide unbekannt sind.

108. Zur Auflösung dieses Problems giebt es verschiedene Methoden, die man in directe und indirecte, d. h. solche, die auf allmählicher Annäherung beruhen, eintheilen kann. Die letzteren, nämlich die indirecten Methoden, sind in der Praxis weit bequemer und ausserdem insofern empfehlenswerther, als man bei ihnen keine Vorbereitungsrechnungen braucht.

Bei dem heutigen Standpunkte der Geographie kann man in den meisten Fällen vermittelst der Land- und Seekarten die Lage eines Orts leicht mit einer Genauigkeit von 15′ in Breite und bis auf 1° in Länge bestimmen; der Fehler wird selten grösser, sondern meistens kleiner sein; wir wollen nun voraussetzen, dass diese genäherten Angaben gegeben sind, und dass der Stand des Chronometers nicht bekannt ist. Man beobachtet alsdann des Nachts die Zenithdistanz des Polarsterns, und liest die entsprechende Angabe am Azimuthalkreise ab; sollten die Umstände es gestatten, so muss man den Polarstern in der Nähe des Meridians beobachten.

Nachdem die Beobachtung des Polarsterns beendigt ist, dreht man den Verticalkreis um 90° im Azimuthe von der vorhin abgelesenen Angabe der Mikroskope ab; wodurch das Instrument sehr nahe im ersten Verticale aufgestellt sein wird, und beobachtet nun Zenithdistanzen irgend eines gut bekannten, hellen Sterns; wir wählen hierzu ausdrücklich einen hellen Stern, weil man das Fernrohr nach dem blossen Augenmasse auf ihn richten kann, ohne erst die Beobachtung durch Rechnungen vorbereiten zu müssen. Sollte ein solcher Stern nicht ganz nahe im ersten Verticale zu finden sein, so kann man den Verticalkreis des Instruments noch um 20° oder selbst etwas mehr vom ersten Verticale abdrehen; jedoch versteht es sich von selbst, dass es um so besser ist, je näher man den Stern am ersten Verticale beobachten kann. Sehr vortheilhaft wird es sein, Beobachtungen

im Osten und Westen des ersten Verticals mit Beobachtungen von Sterneu im Norden und Süden des Meridians zu verbinden. So wie immer, muss man auch bei diesen Messungen den Barometer- und Thermometerstand ablesen.

Den Ort des Zeniths am Verticalkreise kann man vorläufig am Tage aus Beobachtungen eines terrestrischen Gegenstandes bestimmen.

Mit dem so bekannten Orte des Zeniths leitet man die scheinbare Zenithdistanz des in der Nähe des ersten Verticals beobachteten Sterns ab, und indem man dazu die entsprechende Strahlenbrechung addirt, erhält man die wahre Zenithdistanz des Sterns. Mit dieser letzteren berechnet man darauf erstens mit der genäherten Breite $= \varphi'$, und dann mit der Breite $= \varphi' + 10'$ die beiden entsprechenden Stundenwinkel in Zeit. Der Unterschied dieser beiden Stundenwinkel zeigt genau, um wie viel sich der Stand des Chronometers ändern wird, wenn φ' um $10'$ wächst. Ist die Breite des Beobachtungsorts nicht gar zu gross und die Zenithdistanz des Sterns nicht gar zu klein, so wird ein Fehler in der Breite nur einen geringen Einfluss auf die Stundenwinkel haben, die mit Hülfe von Zenithdistanzen in der Nähe des ersten Verticals berechnet werden. Ferner wirkt dieser Fehler auf die Zeitbestimmung aus östlichen und westlichen Sternen geradezu entgegengesetzt, und wird daher im mittleren Resultate aus beiden fast gänzlich verschwinden.

Da man nun den Stand des Chronometers ziemlich genau weiss, so kann man mit Hülfe der Tafeln im Nautical Almanac aus einer oder zwei Beobachtungen des Polarsterns in beiden Lagen des Instruments die sehr genäherte Breite des Orts finden $= \varphi''$. Zu diesem φ'' sucht man alsdann den entsprechenden genaueren Stand des Chronometers durch blosse Interpolation, und nunmehr kann man aus allen beobachteten Zenithdistanzen des Polarsterns die Breite des Orts hinreichend genau finden, für welche man endlich den ganz genauen Stand des Chronometers durch einfache Interpolation bestimmt. Zur Reduction aller

Beobachtungen genügt die einfache Interpolation mit ersten Differenzen.

Beispiel. Zu Alexandria, einem Dorfe am Kaukasus, wurden am 14. Juli 1837 die Sterne α *Ursae minoris* (Polaris) und α *Bootis* (Arcturus) beobachtet. Einen Theil dieser Beobachtungen, sowie den Barometer- und Thermometerstand findet man im vorhergehenden Beispiele § 107, S. 289. Auf der Landkarte findet man die Breite des Orts der Beobachtung $= 44°\,8'$; seine östliche Länge von Greenwich $= 2^h\,53^m,5$. Das Chronometer eilte täglich gegen mittlere Zeit um $6^s,0$ vor.

Chronometerzeit	Sch. Zenithdistanz von α *Ursae minoris*	
$9^h\,54^m\;\;0^s$	$46°\,17'\,52'',3$	K. R.
$9\;\;57\;\;54$	$46\;\;16\;\;20\;\;,6$	K. R.
$10\;\;7\;\;10$	$46\;\;12\;\;40\;\;,7$	K. L.
$10\;\;11\;\;19$	$46\;\;11\;\;\;7\;\;,7$	K. L.

Die Strahlenbrechung für das Mittel der Zenithdistanzen $= 57'',5$.

Aus mehreren gemessenen Zenithdistanzen des Arcturus im Westen, in der Nähe des ersten Verticals wurde gefunden, dass um $10^h\,40^m\,34^s,75$ Chronometerzeit die scheinbare Zenithdistanz des Arcturus $= 58°\,41'\,32'',8$ war

Strahlenbrechung $+\;\;1\;\;30\;\;,4$

Wahres $z = 58°\,43'\;\;3'',2$

Die nördliche Declination des Arcturus war $= 20°\,2'\,0'',0$, seine $AR = 14^h\,8^m\,15^s,2$, die Sternzeit im mittleren Mittage zu Alexandria $= 7^h\,28^m\,6^s,0$; nimmt man darauf die nördliche Breite des Orts

$$\varphi' = 44°\,8' \;\ldots\ldots\; \text{und} \;\ldots\ldots\; \varphi' = 44°\,18'$$

so findet man, dass das Chronometer zu spät gegen mittlere Zeit war:

$$19^m\,21^s,5 \;\ldots\ldots\ldots\; 19^m\,19^s,1.$$

Man sieht also, dass eine Zunahme von $10'$ in der Breite den Stand des Chronometers um $-\;2^s,4$ verändert. Nimmt man nun näherungsweise $\varphi = 44°\;8'$ und den Stand des Chronometers $= 19^m\;21^s,5$ an, so findet man aus der dritten und vierten Beobachtung des Polarsterns, dass die Breite $\varphi' = 44°\,13'\,37''$

wurde. Folglich ist $\varphi'' - \varphi' = +5',6$ und daher der genauere Stand des Chronometers $= +19^m 21^s,5 - 5,6 \times 0^s,24 = 19^m 20^s,2$, welcher nur sehr wenig von dem wahren, früher berechneten $19^m 20^s,45$ § 107, S. 290 verschieden ist. Berechnet man hierauf mit diesem genaueren Stande die Breite des Orts aus allen vier Beobachtungen des Polarsterns, so findet man $\varphi = 44° 13' 39''$; es wäre nunmehr überflüssig die Rechnung noch einmal zu wiederholen.

Wenn man die Breite des Orts überhaupt gar nicht kennt, so kann man anstatt dieser, vorläufig die Höhe des Polarsterns annehmen und damit aus beobachteten Zenithdistanzen eines Sterns im Osten oder Westen den genäherten Stand des Chronometers berechnen, welcher zur Bestimmung einer mehr genäherten Breite aus den Beobachtungen des Polarsterns schon genügen wird; hierauf fährt man mit der Berechnung ganz so fort, wie wir es eben gezeigt haben.

Dieselbe Aufgabe kann man auf ähnliche Weise dadurch lösen, dass man Morgens und Abends, ausserdem aber auch gegen Mittag Höhen oder Zenithdistanzen des oberen und unteren Randes der Sonne misst. Aus den letzteren Beobachtungen erhält man eine genäherte Polhöhe, mit Hülfe deren man sich die Uhrcorrectionen aus den Morgen- und Abendbeobachtungen herleitet.

109. Wenn man in der Nähe des Meridians irgend einen Stern beobachtet, dessen Declination δ bedeutend von der Polhöhe φ abweicht, oder dessen Meridian-Zenithdistanz $\varphi - \delta$ wenigstens nicht kleiner als 20° ist, so kann man aus den Höhenänderungen, wenn auch nur etwas roh, den Stand des Chronometers sogleich bestimmen, wie er zu vorläufigen Berechnungen oft genügt. Behalten wir nämlich die früheren Bezeichnungen bei, und setzen:

$$\tfrac{1}{2}(15)^2 \sin 1'' \cdot \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} = a, \quad \varphi - \delta = \zeta,$$

so finden wir, wenn T und $T_{\prime}$ die Chronometerzeiten sind, die den wahren Zenithdistanzen z und $z_{\prime}$ und den noch unbe-

kannten in Zeitsecunden ausgedrückten Stundenwinkeln τ und $\tau_{,}$ entsprechen, dass:

$$\zeta = z - x,\ x = a \cdot \tau^2;\ \zeta = z_{,} - x_{,},\ x_{,} = a \cdot \tau_{,}^2;$$
$$z_{,} - z = a\,(\tau_{,}^2 - \tau^2) = a\,(\tau_{,} - \tau)\,(\tau_{,} + \tau).$$

Wenn beide Beobachtungen auf derselben Seite des Meridians liegen, so ist $\tau_{,} - \tau = T_{,} - T + \delta\, T_{,}$, wo $\delta\, T$ die Zahl der Zeitsecunden ist, welche man zu $T_{,} - T$ addiren muss, um dieses Intervall in Sternzeit zu verwandeln*); wenn wir daher den Gang des Chronometers kennen, oder doch wenigstens wissen, ob es näher nach Sternzeit oder mittlerer Zeit geht, so wird $\delta\, T$ eine bekannte Grösse sein. Dividirt man nun durch $a(\tau_{,} - \tau)$, so wird $\tau_{,} + \tau = \frac{z_{,} - z}{a\,(\tau_{,} - \tau)}$, wo $z_{,} - z$ in Bogensecunden ausgedrückt ist. Sind die Beobachtungen auf verschiedenen Seiten des Meridians angestellt, so ist $\tau_{,} + \tau = T_{,} - T + \delta\, T$; dann ist $\tau_{,} + \tau$ bekannt, und man erhält $\tau_{,} - \tau = \frac{z_{,} - z}{a\,(\tau_{,} + \tau)}$.

Aus $\tau_{,} - \tau$ und $\tau_{,} + \tau$ kann man leicht $\tau_{,}$ und τ selbst finden, und die Culmination des Sterns findet nach Chronometerzeit um $T \pm (\tau - \delta\,\tau)$ statt; hierbei gilt das Zeichen $+$, wenn τ oder der in Zeit ausgedrückte Stundenwinkel östlich ist, dagegen das Zeichen $-$, wenn er westlich ist; $\delta\,\tau$ ist hierbei die Zahl der Secunden, welche man von dem Sternzeit-Intervall τ abziehen muss, um es in Chronometerzeit zu verwandeln. Ob der Stundenwinkel τ östlich oder westlich ist, wird man leicht aus der Ab- oder Zunahme der Zenithdistanzen sehen können. Zur Bestimmung von $z_{,}$ muss man ungefähr 20 Minuten vor oder nach der Culmination beobachten; um z zu erhalten, muss man dagegen so nahe wie möglich dem Meridiane selbst beobachten.

---

*) Beobachtet man die Sonne statt eines Sterns, und bleibt das Chronometer täglich gegen wahre Sonnenzeit zurück, so wird $\delta\, T$ der Anzahl von Secunden gleich sein, welche man zum Intervall $T_{,} - T$ addiren muss, um es in wahre Sonnenzeit zu verwandeln.

110. Die allergenaueste und einfachste Methode die Zeit durch Zenithdistanzen zu bestimmen, besteht darin, die Zeiten der correspondirenden Höhen zu beobachten, nämlich diejenigen Zeiten, zu welchen derselbe Stern vor und nach seiner Culmination dieselbe Höhe erreicht. Im Laufe einiger Stunden ändert sich die Declination eines Fixsterns so wenig, dass man ohne weiteres annehmen kann, dass zu gleichen Höhen auch gleiche Stundenwinkel gehören. Nimmt man daher an, dass zur Chronometerzeit T und vor der Culmination des Sterns die Höhe desselben $= h$ war, und nach der Culmination zur Chronometerzeit T' die Höhe desselben ebenfalls $= h$, so wird offenbar die Zeit der Culmination nach dem Chronometer $= \frac{1}{2}(T' + T)$ sein; hier muss man nun T' grösser als T nehmen; denn da die Beobachtungen entgegengesetzte Lage in Beziehung auf den Meridian haben, so muss man bedenken, dass der Stundenzeiger des Chronometers sich durch jene Zahl bewegt, nach welcher eine neue Zeitrechnung anfängt, wenn daher der Umfang des Zifferblatts in 24 Stunden eingetheilt ist, so muss man zu T' 24 Stunden zulegen, ist es dagegen in 12 Stunden eingetheilt, so addirt man zu T' 12 Stunden.

Wenn man die Sonne beobachtet, so werden gleichen Stundenwinkeln nicht gleiche Höhen entsprechen, weil die Declination dieses Himmelskörpers sich beständig ändert. Es sei daher des Vormittags die beobachtete Höhe des Sonnencentrums $= h$, der zugehörige Stundenwinkel $= t$ und die Declination $= \delta - x$; des Nachmittags aber bei derselben Höhe $= h$, der Stundenwinkel $= t + y$ und die Declination $= \delta + x$, wo δ die Declination der Sonne im wahren Mittage bedeutet, dann hat man:

$$\sin h = \cos\varphi \cos(\delta - x) \cos t + \sin\varphi \sin(\delta - x)$$
$$= \cos\varphi \cos(\delta + x) \cos(t + y) + \sin\varphi \sin(\delta + x) \quad . \; . \; . \quad (a).$$

Wegen der Kleinheit von x und y kann man annehmen, dass:

$$\begin{aligned} \cos(\delta \pm x) &= \cos\delta \mp x \sin 1''.\sin\delta; \\ \sin(\delta \pm x) &= \sin\delta \pm x \sin 1''.\cos\delta, \text{ und} \\ \cos(t+y) &= \cos t - y \sin 1''.\sin t, \end{aligned}$$

wo x und y in Bogensecunden ausgedrückt sind; vernachlässigt man darauf die Glieder zweiter Ordnung, so wird:

$$\cos(\delta+x)\cos(t+y) = \cos\delta\cos t - x\sin 1''.\sin\delta\cos t \\ - y\sin 1''.\sin t\cos\delta;$$

setzt man diese Werthe in die Gleichung (a) ein, so erhält man:

$$y = 2x\left(\frac{tg\,\varphi}{\sin t} - \frac{tg\,\delta}{tg\,t}\right).$$

Der Werth y ist die Correction des nachmittägigen Stundenwinkels in Bogensecunden ausgedrückt; folglich in Zeitsecunden ausgedrückt $= \frac{y}{15}$. Wenn die Declination der Sonne nach der positiven Seite zunimmt, so wird die Sonne des Nachmittags bei gleichen Stundenwinkeln eine grössere Höhe als des Vormittags haben und in diesem Falle daher die entsprechende Nachmittagshöhe später erreichen. Beobachtet man daher die Sonne in gleicher Höhe des Vormittags zur Chronometerzeit T und des Nachmittags zur Chronometerzeit T', so werden die gleichen Stundenwinkel den Chronometerzeiten T und $T' - \frac{y}{15}$ entsprechen, und folglich der wahre Mittag nach dem Chronometer um die Zeit:

$$\tfrac{1}{2}(T + T' - \tfrac{1}{15}y) = \tfrac{1}{2}(T + T) - \tfrac{1}{30}y$$

stattfinden.

Die kleine Grösse $-\frac{1}{30}y$ wird die Mittagsverbesserung für correspondirende Höhen genannt und ist abhängig von der Breite des Beobachtungsorts $= \varphi$, von der Declination der Sonne im wahren Mittage $= \delta$, von dem Stundenwinkel $= t$ und von $2x$ oder der Aenderung der Declination während des Zeitraums

$T' - T$. Bezeichnet man durch μ die positive Zunahme der Sonnendeclination in Secunden, im Laufe von zwei Tagen, oder auch um wie viel die Sonne sich in 48 Stunden oder 2 Tagen dem sichtbaren Pole des Aequators nähert, wobei angenommen wird, dass der eine Tag vor dem Mittage des Beobachtungsorts anfängt, der andere aber nach diesem Mittage folgt, so haben wir:

$$2x = \frac{\mu}{48} \cdot (T' - T)$$

Es ist aber t sehr nahe $= \frac{15}{2}(T' - T)$, wenn das Chronometer nach mittlerer Zeit geht; wenn es nach Sternzeit geht, so muss man von $\frac{1}{2}(T' - T)$ die Voreilung der Sternzeit während des Intervalls $\frac{1}{2}(T' - T)$ abziehen, um den sehr genäherten Stundenwinkel t zu erhalten. Setzt man nun:

$$\frac{T' - T}{48^h.30} \cdot \frac{1}{\sin 15\left(\frac{T' - T}{2}\right)} = A; \quad \frac{T' - T}{48^h.30} \cdot \frac{1}{tg\, 15\left(\frac{T' - T}{2}\right)} = B;$$

so erhält man alsdann für die Mittagsverbesserung $-\frac{1}{80}y$, den Werth:

$$-\mu A \,.\, tg\, \varphi + \mu B \,.\, tg\, \delta.$$

Den Werth von μ, so wie auch den von δ findet man in den astronomischen Ephemeriden; $\log A$ und B dagegen kann man aus einer Tafel entnehmen, welche nach Argumenten der in mittlerer Sonnenzeit ausgedrückten halben Zeitintervalle fortschreitet*). Ein Fehler von mehreren Minuten in φ und δ bringt keinen merklichen Einfluss auf die Bestimmung der Mittagsverbesserung hervor.

Man kann in ähnlicher Weise den Chronometerfehler gegen die wahre Mitternacht bestimmen. Hierbei beobachtet man

*) Diese Tafel rührt von Gauss her und befindet sich in der Sammlung der C. F. W. Peters'schen Hülfstafeln.

zuerst das Abends und darauf die gleichen correspondirenden Höhen am Vormittage des folgenden Tages. Um die Regel für diese Berechnung aufzustellen, muss man bemerken, dass die Stundenwinkel der Sonne von Mittag zu Mittag von 0^h bis 24^h oder auch von 0° bis 360° fortgezählt werden. Setzt man nun die nachmittägige Sonnenhöhe $= h$, und den dazu gehörigen Stundenwinkel $= t$, so würde, wenn die Sonnendeclination sich nicht änderte, dieses Gestirn am folgenden Morgen dieselbe Höhe h erreichen, wenn der Stundenwinkel der Sonne $= 360° - t$ wäre; wenn aber mit der Zunahme der Zeit die positive Declination wächst, oder die negative abnimmt, so wird die Sonne die Höhe h früher erreichen, als bei dem Stundenwinkel $= 360° - t$; wir wollen daher annehmen, dass diese Höhe von der Sonne erreicht wird bei einem Stundenwinkel $= 360° - t - y$. Es sei die Declination der Sonne bei der nachmittägigen Beobachtung $= \delta - x$; bei der folgenden vormittägigen aber $= \delta + x$, wo x ein positiver Werth ist; bezeichnet man ferner die Polhöhe des Orts durch φ, und die Chronometerzeiten bei der vorhergehenden nachmittägigen und nachfolgenden vormittägigen Beobachtung der gleichen Sonnenhöhen durch T und T', so erhält man ähnlich wie vorhin die Chronometerzeit in der wahren Mitternacht:

$$= \tfrac{1}{2}(T + T') + \mu . A . tg\,\varphi - \mu . B . tg\,\delta,$$

wo δ die Declination der Sonne in der Mitternacht bedeutet, positiv, wenn sie dasselbe Zeichen oder dieselbe Benennung mit der Polhöhe hat; μ die Zunahme der Grösse von δ in 48 Stunden, von der beobachteten vorhergehenden Mitternacht bis zur nachfolgenden; A und B haben ähnliche Bedeutung wie vorhin, d. h. wenn wir durch $T' - T =$ die Zwischenzeit zwischen beiden correspondirenden Beobachtungen in wahrer Sonnenzeit ausdrücken, so dass $\frac{15}{2}(T' - T)$ genähert dem halben Unterschiede der Stundenwinkel in Graden gleich ist, so wird:

$$A = \frac{T'-T}{48^h.30} \cdot \frac{1}{sin\,15\left(\frac{T'-T}{2}\right)}; \quad B = \frac{T'-T}{48^h.30} \cdot \frac{1}{tg\left\{180° - 15\left(\frac{T'-T}{2}\right)\right\}}$$
$$= -\frac{T'-T}{48^h.30} \cdot \frac{1}{tg\,15\left(\frac{T'-T}{2}\right)}.$$

Um diese A und B zu berechnen, kann man die Tafel für die Mittagsverbesserung benutzen. Da nämlich $sin\, t = sin\,(180° - t)$, und $tg\, t = -tg\,(180° - t)$ ist, so kann man:

$$A = \frac{\{12^h - \frac{1}{2}(T'-T)\}.f}{720.\,sin\,15\,\{12^h - \frac{1}{2}(T'-T)\}}$$
$$B = \frac{\{12^h - \frac{1}{2}(T'-T)\}\,f}{720.\,tg\,15\,\{T'-T)\}},$$

setzen, wo $f = \frac{\frac{1}{2}(T'-T)}{12^h - \frac{1}{2}(T'-T)}$ ist; weil nun hier $\frac{1}{2}(T'-T)$ immer grösser als 6 Stunden ist, so wird man immer mit dem Argumente $12^h - \frac{1}{2}(T'-T)$ die $lg\,A$ und $lg\,B$ aus den Tafeln für die Mittagsverbesserung nehmen können; alsdann ist die Mitternachtsverbesserung:

$$f.\mu.A.tg\,\varphi - f.\mu.B.tg\,\delta,$$

wobei das Argument von f die halbe Zwischenzeit $= \frac{1}{2}(T'-T)$, das von A und B aber das Supplement dieser halben Zwischenzeit zu 12 Stunden ist. Die $lg\,f$ sind in der Sammlung der Peters'schen Hülfstafeln, Hamburg 1871, auf den Seiten 92—94 gegeben.

Wenn die Uhr nahe nach mittlerer Zeit geht, so kann man die halbe Zwischenzeit nach dieser Uhr für $\frac{1}{2}(T'-T)$ annehmen; weicht aber der Uhrgang gar zu sehr von wahrer Sonnenzeit ab, so muss man das beobachtete Zeitintervall in ein wahres Sonnen-Zeitintervall verwandeln, und um die Uhrcorrection für das Moment der Mitternacht zu haben, muss man auch die unmittelbar berechnete Mitternachtsverbesserung, die in wahren Sonnenzeit-Secunden ausgedrückt ist, in Uhrsecunden verwandeln.

Bezieht man aber die Uhrcorrection auf das Mittel der Beobachtungszeiten, so wird es nicht nöthig sein, wie H. Knorre (Astronomische Nachrichten, Bd. IX, S. 176) bemerkt hat, die berechnete Mittags- oder Mitternachtsverbesserung in Chronometersecunden zu reduciren.

111. Zur Bestimmung der Uhrcorrection kann man statt der correspondirenden Höhen eines und desselben Gestirns auch gleiche Höhen von zwei Sternen beobachten, von welchen der eine im Osten und der andere im Westen sich befindet; die geraden Aufsteigungen und die Declinationen dieser Sterne müssen genau bekannt sein. Schon im achtzehnten Jahrhundert haben der deutsche Astronom Köhler und der schwedische Astronom Tammelander*) den Vorschlag dazu gemacht; wir verdanken aber dem Pulkowaer Astronomen, Herrn Oberst Zinger, die vollständige Entwicklung der bequemsten und sichersten Methode, die Uhrcorrection aus Beobachtungen der Zeiten abzuleiten, in welchen verschiedene Sterne dieselbe Höhe erreichen. Seine Abhandlung ist 1874 in russischer Sprache erschienen; es finden sich darin nützliche Tafeln und umständliche Berechnungen der Beobachtungen; wir werden hier das Wesentlichste aus dieser Abhandlung mittheilen.

Es seien: α' und δ', α'' und δ'' die scheinbaren geraden Aufsteigungen und Declinationen zweier Sterne, von welchen der erste um die Chronometerzeit T' im Osten und der zweite um die Chronometerzeit T'' im Westen auf derselben wahren Höhe beobachtet wurden. Wenn φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, s' und s'' die Sternzeiten, u' und u'' die Uhrcorrectionen bezeichnen, welche den Chronometerzeiten T' und T'' entsprechen, so erhält man:

---

*) Bode's Astronomisches Jahrbuch 1784. — Tammelander, Meth. sistens inv. tempus verum ex observatis aequalibus diversarum Stellarum altitudinibus, Aboae 1785—1787.

$$s' = T' + u',\quad s'' = T'' + u'',$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos(\alpha' - s')$$
$$= \sin\varphi \sin\delta'' + \cos\varphi \cos\delta'' \cos(s'' - \alpha'').$$

Setzen wir:

$$\delta' = \delta + \varepsilon,\quad \alpha' - s' = t + r,$$
$$\delta'' = \delta - \varepsilon,\quad s'' - \alpha'' = t - r,$$

so folgt aus beiden Ausdrücken von $\sin h$ die Gleichung:

$$\sin t . \sin r + tg\,\varepsilon . tg\,\delta . \cos t . \cos r = tg\,\varepsilon . tg\,\varphi.$$

Da der Uhrgang immer als gegeben angenommen werden kann, so enthält die letzte Gleichung nur eine Unbekannte r; man hat nämlich

$$t = \frac{\alpha' - \alpha''}{2} - \frac{(s' - s'')}{2} = \frac{\alpha' - \alpha''}{2} - \frac{(T' - T'' + u' - u'')}{2}$$

und wenn v die Verspätung des Chronometers gegen Sternzeit in 24 Chronometerstunden bedeutet, so ist

$$u' - u'' = v \cdot \frac{(T' - T'')}{24\,\text{Stunden}}.$$

Setzen wir

$$tg\,m = tg\,\varepsilon . tg\,\delta . cotg\,t,$$

so kommt

$$\sin(r + m) = \frac{tg\,\varepsilon . tg\,\varphi\ \cos m}{\sin t}.$$

Die Uhrcorrection zur Zeit $\frac{1}{2}(T' + T'')$ ist dann

$$u = \frac{s' + s''}{2} - \frac{T' + T''}{2} = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} - \left(\frac{T' + T''}{2} + r\right);$$

u wird desto sicherer bestimmt, je kleiner das Zeitintervall $T' - T''$ zwischen den Beobachtungen im Osten und Westen ist, je rascher die Sternhöhen sich verändert haben und je näher das westliche Azimuth und Stundenwinkel eines Sterns mit den numerischen Grössen des östlichen Azimuths und Stundenwinkels des andern Sterns übereinstimmen; die constanten Fehler des zur Höhenmessung dienenden Instruments und der Fehler in der angenommenen Polhöhe eliminiren sich dann am besten. Es ist also vor-

theilhaft, solche Sterne zu wählen, welche nahezu dieselbe Declination haben, aber hinlänglich von einander in gerader Aufsteigung abstehen. In diesem Fall ist ε oder $\frac{1}{2}(\delta' - \delta'')$ ein kleiner Winkel; wenn er nicht einen Grad übersteigt, so kann man r, in Zeitsecunden ausgedrückt, nach folgender Formel ohne merklichen Fehler berechnen:

$$r = \frac{\varepsilon}{15(\cos\varepsilon)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{tg\,\varphi}{\sin t} \cdot \frac{1}{(\cos r)^{\frac{1}{3}}} - \frac{\varepsilon}{15(\cos\varepsilon)^{\frac{7}{3}}} \cdot tg\,\delta \,.\, cotg\, t \,.\, (\cos r)^{\frac{2}{3}}.$$

Man nimmt zuerst $(\cos r)^{\frac{1}{3}} = 1$, $(\cos r)^{\frac{2}{3}} = 1$ und erhält für r den genäherten Werth, welcher in Bogen ausgedrückt zur Berechnung von $(\cos r)^{\frac{1}{3}}$ und $(\cos r)^{\frac{2}{3}}$ dienen kann, um r genauer zu bestimmen.

Will man ganz strenge verfahren, so ist es noch nöthig, die tägliche Aberration in Betracht zu ziehen. Es ist bekannt, dass bei westlichem Stundenwinkel diese Aberration die Sternhöhe um $0'',31 \,.\, \cos\varphi \sin A \sin h$ vergrössert, wo A das Azimuth und h die Höhe des Sterns bedeutet. Da $15 \cos\varphi \sin A$ die Veränderung der Höhe in einer Secunde der Sternzeit ausdrückt, so kommt der Stern zur Höhe h um $0^s,021 \sin h$ zu spät. Wenn man also die Uhrcorrection ohne Rücksicht auf die tägliche Aberration berechnet hat, so muss zur gefundenen Uhrcorrection $0^s,021 \sin h$ addirt werden, um die genaue Uhrcorrection zu erhalten.

Die Beobachtungen lassen sich auf zweierlei Art ausführen:

1) Man kann das erste Vernier oder Mikroskop des Verticalkreises entsprechend den einzelnen vorausberechneten Höhen nach und nach einstellen und die Zeitmomente beobachten, wann der Stern jede dieser Höhen erreicht; es werden dann die Angaben des Niveaus bemerkt und die übrigen Verniere oder Mikroskope abgelesen. Hat man circa 5 Höhen des Sterns im Westen oder Osten beobachtet, so macht man ebenso viel Beobachtungen an dem Stern im Osten oder Westen.

2) Wenn der Verticalkreis mit guten Mikroskopen versehen ist, so dass eine bis auf eine Secunde genaue Einstellung möglich ist, so ist es vortheilhaft, in der Focalebene des Fernrohrs 5 Horizontalfäden, ungefähr in 2 Minuten Entfernung von einander, aufzuspannen und die Durchgänge der Sterne im Osten und im Westen durch dieselben Fäden zu beobachten; die Sterne müssen durch die Horizontalfäden gehen in der Mitte des Raumes zwischen den beiden Verticalfäden, die in der Mitte des Gesichtsfeldes sich befinden. Vor und nach diesen Durchgängen wird der Stand des Niveaus abgelesen; man kann auch die anderen Mikroskope ablesen, um die genauere Einstellung zu verbürgen.

Da die Bewegung der Sterne in Höhe bekannt ist, so ist es leicht, die bemerkten Zeiten der Durchgänge so zu corrigiren, dass diese Zeiten auf eine und dieselbe Lage des Niveaus und überhaupt auf die den beiden Sternen gemeinschaftliche gleiche Höhe reducirt werden. Wenn die Angabe des Barometers und die Lufttemperatur während der Beobachtungen sich verändert haben, so muss man auch auf die Veränderung in der Berechnung der Refraction Rücksicht nehmen.

Hier folgt ein Verzeichniss von passenden Sternen, die im Nautical Almanac vorkommen und bei der nördlichen Breite zu den erwähnten Beobachtungen benutzt werden können.

Sterne.	Decl.	*AR*
δ Aquilae	+ 2° 52′	19ʰ 19ᵐ,3
α Ceti	+ 3 37	2 55 ,9
α Serp.	+ 6 49	15 38 ,2
α Orion.	7 23	5 48 ,6
α Leon.	12 34	10 1 ,9
α Ophiuchi . . .	12 39	17 29 ,3
α Pegasi	14 33	22 58 ,7
β Leon.	15 15	11 42 ,5
α Bootis	19 49	14 10 ,1
β Arietis	20 13	1 47 ,9

Sterne	Decl.	*AR*
β Gem.	28° 19	$7^h\,37^m,8$
α Andr.	28 25	0 2 ,1
ζ Herc.	31 49	16 36 ,7
α Gem.	32 9	7 26 ,8
α Persei	49 26	3 15 ,6
η Urs. maj. . . .	49 55	13 42 ,7
γ Drac.	51 30	17 53 ,8
ϑ Urs. maj. . . .	52 14	9 24 ,7

Es ist nöthig, sich zur Beobachtung vorzubereiten; hat man eine bequeme Nachtstunde ausgewählt, so berechnet man zuerst die derselben entsprechende Sternzeit; aus obigem Verzeichnisse werden solche Sterne ausgesucht, für welche $\frac{\alpha'+\alpha''}{2}$ nicht zuviel von dieser Sternzeit abweicht. Die Sternzeit S, zu welcher beide Sterne eine gleiche Höhe H haben, kann nach der Formel

$$S=\frac{\alpha'+\alpha''}{2}-\left(\frac{\delta'-\delta''}{30}\right)\sin 1'\left(\frac{tg\,\varphi'}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha'')}-tg\,\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta'')\right.$$
$$\left.\cot g\,\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha'')\right),$$

berechnet werden, wo α' und δ' für den östlichen, α'' und δ'' für den westlichen Stern gelten.

Setzt man:

$$\cot g\,\delta'\cos(\alpha'-S)=tg\,y'\,;\quad \cot g\,\delta''\cos(S-\alpha'')=tg\,y''$$

und bezeichnet das Azimuth des östlichen Sterns durch A' und des westlichen Sterns durch A'', so kommt

$$\sin H=\frac{\sin\delta'\sin(\varphi+y')}{\cos y'}=\frac{\sin\delta''\sin(\varphi+y'')}{\cos y''}$$
$$\sin A'=\frac{\cos\delta'\sin(\alpha'-S)}{\cos H};\quad \sin A''=\cos\delta''\sin(S-\alpha'')$$

Nun sind $15\cos\varphi\sin A'\sin H$ und $15\cos\varphi\sin A''\sin H$ die Veränderungen der Höhe des östlichen und westlichen Sterns in einer Minute Sternzeit; danach können leicht die Sternzeiten bestimmt werden, in welchen in der Nähe der Zeit S der eine Stern im Osten und der andere im Westen auf fünf verschiedene

respective gleiche Höhen kommen; man berechnet darauf die Azimuthe der Sterne nach den gebräuchlichen Formeln. Auf diese Weise erhält man alles Nöthige, um vor jeder Beobachtung das Fernrohr des Verticalkreises auf den Stern einstellen zu können. Es ist noch nöthig, darauf zu achten, dass die Höhen und Azimuthe der Sterne nicht zu klein werden, um die Nähe des Horizonts und des Meridians zu vermeiden, weil sonst die Bilder der Sterne schlecht werden und ihre Höhen sich zu langsam verändern.

112. Zur Beobachtung der correspondirenden Höhen eines Gestirns bedient man sich vorzüglich der Sextanten und der Reflexionsinstrumente überhaupt; man kann jedoch auch hierzu den Verticalkreis und das Universalinstrument anwenden; dann muss man aber sorgfältig darauf achten, dass das Niveau und alle anderen Theile des Instruments, ausser dem Objective des Fernrohrs selbst, im Schatten sind und nicht dem unmittelbaren Einflusse der Sonnenstrahlen unterworfen werden. Man stellt die Beobachtungen alsdann in folgender Ordnung an.

Nachdem man das Instrument berichtigt und das Fernrohr auf das zu beobachtende Gestirn gerichtet hat, stellt man das erste Mikroskop ganz genau auf eine runde Zahl von Graden und Minuten, und zwar so, dass bald nachher der obere oder untere Rand des Gestirns den Horizontalfaden im Focus des Fernrohrs passirt; sobald sein Antritt an diesen Faden sich ereignet, schreibt man die Zeit auf und liest die Angaben des Niveaus und des andern Mikroskops ab. Darauf stellt man das erste Mikroskop genau um 10′ oder 20′ weiter und stellt eine neue Beobachtung an. Hat man auf diese Weise einige Beobachtungen in der ersten Lage des Instruments (z. B. *K. R.*) gemacht, so wendet man das Instrument um und stellt eben so viele Beobachtungen in der andern (oder *K. L.*) an. Will man zu gleicher Zeit die entsprechende Höhe des Gestirns haben, so beobachtet man, wenn es möglich ist, beide Ränder, sowohl den oberen als den unteren. Sehr vortheilhaft ist es, in der Nähe des ersten

Verticals zu beobachten, jedoch muss man hierbei gar zu kleine Höhen vermeiden.

Damit man weiss, wann die Beobachtungen nach dem Durchgange des Gestirns durch den Meridian anzufangen haben, muss man, wenigstens genähert, die Zeit der Culmination nach dem Chronometer wissen; legt man hierauf die Zeiten, welche seit den Beobachtungen im Osten und der Culminationszeit verflossen sind, zu dieser letzteren Zeit hinzu, so erhält man genähert die Zeiten, wann das Gestirn im Westen dieselbe Höhe wie im Osten haben wird. Man stellt alsdann zu rechter Zeit das Instrument zurecht, und fängt an im Westen zu beobachten, mit ganz denselben Mikroskopangaben, wie bei der Beendigung der östlichen Beobachtungen.

Der Stand des Niveaus wird sich während der ganzen Dauer der Beobachtungen nicht immer gleich bleiben; aber man kann den Einfluss einer Veränderung darin am leichtesten mit Hülfe der aus den Beobachtungen bekannten Bewegung des Gestirns in Rechnung bringen. Man wird erstlich, vermittelst der Niveauablesungen, die entsprechenden Correctionen der Höhen bestimmen und dann durch die bekannte Höhenänderung die beobachteten Chronometerzeiten so reduciren, als wenn das Gestirn im Osten und Westen genau gleiche Höhe gehabt hätte. Man muss ferner stets vor dem Anfange und nach der Beendigung der Beobachtungen den Stand des Barometers und Thermometers ablesen, um beurtheilen zu können, ob den gleichen scheinbaren Höhen im Osten und Westen auch gleiche Strahlenbrechungen entsprechen; denn wenn die Strahlenbrechung sich ändert, so muss man diese Aenderung in Betracht ziehen und, mit Hülfe der bekannten Bewegung des Gestirns in Höhe, alle beobachteten Zeichen so reduciren, als ob sie zu gleichen wahren Höhen gehörten.

113. Es giebt noch andere Methoden, den Stand des Chronometers und die Breite zu bestimmen; eine von ihnen ist besonders für die Schifffahrt wichtig und besteht darin, die Breite des Orts und die Zeit der Beobachtung durch Messung

zweier Höhen, entweder eines oder verschiedener Gestirne ausserhalb des Meridians zu bestimmen; jedoch wollen wir auf diese Methode hier nicht näher eingehen; indem wir sie in den Zusätzen zu unserem Buche anführen werden. Man wendet sie selbst auf dem Meere nur dann an, wenn die Umstände es nicht gestatten, andere, bequemere Methoden zu brauchen. Wir wollen hier noch mit ein paar Worten die scharfsinnige Methode von Gauss erwähnen, welche zu guten Resultaten führt, wenn man auch mit sehr schlechten Instrumenten versehen ist. Sie besteht darin, das man mit dem genäherten Stande des Chronometers und der genäherten Breite des Beobachtungsortes die ungefähren Chronometerzeiten berechnet, wann drei bekannte Sterne dieselbe Höhe erreichen, und darauf nach dem Chronometer genau die Momente beobachtet, wann dieses sich bei jedem der drei Sterne ereignet. Aus diesen Beobachtungen kann man alsdann nicht bloss die Breite des Orts und den Stand des Chronometers, sondern auch die Fehler des Instruments finden.

Die sehr elegante Auflösung dieser Aufgabe, welche Gauss in der Monatlichen Correspondenz von Zach für 1808 gegeben hat, wollen wir an einem andern Orte anführen. Der Astronom Knorre hat diese Methode für den praktischen Gebrauch noch mehr vervollständigt und in einer dazu besonders verfassten interessanten Abhandlung in russischer Sprache, welche zu Nicolajew im Jahre 1832 erschien, näher erläutert.

Dritter Abschnitt.

Zeit- und Breitenbestimmung mittelst des Durchgangsinstruments.

Allgemeine Theorie des Durchgangsinstruments.

114. Wenn wir aus der Beobachtung von Durchgängen der Gestirne durch eine verticale Ebene entweder die Uhrcorrection, oder den Unterschied der geraden Aufsteigungen zweier Gestirne zu bestimmen wünschen, so werden wir, wie oben (§ 59, S. 140) gezeigt, um so genauere Resultate erhalten, je näher das Fernrohr des Instruments sich in der Ebene des Meridians bewegt.

Kennen wir dagegen die Lage eines Sterns und den Stand und Gang des Chronometers mit Genauigkeit, so kann man die Durchgangszeit dieses Sterns durch irgend einen beliebigen Vertical benutzen, um dadurch die Zenithdistanz des Pols am Beobachtungsorte zu finden. Nun liegen aber zwei Punkte, sowohl Zenith als Pol, im Meridiane selbst, und alle Verticale durchschneiden den Meridian im Zenithe; folglich wird der Punkt aller dieser Durchschnitte oder das Zenith selbst um so genauer durch Beobachtungen abgeleitet werden können, als der Winkel, welchen der Meridian mit derjenigen Ebene des Verticals bildet, an welchem man beobachtet, sich einem rechten Winkel nähert,

und je näher am Zenith der Stern durch diese Ebene hindurchgeht.

Es giebt daher vorzüglich zwei Hauptlagen, in welchen man das Durchgangsinstrument anwenden muss:

1) in der Nähe des Meridians und

2) in der Nähe des ersten Verticals.

Man wird jedoch das Instrument zuweilen auch in anderen Lagen benutzen können, und daher wollen wir jetzt zuerst die allgemeinen Beziehungen untersuchen, welche zwischen Beobachtungsdaten und den gesuchten Grössen stattfinden.

115. Die Gesichtslinie, welche durch irgend einen Verticalfaden, der im Brennpunkte des Fernrohrs aufgespannt ist, durchgeht, beschreibt bei der Umdrehung des Fernrohrs um seine horizontale Achse einen Kreis an der Himmelskugel, und die Lage dieses Kreises wird vollkommen bestimmt sein, wenn wir kennen:

1) seine Entfernung von dem mit ihm parallelen grössten Kreise;
2) die Richtung, nach welcher er von diesem letzteren absteht, und
3) den Ort eines geometrischen Pols dieses grössten Kreises.

Man denke sich nun, dass $S'Q'V'$ (Fig. 31, Taf. I) der erwähnte Kreis der Himmelskugel sei; TQV der mit ihm parallele grösste Kreis; es sei O einer der zwei Punkte der Himmelskugel, welche in der Verlängerung der horizontalen Achse des Fernrohrs liegen. Wir nehmen hier an, dass bei der Aufstellung des Instruments im Meridiane dieser Punkt im Ostpunkte des Horizonts, dagegen bei seiner Aufstellung im ersten Verticale im Norden liegt. Bezeichnet man nun die Entfernung des vom Mittelfaden beschriebenen Kreises von dem ihm parallelen grössten Kreise durch C und setzt die Winkelentfernung des Mittelfadens vom Seitenfaden $= F$, so wird, wenn man durch O einen beliebigen grössten Kreis $OQ'Q$ legt, der Bogen QQ', welcher zwischen den beiden Kreisen $S'Q'V'$ und TQV eingeschlossen ist und ihre Entfernung von einander ausdrückt,

$= C+F$ sein. Wir wollen C als positiv betrachten, wenn der kleine Kreis, welcher vom Mittelfaden beschrieben wird, näher am Pole O gelegen ist als der grösste Kreis TQV, und F sei alsdann positiv, wenn der Seitenfaden näher am Pole O als der Mittelfaden liegt.

Wir wollen ferner (Fig. 31, Taf. I) annehmen, dass der Kreis $HPZB$ der Meridian sei; Z das Zenith, P der sichtbare Pol des Aequators $AB\pi$; $H\pi R$ der Horizont und H der Nord-, π der Ostpunkt des Horizonts.

Den Ort des Punkts O kann man auf zweierlei Weise ausdrücken: entweder durch seine Zenithdistanz $ZO = 90°+J$ und sein Azimuth, oder auch durch seine Polardistanz $PO = 90°+N$ und durch seinen zugehörigen Stundenwinkel; wir wollen annehmen, dass J und N positiv sind, wenn die kürzesten Entfernungen des Punktes O vom Zenithe und vom Pole des Aequators mehr als 90° betragen. Das Azimuth soll positiv von Norden nach Osten, und der Stundenwinkel positiv von der oberen Culmination aus nach Westen gezählt werden. Auf diese Weise wird das Azimuth des Punkts π oder des Ostpunkts des Horizonts $= +90°$ werden, sein Stundenwinkel $= -90°$; für den Punkt O wird das Azimuth $= 90°+A$, der Stundenwinkel $= -90° - M$ werden.

116. Wir wollen uns nun vorstellen, dass zur Sternzeit $s_,$ der scheinbare Rand eines Gestirns im Punkte S' an den verticalen Seitenfaden des Instruments tritt; dann wird der scheinbare Rand des Gestirns die Ebene des Kreises $S'Q'V'$, welche von diesem Faden beschrieben wird, berühren. Legen wir nun durch S' einen grössten Kreis $S'O$, so wird dieser senkrecht auf dem Kreise $S'Q'V'$ stehen und durch den scheinbaren Ort des Centrums des Gestirns S gehen, dessen AR in Zeit wir durch $\alpha_{,,}$ und dessen Declination wir durch $\delta_{,,}$ bezeichnen wollen. Verwandelt man die Zeiten $s_,$ und $\alpha_{,,}$ in Grade $s_,°$ und $\alpha_{,,}°$, so wird $s_,° - \alpha_{,,}°$ der Stundenwinkel des Centrums des Gestirns sein. Wenn man den Bogen $S'SO$ bis

zu seinem Durchschnitte T mit dem grössten Kreise TQV, welcher mit $S'Q'V'$ parallel ist, verlängert und den scheinbaren Winkelhalbmesser des Gestirns durch $h_,$ bezeichnet, so wird $TO = 90°$, $TS' = C + F$, $SS' = h_,$; bezeichnet man alsdann die Breite des Beobachtungsorts durch φ, so erhält man in den sphärischen Dreiecken ZPO und SPO:

$$ZP = 90° - \varphi;\ PO = 90° + N;\ ZO = 90° + J;$$
$$OZP = 90° + A;\ ZPO = 90° + M;\ PS = 90° - \delta_{,,};$$
$$SPO = 90° + M + s_,° - a_{,,}°;\ SO = 90° - (F + C \pm h_,),$$

wo das obere Zeichen $+$ alsdann gebraucht wird, wenn das Centrum S des Gestirns näher an O als der beobachtete Rand S' liegt. Durch Auflösung der sphärischen Dreiecke erhält man:

$$\sin N = \sin J \sin\varphi + \cos J \cos\varphi \sin A \quad \ldots \quad (1)$$
$$\sin J = \sin N \sin\varphi + \cos N \cos\varphi \sin M \quad \ldots \quad (2)$$
$$\cos M \cos N = \cos J \cos A \quad \ldots \quad (3)$$
$$\sin M \cos N = \sin J \cos\varphi - \cos J \sin\varphi \sin A \quad \ldots \quad (4)$$
$$\sin(F + C \pm h_,) = -\sin\delta_{,,} \sin N - \cos\delta_{,,} \cos N \sin(M + s_,° - a_{,,}°) \quad \ldots \quad (5)$$

In diesen Gleichungen ist die ganze Theorie des Passagen-Instruments enthalten; sie wurden zuerst in dieser Form von Bessel entwickelt. In unserer Figur ist der Winkel $\pi PO = M$; verlängert man aber den Bogen TQV und den Meridian PZ bis zu ihren Durchschnitten in A und B mit dem oberen Theile des Aequators, so erhält man: $APB = \pi PO$; denn P ist der Pol des Aequators, O der Pol des grössten Kreises ATV und π der Pol des Meridians, also Winkel $APO = 90° = ZP\pi$. Daher ist $-M$ der Stundenwinkel des Durchschnittspunkts des grössten Kreises des Instruments mit dem oberen Theile des Aequators, oder es ist auch M die Entfernung des Culminationspunktes des Aequators von dem eben erwähnten grössten Kreise; M wird positiv sein, wenn diese Entfernung östlich ist.

Wenn man die Durchschnitte des Horizonts mit den Kreisen

ZO und TQV (Fig. 31, Taf. I), durch R und V bezeichnet, so wird V der Pol des Kreises ZRO sein, und daher $RV = 90°$, aber $H\pi$ ebenfalls $= 90°$; folglich $A = R\pi = VH$, oder es bezeichnet A in unseren Formeln das Azimuth des grössten Kreises des Instruments, von Norden nach Osten positiv gezählt.

In der Gleichung (5) wird die Declination $\delta_{,,}$ positiv gezählt, wenn das Gestirn sich auf derselben Seite des Aequators wie der sichtbare Pol befindet.

117. Hat man mehrere Beobachtungen an den verschiedenen verticalen Seitenfäden des Instruments angestellt, so kann man aus ihnen bequem den Durchgang des Gestirns durch den grössten Kreis des Instruments bestimmen, indem man sie alle zuerst auf den Mittelfaden reducirt und darauf den berechneten Durchgang durch den Mittelfaden auf den grössten Kreis des Instruments reducirt. Hierbei kann man wegen der Kleinheit von F und C statt der Sinusse die Bögen selbst nehmen; gewöhnlich ist C im Vergleich zu F nur eine kleine Grösse.

Wir wollen nun annehmen, dass $s°$, $\delta_{,}$ und $\alpha_{,}°$ ganz dasselbe für den Mittelfaden bezeichnen, was $s_{,}°$, $\delta_{,,}$ und $\alpha_{,,}°$ für den Seitenfaden bezeichneten, so wissen wir, dass der Mittelfaden $F = 0$ entspricht, und folglich aus (5):

$$\begin{aligned} \sin(C \pm h_{,}) &= -\sin N \sin\delta_{,} - \cos N \cos\delta_{,} \sin(M + s° - \alpha_{,}°) \\ &= -\sin N \sin\delta_{,} - \cos N \sin M \cos\delta_{,} \cos(s° - \alpha_{,}°) \\ &\quad - \cos N \cos M \cos\delta_{,} \sin(s° - \alpha_{,}°). \end{aligned}$$

Bezeichnet man aber in den Gleichungen (a), (b) und (c), § 15, S. 30, den willkührlichen Werth k durch $s°$, durch π die Horizontal-Parallaxe des Gestirns, durch φ' die geocentrische Polhöhe, durch $\delta_{,}$ die scheinbare Declination des Centrums des Gestirns, und die linearen Entfernungen des Centrums des Gestirns vom Beobachter und vom Centrum der Erde durch d' und d, so folgt ganz einfach:

$$\frac{d'}{d} \sin\delta_{,} = \sin\delta - \sin\pi \sin\varphi'$$

$$\frac{d'}{d}\cos\delta_,\cos(s^\circ-\alpha_,^\circ) = \cos\delta\cos(s^\circ-\alpha^\circ)-\sin\pi\cos\varphi'$$

$$\frac{d'}{d}\cos\delta_,\sin(s^\circ-\alpha_,^\circ) = \cos\delta\sin(s-\alpha^\circ),$$

wo α° die wahre gerade Aufsteigung und δ die wahre Declination des Gestirns zur Zeit seiner Beobachtung am Mittelfaden bezeichnet; multiplicirt man nun den Ausdruck für $(C \pm h_,)$ mit $\frac{d'}{d}$, so erhält man mit Rücksicht auf die vorhergehenden Gleichungen:

$$\frac{d'}{d}\sin(C \pm h_,) = -\sin N\sin\delta - \cos N\cos\delta\sin(M + s^\circ - \alpha^\circ) + \\ + \sin N\sin\pi\sin\varphi' + \cos N\sin M\sin\pi\cos\varphi'.$$

Wir setzen zur Zeit des Antritts des Randes des Gestirns an den Seitenfaden die wahre gerade Aufsteigung seines Centrums $= \alpha^\circ - \triangle\alpha$, wo $\triangle\alpha$ in Bogensecunden ausgedrückt ist. Die Declination können wir für die Antritte an beide Fäden als gleich annehmen und sie gleich dem arithmetischen Mittel der Declinationen setzen, welche zur Zeit der Antritte an den Seiten- und Mittelfaden stattfinden, weil die Declinationen aller Gestirne, selbst des Mondes, sich sehr langsam ändern, und letztere niemals 29° übersteigt. Alsdann haben wir für $\frac{d'}{d}\sin(F + C \pm h)$ einen ähnlichen Ausdruck; zieht man hiervon die Gleichung für $\frac{d'}{d}\cdot\sin(C \pm h)$ ab, und setzt für die Sinusse der kleinen Bögen, diese Bögen selbst multiplicirt mit $\sin 1''$, so folgt:

$$\frac{d'}{d}F\sin 1'' = \cos N\cos\delta\,.\,2\sin\tfrac{1}{2}(s^\circ - s_,^\circ - \triangle\alpha)\cos[M + \\ \tfrac{1}{2}(s^\circ + s_,^\circ) - \alpha^\circ + \tfrac{1}{2}\triangle\alpha].$$

Es sei v_* die in Zeitsecunden ausgedrückte Zunahme der geraden Aufsteigung des Gestirns in einer Sternzeit-Stunde, und v diese Zunahme in einer mittleren Stunde; $15\,v_*$ und $15\,v$ werden dann die entsprechenden Zunahmen in Bogensecunden

ausdrücken. Also wird die Zunahme $\Delta\alpha$ der AR im Bogen, während der Dauer von $s-s_,$ Sternzeit-Secunden, aus der Proportion $\Delta\alpha : 15v_* = s-s_, : 3600''$ gefunden; nun ist $(s-s_,) = s^\circ - s_,^\circ$ in Bogensecunden ausgedrückt, folglich:

$$\frac{\Delta\alpha}{s^\circ - s_,^\circ} = \frac{v_*}{1^h} = \frac{v_*}{3600''} = \frac{v}{3609''.8} = \varepsilon v, \text{ wo } \varepsilon = \frac{1}{3609.8} \text{ ist.}$$

$$s^\circ - s_,^\circ - \Delta\alpha = (s^\circ - s_,^\circ)\left(1 - \frac{\Delta\alpha}{s^\circ - s_,^\circ}\right) = (s^\circ - s_,^\circ)(1-\varepsilon v);$$

εv ist hier die Zunahme der geraden Aufsteigung in Zeit während einer Sternzeit-Secunde.

Wegen der Kleinheit der Werthe $s^\circ - s_,^\circ$, $\Delta\alpha$, εv und εu kann man annehmen, dass:

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(s^\circ - s_,^\circ - \Delta\alpha) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(s^\circ - s_,^\circ)(1-\varepsilon v);$$

$$\frac{1}{1-\varepsilon v} = 1 + \varepsilon v + \ \ . \ \ . \ \ .$$

Wir haben § 10, S. 24 gesehen, dass $d' : d = \sin z : \sin z'$, wo z die wahre und z' die scheinbare Zenithdistanz des Gestirns bezeichnet; folglich erhalten wir aus der Gleichung für $\frac{d'}{d} \cdot F \sin 1''$ die folgende:

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(s^\circ - s_,^\circ) = \frac{(1+\varepsilon v)\frac{\sin z}{\sin z'} \cdot F \sin 1''}{\cos\delta \cos N \cos(M + \frac{1}{2}(s^\circ + s_,^\circ) - \alpha^\circ + \frac{1}{2}\Delta\alpha)} \quad . \ . \ (6)$$

Meistens wird $\frac{1}{2}(s^\circ - s_,^\circ)$ eine sehr kleine Grösse sein, und man kann anstatt $\sin \frac{1}{2}(s^\circ - s_,^\circ)$ den Werth $\frac{1}{2}(s^\circ - s_,^\circ) \sin 1''$ setzen, wo $s^\circ - s_,^\circ$ in Bogensecunden ausgedrückt ist; wenn daher:

$15l = 15(s - s_,) = s^\circ - s_,^\circ$; $15f = F$ ist, so wird:

$$\pm l = \frac{(1+\varepsilon v)\frac{\sin z}{\sin z'} \cdot f}{\cos\delta \cos N \cos(M + s^\circ - \alpha^\circ + \frac{1}{2}\Delta\alpha \mp \frac{15}{2} l)} \quad . \ . \ (7)$$

Obgleich der Nenner dieses Ausdrucks die gesuchte Grösse l und den unbekannten Werth $\Delta\alpha$ enthält, so werden doch diese beiden Werthe beinahe immer sehr klein sein, und man

kann sie daher zuerst vernachlässigen, um einen genäherten Werth von l zu erhalten; berechnet man hiermit $\Delta\alpha$ und verbessert man darauf mit diesen gefundenen $\Delta\alpha$ und l den Nenner, so erhält man einen zweiten, weit genaueren Werth von l. Uebrigens kann man meistens l aus den Beobachtungen selbst genähert ableiten, sucht man das hierzu entsprechende $\Delta\alpha$ und benutzt diese beiden Werthe im obigen Nenner, so wird ein kleiner Fehler in ihnen einen so kleinen Einfluss auf die genaue Berechnung von l oder $s^\circ - s_,^\circ$ äussern, dass wir diesen gegen die Beobachtungsfehler gänzlich vernachlässigen können.

Aus dieser Untersuchung folgt nun für die speciellen Fälle:

1) Wenn man Sterne beobachtet, so ist $v = 0$, $z = z'$.

2) Wenn man die Sonne beobachtet, so kann man ohne weiteres $z = z'$ und für δ die Declination zur Zeit des Antritts an den Mittelfaden annehmen. In den astronomischen Ephemeriden ist die wahre gerade Aufsteigung der Sonne in Zeit für jeden wahren Mittag, für denjenigen Meridian, auf den sich die Ephemeride bezieht, angegeben; nimmt man daher den Unterschied der geraden Aufsteigungen der Sonne an zwei aufeinander folgenden wahren Mittagen, so erhält man die Zunahme der geraden Aufsteigung der Sonne in einem wahren Tage; es sei diese Zunahme $= w$, so wird:

$$1 + \varepsilon v = \frac{24^h + w}{24^h} = 1 + \lambda\odot,$$

wo $\lambda\odot$ die Zunahme der geraden Aufsteigung der Sonne in einer Sternzeit-Secunde bedeutet.

3) Für die Planeten kann man immer $z = z'$ und für δ die Declination zur Zeit des Antritts an den Mittelfaden setzen.

4) Für den Mond endlich muss man die obige Formel gerade so anwenden, wie sie gegeben ist; offenbar ist alsdann $1 + \varepsilon v = 1 + \lambda☾$, wo $\lambda☾$ die in Zeit ausgedrückte Zunahme der geraden Aufsteigung des Mondes in einer Sternzeit-Secunde ausdrückt.

Auf diese Weise kann man alle Beobachtungen des Randes des Gestirns an den Seitenfäden auf den Mittelfaden reduciren; um den Durchgang des Centrums des Gestirns durch den Mittelfaden zu finden, braucht man nur $\frac{h_{,}}{15}$ anstatt F in die obige Formel zu setzen, wo $h_{,}$ der scheinbare Winkelhalbmesser des Gestirns ist. Bezeichnet man nun den wahren Winkelhalbmesser des Gestirns, wie man ihn in den Ephemeriden selbst findet, durch h, und erinnert sich (§ 10, S. 24), dass $h_{,} \frac{\sin z}{\sin z'} = h$ ist; so erhält man offenbar aus der Formel (7), wenn man anstatt $f \frac{\sin z}{\sin z'}$ den Werth $\frac{h}{15}$ setzt, den Unterschied der Sternzeiten der Durchgänge des Randes und des Gestirns durch den Mittelfaden.

118. Die angegebene Methode l zu finden ist sehr bequem, aber Bessel hat zur Reduction der Beobachtungen von Sternen auf den grössten Kreis des Instruments ganz strenge Formeln gegeben, die wir hier mit einer kleinen Aenderung entwickeln wollen. Es sei $F + C = F_{,}$ und es seien δ, s° und α° auf den Durchgang des Sterns durch den eben erwähnten grössten Kreis bezogen; dann erhält man für den Seitenfaden und für diesen grössten Kreis die folgenden Gleichungen:

$$\sin F_{,} = -\sin N \sin\delta - \cos N \cos\delta \sin(M + s_{,}^{\circ} - \alpha^{\circ});$$
$$0 = -\sin N \sin\delta - \cos N \cos\delta \sin(M + s^{\circ} - \alpha^{\circ}).$$

Nimmt man nun der Kürze wegen an, dass:

$$M + \tfrac{1}{2}(s^{\circ} + s_{,}^{\circ}) - \alpha^{\circ} = Q \text{ und } \sin\tfrac{1}{2}(s^{\circ} - s_{,}^{\circ}) = x$$

ist, so erhält man durch Subtraction und Addition der beiden vorhergehenden Gleichungen:

$$\frac{\sin F_{,}}{\cos\delta \cos N \, . \, x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . = +2\cos Q$$
$$\frac{\sin F_{,}}{\cos\delta \cos N \sqrt{1-x^2}} + \frac{2\sin N \sin\delta}{\cos\delta \cos N \sqrt{1-x^2}} \; . \; . \; . \; . = -2\sin Q$$

Wenn man diese beiden Gleichungen zum Quadrat erhebt und addirt, so erhält man nach einiger Reduction:

$$0 = \sin^2 F_{,} + x^2[4 \sin F_{,} \sin\delta \sin N - 4(\cos^2\delta \cos^2 N - \sin^2\delta \sin^2 N)] + 4x^4 \cos^2\delta \cos^2 N.$$

Es sei nun $\delta + N = \beta$, $\delta - N = \gamma$; alsdann hat man:

$$0 = \sin^2 F_{,} + x^2[2 \sin F_{,}(\cos\gamma - \cos\beta) - 4\cos\beta \cos\gamma] + x^4(\cos\gamma + \cos\beta)^2$$

also auch:

$$\sin^2 F_{,} + 2 \sin F_{,} x^2(\cos\beta + \cos\gamma) + x^4(\cos\beta + \cos\gamma)^2 = 4x^2(\cos\beta\cos\gamma + \sin F_{,} \cos\beta);$$

daher durch Ausziehung der Quadratwurzel:

$$\sin F_{,} + x^2(\cos\beta + \cos\gamma) = \pm 2x\sqrt{\cos\beta(\cos\gamma + \sin F_{,})}$$

also endlich:

$$x = \pm \frac{\sqrt{\cos\beta(\cos\gamma + \sin F_{,})} \pm \sqrt{\cos\gamma(\cos\beta - \sin F_{,})}}{\cos\beta + \cos\gamma}$$

In jeder bestimmten Lage des Instruments durchschneidet ein Stern täglich zwei Mal jeden der beiden Fäden, daher wird die Grösse $x = \sin\frac{1}{2}(s^\circ - s^\circ_{,})$ zwei verschiedene Werthe haben müssen, von welchen der eine klein, der andere aber nahe an 24 Stunden sein wird; zur Reduction der Beobachtungen muss man den kleineren nehmen; folglich ist:

$$x = \pm \frac{\sqrt{\cos\beta(\cos\gamma + \sin F_{,})} - \sqrt{\cos\gamma(\cos\beta - \sin F_{,})}}{\cos\beta + \cos\gamma}$$

$$x = \frac{\pm \sin F_{,}}{\sqrt{\cos\beta(\cos\gamma + \sin F_{,})} + \sqrt{\cos\gamma(\cos\beta - \sin F_{,})}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$x = \frac{\pm \sin F_{,}}{\sqrt{\cos\beta\cos\gamma}\left(\sqrt{1 + \frac{\sin F_{,}}{\cos\gamma}} + \sqrt{1 - \frac{\sin F_{,}}{\cos\beta}}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Um zu wissen, welchen der beiden Werthe von x man in jedem bestimmten Falle zu wählen hat, muss man bemerken, dass in der Praxis der grösste Kreis des Instruments immer sehr

nahe beim Zenithe vorbeigeht und daher die Werthe β und γ niemals 90° übersteigen; folglich sind $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ immer positive Werthe, und ebenso der Nenner in den Ausdrücken (8) und (9) positiv; man muss also für ein positives $F_,$ in der Gleichung (9) das obere Zeichen (+) dann nehmen, wenn $s > s_,$, d. h. wenn die Sternzeit des Durchgangs des Sterns durch den grössten Kreis des Instruments, oder sehr nahe durch den Mittelfaden grösser ist, als die Sternzeit bei seinem Durchgange durch den Seitenfaden; dagegen nimmt man das untere Zeichen (—), wenn $s^\circ < s_,^\circ$. Wenn $F_,$ an und für sich eine negative Grösse ist, so braucht man die obigen Zeichen in einer entgegengesetzten Bedeutung. Bei der Berechnung von β und γ muss man darauf Acht geben, ob N einen positiven oder negativen Werth hat. Sein Werth wird dann positiv werden, wenn der östliche Pol des grössten Kreises des Instruments, dessen Entfernung vom Faden $= 90^\circ - F_,$ ist, bei nördlicher Polhöhe zwischen Süden und Osten liegt; dagegen wird N negativ werden, wenn dieser Pol zwischen Norden und Osten liegt. Damit gar kein Zweifel über das Zeichen von F obwalten kann, muss man beim Beobachten bemerken, in welcher Lage sich das Instrument befindet; indem man die Gegend, nach welcher dasjenige Ende der horizontalen Achse des Instruments gerichtet ist, an welchem der verticale Höhenkreis befestigt ist, aufschreibt.

Wenn jeder der beiden Werthe β und γ hinreichend von 90° verschieden ist, so kann man im Nenner des Ausdrucks (9) die Summe der beiden Quadratwurzeln nach dem Binomischen Lehrsatze entwickeln, und erhält dann:

$$2x = \pm\left(\frac{\sin F_,}{\sqrt{\cos\beta\cos\gamma}} - \frac{1}{4}\frac{\sin^2 F_,(\cos\beta - \cos\gamma)}{(\cos\beta\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} + \ldots\ldots\right)$$

Es ist aber $\beta = \delta + N$, $\gamma = \delta - N$, folglich kann man bei Vernachlässigung der Glieder 3. Ordnung von x und $\sin F_,$ annehmen, dass:

$$2x = (s^\circ - s_,^\circ) \sin 1'', \quad \sin F_, = F_, \sin 1''$$

und nimmt man ferner an, dass:

$$s^\circ - s_,^\circ = 15 l; \; F_, = 15 f_,; \; \sqrt{\cos(\delta + N)\cos(\delta - N)} = \Theta;$$

so erhält man die Formel von Struve:

$$\pm l = \frac{f_,}{\Theta} + \frac{7.5 \sin 1'' \sin \delta \sin N . f_,^2}{\Theta^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

wo die Zeichen ganz so wie vorher bestimmt werden; setzt man aber anstatt $f_,$ denjenigen Werth (f), der zwar einerlei Grösse mit $f_,$, aber dasselbe Zeichen wie l hat, so wird:

$$l = \frac{(f)}{\Theta} \pm \frac{7.5 \sin 1'' \sin \delta \sin N (f)^2}{\Theta^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

wo das Zeichen (+) gebraucht wird, wenn der Kreis, den der Seitenfaden beschreibt, weiter vom Pole des Aequators als vom grössten Kreise des Instruments absteht.

Um nun den Unterschied der Zeiten des Durchgangs des Sterns durch den Seiten- und Mittelfaden zu bestimmen, muss man in der Gleichung (9) statt $F_,$ für den Seidenfaden $F_, + C$ und für den Mittelfaden C setzen und die so erhaltenen Ausdrücke von einander abziehen. Aber da in der Praxis der Werth von C stets sehr klein ist, so kann man bei der Berechnung dieser Differenzen $C = 0$ annehmen, und alsdann wird $\frac{1}{15}(s^\circ - s_,^\circ) = s - s_,$, diese Differenz in Sternzeit angeben.

119. Wir wollen nun diese allgemeinen Formeln mit den beiden Hauptlagen, in denen das Instrument fest aufgestellt wird, näher vergleichen.

Wenn die optische Achse des Fernrohrs die Ebene des Meridians beschreibt, so ist $N = 0$, $J = 0$, $M = 0$, $s^\circ = \alpha^c$, folglich erhalten wir für einen beobachteten Stern:

$$\sin 15 f = \sin 15 l . \cos \delta,$$

welcher Ausdruck ganz derselbe ist, wie der, welchen wir schon früher § 60, S. 145 gefunden haben; wir haben dort gesehen, dass man daraus die Gleichung (2) ableiten kann, welche in der Praxis hinreichend genau ist; will man dagegen aus dieser Gleichung l bestimmen, so erhält man nach der Methode der unbestimmten Coefficienten:

$$l = f \sec\delta + 37.5 \sin^2 1''. f^3 \sec^3\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Das letzte Glied dieser Formel braucht man nur dann, wenn $\delta > 81°$ und $f > 50^s$.

Wenn das Fadennetz aus einer ungeraden Anzahl Fäden besteht, welche symmetrisch in Beziehung auf den Mittelfaden aufgespannt sind, so braucht man nicht jeden Faden für sich auf den Mittelfaden zu reduciren, sondern man kann sogleich den wahren Durchgang des Sterns durch den Mittelfaden aus den an allen Fäden angestellten Beobachtungen bestimmen. Man nehme an, das Fadennetz enthalte 5 Verticalfäden und es seien T', T'', T''', T^{IV} und T^V die Sternzeiten des Antritts des Sterns an diese Fäden, deren respective Entfernungen vom Mittelfaden, in Zeit ausgedrückt, durch $+f'$, $+f''$, $-f^{IV}$, $-f^V$ bezeichnet werden mögen; so folgt in diesem Falle für den wahrscheinlichen Durchgang des Sterns durch den mittleren Verticalfaden:

$$+\tfrac{1}{5}(T' + T'' + T''' + T^{IV} + T^V) + \tfrac{1}{5}(f' - f^V + f'' - f^{IV}) \sec\delta.$$

Reducirt man nur die Beobachtungen aus zwei Fäden, z. B. dem zweiten und vierten, so folgt offenbar aus ihnen für die Zeit des Durchgangs durch den Mittelfaden:

$$\tfrac{1}{2}(T'' + T^{IV}) + \tfrac{1}{2}(f'' - f^{IV}) \sec\delta.$$

Auf solche Weise kann man jedes Paar correspondirender Fäden leicht reduciren und aus der Uebereinstimmung der einzelnen Resultate leicht die Genauigkeit der Beobachtungen beurtheilen. Für die Glieder $(f' - f^V)\sec\delta$, $(f'' - f^{IV})\sec\delta$ kann man sich ferner Tafeln für alle verschiedenen Declinationen leicht

berechnen, und dadurch die Reductionen mit der grössten Leichtigkeit ausführen. Hierbei genügt die genäherte Declination des Sterns, ausser bei Sternen in der Nähe des Pols des Aequators; für alle anderen macht ein Fehler von einigen Minuten in der Declination wenig aus. Uebrigens ist es gut, statt dieser Methode jeden einzelnen Faden für sich zu reduciren, weil man dadurch leicht entdecken kann, ob sich irgend ein grober Schreibfehler beim Eintragen eingeschlichen hat. Jedoch muss man dann die Declination des Sterns weit genauer kennen, und zwar um so mehr, je näher der Stern sich dem Pole des Aequators befindet. Wenn f nicht grösser als 60^s in Zeit ist, so wird ein Fehler in der Declination des Sterns von einer Minute auf die Berechnung von l keinen merklichen Einfluss haben, sobald die Declination des Sterns nicht grösser als 30° ist; jedoch bei $\delta = 60°$ wird dieser Fehler schon gleich $= 0^s,06$ in Zeit; bei $\delta = 80°$ wir der $= 0^s,57$, und bei $\delta = 88° 28'$ wird er sogar $= 22^s,5$; hieraus sieht man, dass man bei Sternen, die dem Pole sehr nahe liegen, die Declination bis auf eine Genauigkeit von einer halben Secunde kennen muss.

120. Wir wollen jetzt annehmen, dass das Instrument im ersten Verticale aufgestellt sei und dass die Polhöhe nördlich ist. Der Werth von J, welcher durch das Niveau bestimmt wird, wird immer so klein sein, dass man ihn bei der Berechnung der Fädenreduction ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann. Aber aus den Gleichungen (1) und (4) § 116, S. 312 ersieht man, dass für $J = 0$ und $A = 90°$, $N = 90° - \varphi$ und $M = -90°$ sein wird; folglich wird alsdann $\beta = 90° - (\varphi - \delta)$ und $\gamma = \varphi + \delta - 90°$. In diesem Falle befindet sich der Pol des grössten Kreises des Instruments, dessen Entfernung von den Fäden $90° - F$ entspricht, im Süden; liegt er aber im Norden, so wird N negativ werden und gleich $-(90° - \varphi)$; wir haben daher in diesem Falle $\beta = \varphi + \delta - 90°$, $\gamma = 90° - (\varphi + \delta)$. Wenn der erwähnte Pol nach Süden gerichtet ist, der Stern sich aber im Westen befindet, so geht

dieser zuerst durch die Fäden hindurch, für welche F positiv ist, und darauf erst durch diejenigen, für welche der Werth von F negativ ist; wenn der Stern aber im Osten ist, so wird das Umgekehrte stattfinden. Ebenso wird, wenn der Pol des grössten Kreises des Instruments nach Norden gerichtet ist, ein östlich gelegener Stern diejenigen Fäden zuerst passiren, für welche F positiv ist, ein westlicher Stern dagegen sie später als diejenigen Fäden passiren, für welche F negativ ist. Hieraus folgen die allgemeinen Regeln zum Gebrauche der genauen Formel (9) § 118, S. 318, welche man durch Einführung von Hülfswinkeln zur logarithmischen Berechnung bequemer einrichten kann.

Uebrigens kann man, wie wir weiter unten zeigen werden, die Reduction des Seitenfadens auf den Mittelfaden im ersten Verticale leicht durch folgende Formel bewerkstelligen:

$$\sin\tfrac{1}{2}(s^\circ - s_{,}^\circ) = \frac{+\sin F}{2\cos\delta\sin\varphi\sin\tfrac{1}{2}(t+t')}$$

wo $t = s^\circ - \alpha^\circ$, $t' = s_{,}^\circ - \alpha^\circ$ ist.

121. Die Ordnung, in welcher die Fäden der Reihe nach von Sternen passirt werden, hängt von der Lage des Instruments ab: die Sterne gehen in einerlei Ordnung durch die Fäden: im Meridiane, wenn 1) bei der oberen Culmination das Kreisende der horizontalen Achse nach Westen gerichtet ist, oder 2) bei der unteren Culmination, wenn dieses Kreisende nach Osten gerichtet ist, und ferner im ersten Verticale: wenn 1) das Kreisende der Achse im Süden ist und der Stern sich im Osten befindet; und 2) wenn das Kreisende im Norden ist, und der Stern sich im Westen befindet. Ferner ist hierbei zu bemerken, dass bei derselben Lage des Kreisendes und entgegengesetzten Culminationen alle Sterne in umgekehrter Ordnung durch die Fäden gehen; überhaupt gehen Sterne, bei unveränderter Stellung des Instruments, zwischen ihrer unteren Culmination und ihren allergrössten Abweichungen von dem Meridiane in entgegengesetzter Ordnung durch die Fäden.

Unter **Reduction** des Seitenfadens auf den Mittelfaden versteht man die Zahl von Zeitminuten und Zeitsecunden, welche man zur Zeit des Durchgangs des Gestirns durch den Seitenfaden hinzuzulegen oder abzuziehen hat, um die Zeit des Antritts an den Mittelfaden zu erhalten. Geht das Chronometer nach Sternzeit, so wird diese Reduction $= \frac{1}{15}(s^\circ - s_,^\circ) = \pm l$, geht das Chronometer aber nicht nach Sternzeit, so wird die Reduction $= l_,$, und dann ist:

$$l_, = \pm \mu l, \text{ wo } \mu = \frac{86400'' \pm \tau}{86400''},$$

wo τ in Zeitsecunden ausgedrückt ist, und $+\tau$ die Voreilung, dagegen $-\tau$ die Verspätung des Chronometers gegen Sternzeit in 24 Sternstunden oder in einem Sterntage ausgedrückt. Die gesuchte Reduction erhält man am bequemsten, wenn man in unserer Formel statt f den Werth μf setzt.

Hat man auf diese Weise alle Seitenfäden auf den Mittelfaden reducirt, so muss man diesen Mittelfaden auf den grössten Kreis des Instruments reduciren, wobei man ganz genau so, wie bei der Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden verfahren kann, indem man nur anstatt $F_,$ oder $f_,$ die Werthe C oder c in die Formel einsetzt, wo C der in Bogensecunden oder c der Zeitsecunden ausgedrückte Collimationsfehler der Hauptgesichtslinie des Fernrohrs ist, welche durch den verticalen Mittelfaden bestimmt wird.

Zeitbestimmung durch Beobachtungen am Durchgangsinstrumente.

1) Aufstellung des Instruments im Meridian.

122. Hierzu muss man vorzugsweise Sterne beobachten; denn Sonnenbeobachtungen sind weniger vortheilhaft. Wir wollen annehmen, dass die Beobachtungen des Sterns schon auf den Mittelfaden reducirt sind, und dass der Kreis, den die durch diesen Mittelfaden bestimmte Gesichtslinie bei der Drehung des Fernrohrs an der Himmelskugel beschreibt, östlich vom grössten Kreise des Instruments um den Bogen $C = 15\,c$ absteht. Der östliche Abstand dieses grössten Kreises vom Zenithe sei gleich dem Bogen $J = 15\,i$, sein Abstand vom sichtbaren Weltpole dagegen $= N = 15\,n$; ferner wollen wir annehmen, dass die Polhöhe nördlich, und dass endlich $M = 15\,m$ und $A = 15\,a$ ist, wo A das Azimuth von Norden nach Osten gezählt wird. Da alle diese Bögen sehr klein sind, wenn das Instrument dem Meridiane nahe aufgestellt ist, so können wir anstatt der Sinusse und Tangenten ihre Bögen selbst setzen, und erhalten auf diese Weise aus § 116, S. 312:

$$n = i\sin\varphi + a\cos\varphi,\ \text{oder}\ a = n\sec\varphi - i\,tg\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a),$$
$$m = i\sec\varphi - n\,tg\,\varphi = i\cos\varphi - a\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b),$$
$$\alpha = s + c\sec\delta + n\,tg\,\delta + m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c),$$

wo s die Sternzeit zur Zeit der Beobachtung bedeutet, und i positiv ist, wenn das westliche Ende der Umdrehungsachse des Fernrohrs höher als das östliche ist; denn $J = 15\,i$ drückt die Neigung dieser Achse gegen den Horizont aus.

Drückt man m und n in der Formel (c) durch a und i aus, so ist:

$$m = i\cos\varphi - a\sin\varphi$$
$$\alpha = s + c.\sec\delta + i.\cos(\delta - \varphi)\sec\delta + a.\sin(\delta - \varphi)\sec\delta \quad . \quad (d).$$

Die letzte Formel rührt von Tobias Mayer her; die Formel (c) dagegen, welche jetzt allgemein gebraucht wird, wurde zuerst von Bessel entwickelt.

Die oben angeführte Formel bezieht sich auf die obere Culmination, oder auf denjenigen Fall, wenn der Stern durch den Meridian über dem sichtbaren Pole des Aequators durchgeht; die Circumpolarsterne kann man aber auch noch in ihrer unteren Culmination durch den Meridian beobachten, wenn die Sternzeit $= \alpha + 12$ Stunden ist; alsdann aber ist die scheinbare Bewegung der Sterne entgegengesetzt, d. h. von Westen nach Osten, und sie erreichen daher in diesem Falle den grössten Kreis des Instruments, welcher östlich vom Pole des Aequators absteht, später als den Meridian selbst. Da der erwähnte Kreis, der dem Mittelfaden entspricht, aber auch östlich vom grössten Kreise des Instruments absteht, so erreichen die Sterne diesen kleinen Kreis noch später als den grössten Kreis, und weil m sich nicht ändert, da es nicht von der Lage des Sterns abhängt, so hat man also für die untere Culmination:

$$\alpha + 12^h = s - c \sec\delta - n \operatorname{tg}\delta + m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$

oder wenn man $z_{,} = 180° - \delta - \varphi$ setzt, so ist:

$$\alpha + 12^h = s - c \sec\delta - i \cos z_{,} \sec\delta - a \sin z_{,} \sec\delta \quad . \; . \; . \quad (f)$$

Diese Gleichungen kann man unmittelbar aus (c) und (d) ableiten, wenn man statt α und δ die Werthe $\alpha + 12^h$ und $180° - \delta$ setzt.

Den Werth i bestimmt man vermittelst des Niveaus; den Collimationsfehler c des verticalen Mittelfadens aber findet man durch Umlegung des Instruments in seinen Lagern; der Werth n endlich wird unmittelbar aus den Beobachtungen der Antritte zweier Sterne durch den Mittelfaden abgeleitet. Es seien α und δ die gerade Aufsteigung und Abweichung eines Sterns, als er am Mittelfaden zur Chronometerzeit k beobachtet wurde; es seien ferner α', δ' und k' dieselben Werthe für einen zweiten Stern;

nimmt man nun an, dass zur Zeit der Beobachtungen des ersten Sterns die Sternzeit $s = k + u$ war, bei der Beobachtung des zweiten aber $s' = k' + u + \triangle u$, wo $\triangle u$ die Zahl von Secunden ausdrückt, um welche sich das Chronometer im Laufe der Zeit $k' - k$ gegen Sternzeit verspätet, so erhält man:

$$a = k + u + c \sec\delta + n\, tg\, \delta + m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g)$$
$$a' = k' + u + \triangle u + c \sec\delta' + n\, tg\, \delta' + m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g')$$

Berechnet man hierauf die Werthe:

$$p = k + c \sec\delta,\; p' = k' + c \sec\delta'$$

so folgt:

$$n = \frac{(a' - a) - (p' - p) - \triangle u}{tg\, \delta' - tg\, \delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (h)$$

Wenn der erste Stern in der oberen, der zweite aber in der unteren Culmination beobachtet wurde, so erhält man:

$$P = k - c \sec\delta,$$
$$n = \frac{(a' - a - 12^h) - (p' - P) - \triangle u}{tg\, \delta' + tg\, \delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (h')$$

Die Declination δ' ist positiv, wenn das Gestirn sich auf derselben Seite des Aequators wie der sichtbare Weltpol befindet.

Hieraus ersieht man, dass, wenn die Sterne gut bestimmt sind, man n leicht aus den Beobachtungen zweier Sterne berechnen kann, von denen der eine nahe dem Aequator, der andere aber nahe am Pole ist, oder noch besser durch die Beobachtung zweier Circumpolarsterne, von denen der eine in der oberen, der andere aber in der unteren Culmination sich befindet. Je schneller die Beobachtungen dieser beiden Sterne aufeinander folgen, um so genauer wird n bestimmt werden, weil man dann unabhängiger wird von einem Fehler im Gange der Uhr und von der Veränderlichkeit des Instruments. Aus n und i kann man leicht, vermittelst der Gleichung (a), den Werth von a finden.

123. Hat man die Werthe c, i und n gut bestimmt, so kann man leicht die Uhrcorrection u herleiten, welche man zu k hinzulegen muss, um die Sternzeit s zu erhalten; denn aus Gleichung (g) findet man, mit Hülfe von (b):

$$u = a - k - c \sec\delta - n \operatorname{tg}\delta + n \operatorname{tg}\varphi - i \sec\varphi \quad . \; . \; . \; . \quad (i)$$

welche Formel besonders dann anwendbar ist, wenn man viele Beobachtungen angestellt hat, während deren Dauer n und i sich nicht verändert haben.

Aus der letzten Gleichung ersieht man, dass ein Fehler in n und i auf die Glieder, welche von φ abhängen, um so grösseren Einfluss hat, je grösser die Breite φ des Beobachtungsorts ist.

An jedem beliebigen Orte der Erdoberfläche hängt die genaue Zeitbestimmung vorzugsweise von der Genauigkeit der Werthe i, c und n oder a ab. In jetziger Zeit verfertigt man jedoch so ausgezeichnete Niveaus, dass es kaum möglich ist, einen merklichen Fehler bei ihrem Gebrauche in der Bestimmung des Werthes i vorauszusetzen; den Collimationsfehler findet man mit hinreichender Genauigkeit durch Umlegung des Instruments, und die Erfahrung lehrt, dass er bei einem gut eingerichteten Instrumente während der Dauer einiger Wochen beständig bleibt; wenn daher der Beobachter sein Instrument sehr vorsichtig umlegt, so kann angenommen werden, dass während des kurzen Zeitraumes der Beobachtungen der Collimationsfehler unveränderlich bleibt. Wenn man ferner in beiden Lagen des Instruments beobachtet, so wird ein kleiner Fehler in c, sowie eine nicht genaue Kenntniss der verschiedenen Dicke der Zapfen und der Durchbiegung der horizontalen Umdrehungsachse, in beiden Lagen des Instruments entgegengesetzten Einfluss ausüben; und daher alle diese Fehlerquellen zusammengenommen, auf das mittlere Resultat, welches aus entgegengesetzt gelegenen Beobachtungen hergeleitet wird, keine merkliche Wirkung hervorbringen. Hat man dagegen keine feste tägliche und nächtliche

Meridianmarke, so wird man sich nicht leicht von der Unveränderlichkeit des Azimuths a oder des von ihm abhängigen Werthes n überzeugen können, aber der hieraus entstehende Fehler kann sehr oft einen bedeutenden Einfluss auf die Genauigkeit der Zeitbestimmung selbst haben. Man sieht aber aus den Gleichungen (i) und (e), dass, wenn die Declination δ gleich der Breite des Orts φ ist, alsdann alle Glieder, welche von n oder a in dem Ausdrucke der Uhrcorrection abhängen, sogleich verschwinden. Hieraus folgt, dass man zur zuverlässigsten Zeitbestimmung vorzugsweise solche Sterne in beiden Lagen des Instruments beobachten muss, deren Declinationen gleich (oder doch wenig verschieden von) der Breite des Orts sind; indem man ferner, zur Untersuchung von a oder n, mit diesen Beobachtungen eine Beobachtung des Polarsterns verbindet.

124. Bleibt das Azimuth constant, und geht die Neigung i in i' über, so wird der Werth von n sich in n' verwandeln, den man nach folgender Gleichung berechnen kann:

$$n' = n + (i' - i) \sin\varphi.$$

Uebrigens kann man in diesem Falle zur Bestimmung der Uhrcorrection folgende bequeme Gleichung brauchen:

$$u = a - k - c \sec\delta - i \cos(\delta - \varphi) \sec\delta - a \sin(\delta - \varphi) \sec\delta;$$

für einen anderen Stern hat man:

$$u = a' - k' - \Delta u - c \sec\delta' - i \cos(\delta' - \varphi) \sec\delta' - a \sin(\delta' - \varphi) \sec\delta'.$$

Man berechnet daher:

$$q = k + c \sec\delta + i \cos(\delta - \varphi) \sec\delta,$$
$$q' = k' + c \sec\delta' + i' \cos(\delta' - \varphi) \sec\delta',$$

folglich:

$$a = \frac{(\alpha' - \alpha) - (q' - q) - \Delta u}{\sin(\delta' - \varphi) \sec\delta' - \sin(\delta - \varphi) \sec\delta} = \frac{[(\alpha' - \alpha) - (q' - q) - \Delta u]}{\cos\varphi \sin(\delta' - \delta) . \sec\delta' \sec\delta}.$$

Wenn der Stern, auf welchen sich α und δ bezieht, sich in der unteren Culmination befindet, so hat man:

$$z_{,} = 180^\circ - \varphi - \delta; \; Q = k - c \sec\delta - i \cos z_{,} \sec\delta;$$

folglich:

$$a = \frac{(\alpha' - \alpha - 12^h) - (q' - Q) - \Delta u}{\sin(\delta' - \varphi) \sec\delta' + \sin z_{,} \sec\delta} = \frac{(\alpha' - \alpha - 12^h) - (q' - Q) - \Delta u}{\cos\varphi \sin(\delta' + \delta) . \sec\delta' \sec\delta}.$$

Hat man eine gute Meridianmarke aufgestellt, auf welche man immer, des Tags und des Nachts, das Fernrohr richten kann, und will man das Azimuth a dieser Marke genau bestimmen, so muss man zwei Circumpolarsterne, A und B, wählen, deren gerade Aufsteigungen nahezu um 12 Stunden verschieden sind, so dass, wenn der Stern A sich in der oberen Culmination befindet, der andere B bald vorher oder nachher in die untere kömmt. Man beobachtet alsdann in einer Lage des Instruments den Stern A in der oberen und den Stern B in der unteren Culmination. Beinahe 12 Stunden nachher legt man die Horizontalachse des Fernrohrs um, und nachdem die Absehenslinie in die frühere Richtung mit Hülfe der Marke gebracht worden ist, beobachtet man wieder die beiden Sterne; man wird dann den Durchgang des Sterns B durch den oberen Theil und den Durchgang des Sterns A durch den unteren Theil des Meridians bestimmen können. Aus diesen Beobachtungen lässt sich nun das Azimuth der Marke für jede Lage des Instruments berechnen, und die Mittelzahl aus den Resultaten wird den genauen Werth des Azimuths, unabhängig von den constanten Fehlern des Instruments und von den Fehlern in den geraden Aufsteigungen der Sterne, und nahezu frei von dem Fehler des Chronometergangs geben.

In dem weiter unten folgenden Beispiele werden wir eine einfache Methode angeben, vermittelst welcher man in der Praxis, aus vielen angestellten Beobachtungen von Sternen, den Chronometerfehler mit hinreichender Genauigkeit berechnen kann.

Wenn der Beobachter glaubt, dass das Fernrohr des Instruments sein Azimuth nicht geändert hat, so kann er die wahrscheinlichsten Correctionen der angenommenen Werthe für u, c und a bestimmen, indem er Bedingungsgleichungen formirt und diese nach der Methode der kleinsten Quadrate auflöst; diese Auflösungsart findet man in der Abhandlung von Struve erläutert, die den Titel führt: Expédition chronométrique éxecutée en 1843 entre Pulkowa et Altona, p. 72. 73.

125. Anstatt des Durchgangsinstruments kann man auch hierzu das Universalinstrument anwenden. In diesem Falle bestimmt man den Collimationsfehler c, welcher immer sehr klein sein wird, ganz ebenso: nämlich aus der Vergleichung von Beobachtungen, welche in beiden Lagen des Instruments angestellt wurden. Da aber namentlich kleinere Instrumente dieser Art sich bei dem geringsten Anstossen während des Umlegens der Achse leicht im Azimuth verstellen, so kann es unter Umständen wünschenswerth sein, das Instrument zur Beobachtung der Sterndurchgänge in zwei entgegengesetzten Lagen der Horizontalachse, durch Umdrehung derselben um 180° um die Verticalachse, anzuwenden. Da es immer ungewiss bleibt, ob man wirklich ganz genau um 180° gedreht hat, so muss man annehmen, dass das Azimuth des Fernrohrs in beiden Lagen des Instruments etwas verschieden ist. Um also den Collimationsfehler c und die Uhrcorrection zu bestimmen, beobachtet man in jeder Lage des Instruments zwei Sterne, nämlich einen, der sich nahe am Pole, und einen andern, der sich nahe am Aequator befindet. Wir wollen z. B. voraussetzen, dass in der einen Lage zwei Sterne, deren Declination δ' und δ sind, wo δ' einem Sterne in der Nähe des Pols des Aequators entspricht, in ihrer oberen Culmination beobachtet werden; ist alsdann c unbekannt, so können wir vorläufig $c = 0$ annehmen und mit dieser Annahme die Grössen n und a berechnen; die so gefundenen Werthe von n und a werden aber unrichtig sein, und es mögen Δn und Δa die ihnen entsprechenden Correctionen ausdrücken, so

dass $n + \triangle n$ und $a + \triangle a$ die wahren Werthe von n und a sein werden, wo $\triangle n$ und $\triangle a$ von c abhängen. Setzt man alsdann:

$$B = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta' + \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta)},$$

so wird:

$$\triangle n = -\frac{c(\sec\delta' - \sec\delta)}{tg\,\delta' - tg\,\delta} = -c\,.\,B$$

und

$$\triangle a = \frac{-c(\sec\delta' - \sec\delta)}{\sin(\delta' - \varphi)\sec\delta' - \sin(\delta - \varphi)\sec\delta} = -\frac{cB}{\cos\varphi}.$$

Wenn man daher bei der Berechnung von n und und a den Werth c vernachlässigt, so wird dadurch in der Uhrcorrection u ein Fehler $\triangle u = -c\sec\delta\,(1 - D)$ entstehen, wo

$$D = \frac{\sin(\delta - \varphi)}{\cos\varphi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta' + \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\delta' - \delta)} \text{ ist.}$$

Wir wollen jetzt annehmen, dass man (c gleich Null vorausgesetzt) in der ersten Lage des Instruments durch die beiden erwähnten Sterne die Uhrcorrection $= u'$, in der zweiten Lage des Instruments aber aus zwei anderen Sternen, deren Declinationen δ'' und δ''' sind, die Uhrcorrection $= u''$ gefunden hätte, wo δ''' einem Sterne in der Nähe des Pols des Aequators entspricht. Wenn wir den Gang des Chronometers als bekannt annehmen, so kann man u' und u'' auf eine und dieselbe Epoche, oder im allgemeinen auf die Zeit der Mitte der Beobachtungen reduciren; da nun die Vernachlässigung von c auf diese Werthe von u' und u'' entgegengesetzten Einfluss ausübt, so erhält man:

$$u' - u'' = c\,\{\sec\delta\,(1 - D) + \sec\delta''(1 - D')\},$$

wo $$D' = \frac{\sin(\delta'' - \varphi)}{\cos\varphi} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta''' + \delta'')}{\cos \frac{1}{2}(\delta''' - \delta'')} \text{ ist.}$$

Der Unterschied $u' - u''$ ist aus den vorhergehenden Berechnungen bekannt, man wird also aus obiger Gleichung den Collimationsfehler c leicht finden können. Der wahre Werth der Uhrcorrection wird alsdann $= u' + \Delta u'$ oder $u'' + \Delta u''$ werden. Wenn einer von den Sternen in der Nähe des Pols in der unteren Culmination sich befinden sollte, so wird man anstatt seiner Declination die Ergänzung der Declination zu 180° setzen müssen.

126. Hat man den Rand der Sonne beobachtet und die Beobachtungen an allen Fäden auf den Mittelfaden reducirt, so kann man zur Bestimmung von u folgenden Ausdruck gebrauchen:

$$u = \alpha\odot - k - c(1+\lambda) \sec\delta \mp \frac{h(1+\lambda)}{15 \cos\delta} - \\ -(n \operatorname{tg}\delta - n \operatorname{tg}\varphi + i \sec\varphi)(1+\lambda),$$

wo $\alpha\odot$ die wahre gerade Aufsteigung des Sonnencentrums und δ seine Declination zur Zeit der Beobachtung bezeichnet; $\alpha\odot$ ist in Zeit ausgedrückt, und λ ist die in Zeit ausgedrückte Zunahme der wahren geraden Aufsteigung der Sonne in einer Sternzeit-Secunde; h endlich ist der in Bogen ausgedrückte, wahre Winkelhalbmesser der Sonne. Das Zeichen (—) wird gebraucht, wenn man den ersten oder westlichen Rand der Sonne beobachtet, das Zeichen (+) dagegen, wenn der zweite oder östliche Rand beobachtet wird.

127. In den astronomischen Ephemeriden findet man die geraden Aufsteigungen und Abweichungen der Sterne, mit Rücksicht auf Präcession, Nutation, jährliche Aberration und eigene Bewegung schon auf den scheinbaren Ort reducirt; aber um die genauen scheinbaren geraden Aufsteigungen zu erhalten, muss man ferner noch die Wirkung der täglichen Aberration in Betracht ziehen und diese zu dem scheinbaren Orte der Ephemeride zulegen, um den wirklichen scheinbaren Ort zu erhalten; wir erreichen aber ganz dasselbe Resultat, wenn wir von der beobachteten Zeit des Durchgangs des Sterns durch den Meridian

diese Correction, welche sehr nahe $= 0^s{,}021 \cos\varphi \sec\delta$ in Zeit ist, abziehen. Am einfachsten ist es, sie dadurch in Rechnung zu bringen, dass man den in Zeit ausgedrückten Werth:

$$c' = c - 0^s{,}021 \cos\varphi$$

statt des wirklichen Collimationsfehlers $= c$ bei der Reduction der Beobachtungen anwendet.

128. Aus dem Vorhergehenden kann man nun folgende praktische Regeln für die genaue Zeitbestimmung durch das Durchgangsinstrument aufstellen.

Nachdem man das Instrument berichtigt und nahe im Meridiane aufgestellt hat, muss man symmetrisch in beiden Lagen des Instruments beobachten und jedesmal notiren, in welcher Lage der Verticalkreis am Ende der Umdrehungsachse (Ost oder West) sich befand. Also wird man, wenn z. B. zuerst der Verticalkreis im Osten war,

in der ersten Lage des Instruments (Kr. Ost)

1) die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse mit Hülfe des Niveaus bestimmen;
2) einen oder einige gut bestimmte Sterne, deren Declinationen nicht gar zu gross sind, aber vorzüglich solche, die in der Nähe des Zeniths sind, beobachten;
3) die Neigung der Umdrehungsachse durch das Niveau ablesen;
4) den Durchgang eines gut bestimmten, in der Nähe des Pols gelegenen Sterns durch die beiden ersten Verticalfäden des Instruments beobachten;
5) die horizontale Umdrehungsachse des Instruments umlegen,

und

in der zweiten Lage des Instruments (Kr. West)

1) den Durchgang eben desselben in der Nähe des Pols gelegenen Sterns durch die übrigen Fäden des Instruments

beobachten, welche er vermöge der scheinbaren täglichen Bewegung passiren wird;

2) die Neigung der Umdrehungsachse durch das Niveau ablesen;
3) einige vom Pole entfernte, in der Nähe des Zeniths gelegene Sterne beobachten, und endlich
4) wiederum die Neigung der Umdrehungsachse am Niveau ablesen.

Je rascher die Beobachtungen auf einander folgen, um so genauer wird das Resultat sein. Ist man im Besitz einer guten Meridianmarke, so kann man sich leicht vor jeder Beobachtung eines Sterns, von der Unveränderlichkeit der Lage des Instruments in Beziehung auf das Azimuth überzeugen.

Beispiel. Im Jahre 1843 wurden zu Kronstadt, um den Gang und den Stand des Chronometers Haut No. 19 zu bestimmen, einige Beobachtungen an einem Durchgangsinstrumente angestellt. Das Chronometer blieb damals in einem Sterntage um $0^s,68$ gegen Sternzeit zurück. Die nördliche Breite des Beobachtungsorts $= 59° 59',5 = \varphi$; ein Theil des Niveaus $= 0^s,113$ in Zeit; die von der Ungleichheit der Zapfen abhängige Correction $x = \pm 0^s,140$ in Zeit, wo (—) dann gebraucht werden muss, wenn das Kreisende der horizontalen Umdrehungsachse des Instruments nach Osten, dagegen das Zeichen (+), wenn das Kreisende nach Westen gerichtet war. Die folgenden Fädenintervalle beziehen sich in der Ordnung, wie sie gegeben sind, auf die obere Culmination, als das Kreisende der Achse im Westen war:

$$+ 34^s,40;\ + 18^s,74;\ - 16^s,14;\ - 33^s,33 \text{ in Zeit.}$$

Bei den unten angeführten Beobachtungen bezeichnet (i) die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse, wie sie unmittelbar an dem Niveau abgelesen wurde; i dagegen die wahre, wegen der Zapfenungleichheit verbesserte Neigung. *O. N.* bezeichnet, dass beim Nivelliren das Fernrohr horizontal lag und

sein Objectiv nach Norden gerichtet war; *O. S.* bezeichnet, dass es nach Süden gerichtet war, und endlich bezeichnen *A* und *B* die entgegengesetzten Lagen, die das Niveau bei seiner Umlegung einnahm.

Beobachtungstag: Der 22. August 1843.

Erste Lage des Instruments (Kr. Ost):

	im Osten	im Westen		
Neigung der Umdrehungs-	*A* . 18,6	. . . 22,2	(i)	$= +0^s{,}21$
achse am Niveau abgelesen	*B* . 18,3	. . . 22,4	x	$= -0{,}14$
(*O. N.*)			i	$= +0^s{,}07$

Durchgang des Sterns in der oberen Culmination durch die Fäden:

	I	II	III	IV	V	Mittel auf den Mittelfaden reducirt
	m s	m s	m s	s	s	h m s
α Cassiopeae . .	55,1	25,8	30 54,5	27,4	55,2	0 30 54,31
γ Cassiopeae . .	26,5	0,0	46 33,0	10,1	41,6	0 46 32,91
α Ursae Min. . . .	41 19,0	52 4,0	— —	—	—	1 2 11,20

	im Osten	im Westen		
Neigung der Umdrehungs-	*B* . 18,1	. . . 22,6	(i)	$= +0^s{,}26$
achse am Niveau (*O. S.*)	*A* . 18,0	. . . 22,7	x	$= -0{,}14$
abgelesen.			i	$= +0^s{,}12$

Nach der Umlegung: Zweite Lage des Instruments (Kr. West):

	I	II	III	IV	V	Auf den Mittelfaden reducirtes Mittel
α Ursae Minoris	—	—	$2^m\ 45^s{,}0$	$12^m\ 49^s{,}0$	$23^m\ 33^s{,}0$	$1^h\ 2^m\ 42^s{,}53$

		im Osten	im Westen	
Neigung der Umdrehungs-achse am Niveau (*O. S.*) abgelesen.		*B* . 21,1	. . . 19,7	$(i) = -0^s,13$
		A . 22,0	. . . 18,8	$x = +0,14$
				$i = +0^s,01$

δ *Cassiopeae*	$45^s,8$	$16^s,3$	$14^m\ 53^s,2$	$25^s,0$	$58^s,9$	$1^h\ 14^m\ 53^s,27$

		im Osten	im Westen	
Neigung der Umdrehungs-achse am Niveau (*O. N.*) abgelesen.		*A* . 22,0	. . . 18,8	$(i) = -0^s,17$
		B . 21,9	. . . 19,0	$x = +0,14$
				$i = -0^s,03$

α *Arietis*	$59^s,9$	$17^s,0$	$57^m\ 37^s,4$	$54^s,8$	$13^s,5$	$1^h\ 57^m\ 37^s,31$

		im Osten	im Westen	
Neigung der Umdrehungs-achse am Niveau (*O. S.*) abgelesen.		*B* . 21,5	. . . 19,9	$(i) = -0^s,14$
		A . 22,4	. . . 18,9	$x = +0,14$
				$i = -0^s,00$

Scheinbare Oerter der Sterne für die obere Culmination am 22. August 1843.

Bezeichnung der Sterne.	Sch. *AR* oder α	Sch. Decl. oder δ
α *Cassiopeae*	$0^h\ 31^m\ 43^s,05$	55° 40′ 45″
γ *Cassiopeae*	0 47 21,88	59 52 6
α *Ursae minoris*	1 3 49,15	88 28 25,5
δ *Cassiopeae*	1 15 40,81	59 25 9
α *Arietis*	1 58 24,05	22 43 20

Die mittleren Oerter von γ und δ *Cassiopeae* wurden aus dem Kataloge von Pond entnommen, und auf den scheinbaren Ort mit Hülfe des Nautical Almanacs reducirt, aus welchem die übrigen Sterne entlehnt sind.

Berechnung dieser Beobachtungen.

Aus den bemerkten Durchgängen von *a Ursae minoris* in beiden Lagen des Instruments findet man (§ 64. S. 154) $c = \pm 0^s,31$, (+) wenn der Kreis im Osten, (—) wenn er im Westen war.

In der ersten Lage des Instruments, Kreis im Osten

$c = +0^s,31$; $c' = c - 0^s,021 \cos\varphi$
$c' = +0,30$; $i = +0,10$

In der zweiten Lage des Instruments, Kreis im Westen

$c = -0^s,31$; $c' = -0^s,32$
$i = -0,01$

Berechnung der Werthe $p = k + c' \sec\delta$:

für *α Urs. min.* $1^h\ 2^m\ 22^s,48 = p'$
α Cassiopeae $0\ 30\ 54,84 = p$
$p' - p = 0\ 31\ 27,64$
Gang des Chronometers $\Delta u = +\ 0,01$
$p' - p + \Delta u$
$= 0\ 31\ 27,65$
$\alpha' - \alpha = 0\ 32\ \ 6,10$
$\alpha' - \alpha - (p' - p)$
$- \Delta u = +38,45$
$n = \frac{+38^s,45}{tg\,\delta' - tg\,\delta} = +\frac{38,45}{36,01}$
oder $n = +\ 1,068$
$m = -1^s,07\, tg\,\varphi + 0,10 \sec\varphi$
oder $m = -\ 1,65$

für *α Urs. min.* $1^h\ 2^m\ 30^s,50 = p'$
α Arietis . . $1\ 57\ 36,96 = p$
$p' - p = -0\ 55\ \ 6,46$
Gang des Chronometers $\Delta u = -\ 0,02$
$p' - p + \Delta u$
$= -0\ 55\ \ 6,48$
$\alpha' - \alpha = -0\ 54\ 34,90$
$\alpha' - \alpha - (p' - p)$
$- \Delta u = +31,58$
$n = \frac{+31^s,58}{tg\,\delta' - tg\,\delta} = +\frac{31,58}{37,05}$
oder $n = +\ 0,852$
$m = -0^s,85\, tg\,\varphi - 0,01 \sec\varphi$
oder $m = -\ 1,50$

Man kann nun alle Beobachtungen auf eine Epoche, oder auf $1^h\ 7^m$ Chronometerzeit, welche ungefähr der Mitte der Beobachtungen entspricht, reduciren; bezeichnet man daher den Gang des Chronometers zwischen der Zeit $1^h\ 7^m$ und den Beobachtungszeiten durch $\Delta(u)$, so wird die reducirte Uhrzeit des Meridiandurchgangs für jeden Stern nach der Formel

$$R = k + c' \sec\delta + n\, tg\,\delta + m + \Delta(u)$$

zu berechnen sein.

Da das Chronometer sich gegen Sternzeit verspätete, so muss der Werth von $\Delta(u)$, zu den Beobachtungszeiten, welche der Epoche $1^h\ 7^m$ folgen, hinzugefügt, dagegen von denen, die dieser Epoche vorangehen, abgezogen werden; auf diese Weise erhält man:

für α *Cassiopeae*	γ *Cassiopeae*	δ *Cassiopeae*	α *Arietis*
$R = 0^h 30^m 54^s,74$	$0^h 46^m 33^s,70$	$R = 1^h 14^m 52^s,60$	$1^h 57^m 35^s,86$
$\alpha = 0\ 31\ 43,05$	$0\ 47\ 21,88$	$\alpha = 1\ 15\ 40,81$	$1\ 58\ 24,05$
$(u)' = +0^m 48^s,31$	$+\ 0^m 48^s,18$	$(u)'' = +0^m 48^s,21$	$+\ 0^m 48^s,19$

Folglich war die wahrscheinliche Uhrcorrection um $1^h\ 7^m$ Chronometerzeit

$$(u) = \tfrac{1}{2}\,[(u)' + (u)''] = +\,0^m 48^s,22.$$

Der Grad der Genauigkeit des Werthes (u) hängt vorzüglich von der Zuverlässigkeit der Bestimmungen von n und c ab. Aber da wir vorzüglich Sterne in der Nähe des Zeniths gewählt haben, so kann n auf die Zeitbestimmung nur sehr geringen Einfluss haben, und die Verschiedenheit in $(u)'$ und $(u)''$ kann daher hauptsächlich nur von dem angenommenen Werthe von c herrühren; nimmt man daher an, dass die wahre Grösse von c gleich $c + \delta c$ ist, so entstehen folgende Bedingungsgleichungen:

$(u)' - 2^s,038\,\delta c = (u)'' + 2^s,373\,\delta c$; oder $+\,0^s,035 = 3^s,84\,\delta c$; hieraus folgt $\delta c = +\,0^s,009$; $c = +\,0^s,319$.

Berechnet man das Azimuth a, so erhält man ganz ähnliche Resultate, und findet in der ersten Lage des Instruments, als der Kreis im Osten war, das Azimuth $a = +\,1^s,96$ in Zeit, aber in der zweiten Lage, als der Kreis im Westen war, $a = +\,1^s,72$; das Mittel hieraus ist $a = +\,1^s,84$ in Zeit, oder $27'',6$ in Bogen.

Wenn wir den Collimationsfehler nicht gekannt hätten, oder mit einem Instrumente beobachtet hätten, bei welchem man zwar den oberen beweglichen Theil des Instruments um 180° im Azimuth drehen, dagegen aber die horizontale Umdrehungsachse nicht umlegen konnte, so könnten wir leicht diesen Fehler nach der im § 125, S. 331 auseinandergesetzten Methode berechnen. Wenden wir daher diese Methode auf die Beobachtungen von α *Cassiopeae* und α *Ursae minoris* in der ersten Lage des Instruments, und auf α *Ursae minoris* und α *Arietis* in der zweiten Lage des Instruments an, indem wir hierbei n

zuerst in der Annahme $c = 0$, mit Rücksicht auf tägliche Aberration berechnen, so wird:

für die erste Lage

$$n = +\frac{49^s{,}01}{36^s{,}01} = 1^s{,}37$$

$$m = -2^s{,}069$$

für die zweite Lage

$$n = +\frac{20^s{,}39}{37^s{,}07} = 0^s{,}55$$

$$m = -0^s{,}974.$$

Also für $1^h\,7^m$ Chronometerzeit:

$$u' = +0^m\,48^s{,}87 \qquad u'' = +0^m\,47^s{,}47$$

$$D = -0{,}149 \qquad D' = +1{,}189$$

$$u' - u'' = c\,[sec\,\delta\,(1-D) + sec\,\delta''\,(1-D')]$$

oder $1^s{,}40 = 4^s{,}411\,.\,c$, oder $c = 0^s{,}32$;

welcher Werth sehr wenig von dem früher gefundenen verschieden ist.

Sollte das Chronometer sehr nahe nach mittlerer Zeit gehen, so berechnet man den Durchgang des Gestirns aus den Beobachtungen bei seiner Meridianpassage, und verwandelt darauf die gerade Aufsteigung des Gestirns, welche der geraden Aufsteigung des Meridians entspricht, in mittlere Zeit, wodurch man leicht die Correction des Chronometers gegen mittlere Zeit erhält.

2) Zeitbestimmung aus dem Durchgange eines Sterns durch den Vertical des Polarsterns.

129. In allen astronomischen Ephemeriden, den Nautical-Almanac selbst nicht ausgenommen, ist der scheinbare Ort einer nur kleinen Anzahl in der Nähe des Pols gelegener Sterne angegeben, so dass man zuweilen lange warten muss, bis einer dieser Sterne den Meridian passirt. Wenn daher die Aufstellung des Instruments im Meridiane nicht sehr zuverlässig ist, so ist es besser nicht im Meridiane selbst, sondern in dem Verticale des Polarsterns zu beobachten; wobei alsdann die genäherte Breite des Orts und die ungefähre Chronometercorrection als bekannt vorausgesetzt werden; jedoch kann der Fehler in ersterer 1 bis 2′ in Bogen, und in letzterer 1^m in Zeit betragen.

Um die Beobachtungen aber vorzubereiten, muss man sich

eine kleine Ephemeride anfertigen, welche, wenigstens genähert, das Azimuth und die Zenithdistanz des Polarsterns von 10^m zu 10^m oder 20^m zu 20^m in Zeit während des ganzen Zeitraums angiebt, in welchem man die Beobachtungen zu machen beabsichtigt. Hierauf berechnet man genähert die Zeit, wenn ein anderer gewählter Stern nahezu in demselben Verticale mit dem Polarsterne (*α Ursae minoris*) sein wird. Es seien α und δ die scheinbare gerade Aufsteigung und Abweichung des vom Pole entfernteren Sterns, dagegen α' und δ' dieselben Grössen für den Polarstern. Die obere Culmination des ersten dieser beiden Sterne wird zur Sternzeit $= \alpha$ stattfinden, wenn daher zu dieser Zeit das Azimuth des Polarsterns $= A$, ist, so erhalten wir in der Annahme, dass die Breite des Orts $= \varphi$ ist, sehr nahezu:

$$\sin 15\tau = \sin A, \sin(\varphi - \delta) \sec \delta,$$

worin der in Zeit ausgedrückte Stundenwinkel τ den Stundenwinkel des vom Pole entfernteren Sterns, wenn sein Azimuth $= A$, ist, bedeutet. Wenn der Polarstern sich im Osten des Meridians befindet, so wird ein Stern dessen Declination $\delta < \varphi$ im Westen des Meridians sein, und umgekehrt, wenn der eine im Westen ist, wird der andere im Osten sein. Da nun das Azimuth des Polarsterns immer klein ist (bei einer Breite von 60° sogar ist es kaum 3°) und sich sehr langsam ändert, so kann man folglich genähert annehmen, dass zur Sternzeit $= \alpha \pm \tau$ der Stern sich nahe in einem und demselben Verticale mit dem Polarsterne befinden wird; (+) wird gebraucht, wenn der Polarstern im Osten, (—), wenn er im Westen des Meridians ist. Zu dieser Zeit kann man die Zenithdistanz eines südlich vom Zenithe culminirenden Sternes $= \varphi - \delta$ annehmen, denn sie wird wenig von der Meridian-Zenithdistanz verschieden sein.

Stellt man bei Zeiten das Instrument mit Hülfe des Niveaus (§ 51, S. 109) auf, so kann man etwa 5 Minuten vor der Zeit $\alpha \pm \tau$ mit der Beobachtung des Polarsterns anfangen; bei der

geringen Bewegung des Polarsterns im Azimuthe, kann man das Fernrohr so richten, dass im Laufe von 1 oder 2 Minuten nach der Zeit $(a \pm \tau) - 5^m$, der Polarstern an den Mittel-Verticalfäden des Fernrohrs tritt*), in dieser Lage stellt man das Instrument durch die Schrauben fest. Damit die Beobachtung nicht zu lange dauert, schreibt man nur den Durchgang des Polarsterns durch den Mittelverticalfaden auf, und richtet gleich nachher das Fernrohr in der Zenithdistanz $\varphi - \delta$ auf den zweiten gewählten Stern, dessen Durchgang man aber an allen Verticalfäden beobachtet, wozu nicht viel Zeit nöthig ist; endlich liest man die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse am Niveau ab. Besser ist es sogar ihre Neigung zwei Mal zu bestimmen, zuerst nämlich sogleich nach der festen Aufstellung des Instruments in einem unveränderlichen Azimuthe für die darauf folgende Beobachtung des Polarsterns, und nachher zum zweiten Male nach Beendigung der Beobachtung des zweiten Sterns. Man kann auch mit diesem Durchgange des Polarsterns noch die Beobachtung einiger anderer Sterne, die rasch auf einander folgen, verbinden, jedoch besteht die Hauptregel darin, dass man in beiden Lagen des Instruments beobachtet, um wo möglich dadurch constante Fehler, wozu namentlich die unrichtig angenommene Grösse des Collimationsfehlers, die Ungleichheit der Zapfen und dergleichen mehr gehören, im mittleren Resultate gänzlich zu beseitigen. Hat man daher eine vollständige Reihe von Beobachtungen in der ersten Lage des Instruments angestellt, so legt man die horizontale Umdrehungsachse um, oder, wenn dieses nicht möglich sein sollte,

*) Um dieses bequem bewerkstelligen zu können, berechnet man sich vorläufig die Anzahl von Zeitminuten nach Formel (11), § 118, S. 320, die der Polarstern gebraucht, um vom Seitenfaden nach dem Mittelfaden zu gelangen. Alsdann kann man leicht nach dem Augenmasse schätzen, wie man das Fernrohr in Beziehung auf den Polarstern zu richten hat, damit er nach ein oder zwei Minuten in Zeit den Mittelverticalfaden erreicht.

so dreht man den oberen beweglichen Theil des Instruments um 180° im Azimuthe, und stellt in dieser zweiten Lage eine neue Beobachtungsreihe an.

Aus ähnlichen Betrachtungen, wie wir § 123, S. 328 angestellt haben, lässt sich leicht schliessen, dass ebenso wie dort, so auch hier es vortheilhaft ist, besonders Sterne in der Nähe des Zeniths mit dem Polarsterne zu vergleichen.

130. Wenn der Polarstern allein an dem Mittelfaden beobachtet wird, so muss man besonders darauf achten, die Minute und Secunde des Durchgangs richtig aufzuschreiben; sonst ist ein Versehen von einer ganzen Zeitminute schwer zu entdecken. Durch Zufall kann das Fernrohr so eingestellt werden, dass das Zeitintervall zwischen den Antritten des Polarsterns und des andern Sterns entweder grösser oder kleiner wird, als es für das Gelingen der Beobachtungen nöthig ist. Um diesem vorzubeugen und eine bequeme Controlle zu gewähren, hat Hr. Döllen, Astronom in Pulkowa, vorgeschlagen, das gewöhnliche Fadennetz im transportabeln Durchgangsinstrumente mit einem beweglichen Verticalfaden in Verbindung mit einem Filarmikrometer zu versehen. Der Werth einer Umdrehung der Mikrometerschraube, welche den Faden fortrückt, ist leicht zu ermitteln, indem man zuerst diesen Faden in Coincidenz mit dem Mittelfaden des Netzes bringt, dabei die Angabe des Index an dem Kopfe der Mikrometerschraube abliest, und dann den beweglichen Faden in eine solche Distanz vom Mittelfaden bringt, welche vier oder fünf vollen Umdrehungen der Mikrometerschraube entspricht. Lässt man in der Nähe des Meridians einen in der Nähe des Weltpols befindlichen Stern mehreremal durch den Mittelfaden und den beweglichen Faden durchgehen, so kann man den gegenseitigen Fadenabstand auf dieselbe Weise berechnen, wie bei dem Gebrauch des Durchgangsinstruments die Fädenabstände gefunden werden. Alsdann kann man auch den Werth eines Schraubenumganges in Zeitsecunden ausdrücken.

Um die Chronometercorrection sicher und bequem zu be-

stimmen, beobachtet man in beiden Lagen des Instruments und im Verticale des Polarsterns die Durchgänge eines Aequatorialsterns oder noch besser eines Zenithsterns durch alle Fäden des Netzes; kurz vor- oder nachher wird der bewegliche Faden zwei oder dreimal auf den Polarstern genau eingestellt und jedesmal die Zeit der Einstellung, die Seite, auf welcher sich der bewegliche Faden vom Mittelfaden befand, und die Lage des Index auf dem Kopfe der Mikrometerschraube notirt. Hat man ausserdem noch die Coincidenz des beweglichen Fadens mit dem Mittelfaden des Netzes bestimmt, d. h. die Angabe des Index am Schraubenkopfe abgelesen, wenn der bewegliche Faden mit dem Mittelfaden zusammenzufallen scheint, so hat man alles, was zur Berechnung des Abstands des beweglichen Fadens vom Mittelfaden bei jeder Einstellung auf den Polarstern nöthig ist. Meistens wird es möglich sein, die Zeit jeder Einstellung auf die Zeit des Durchgangs des Polarsterns durch den Mittelfaden zu reduciren und auf diese Weise so viele Durchgänge desselben zu erhalten, als Einstellungen gemacht wurden. Die einzige Ausnahme kommt nur dann vor, wenn zur Zeit der Beobachtungen der Polarstern sich sehr nahezu im Verticale seines grössten, östlichen oder westlichen Azimuths befindet.

In allem übrigen wird so verfahren, wie wir auseinandergesetzt haben.

131. Wir wollen jetzt die Regeln zur Berechnung der Beobachtungen näher erläutern.

Es sei $A_{,}$ das genäherte bekannte Azimuth des Fernrohrs, positiv gezählt, wenn es nördöstlich, dagegen negativ, wenn es nordwestlich ist, so haben wir mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen:

$$\sin N_{,} = \sin A_{,} \cos\varphi; \; \sin M_{,} = -tg\, N' \,tg\,\varphi,$$

wo $N_{,}$ und $M_{,}$ wenige Grade betragen werden.

Es sei c der in Zeit ausgedrückte Collimationsfehler, so folgt für den Polarstern:

$$\sigma_{,} = \frac{c}{\cos\delta_{,} \cos N_{,} \cos\left(M_{,} + s_{,}^{\circ} - \alpha_{,}^{\circ} - \frac{15}{2}\sigma_{,}\right)}$$

wo $s_{,}^{\circ}$ die genäherte bekannte Sternzeit der Beobachtung des Polarsterns ist, welche ebenso wie $\alpha_{,}^{\circ}$ in Graden ausgedrückt wird; c ist positiv, wenn der Kreis, den der Mittelfaden beschreibt, östlich von dem mit ihm parallelen grössten Kreise des Instruments absteht. Diese Reduction kann nur dann unmöglich werden, wenn der Polarstern in der Nähe eines grössten Azimuths ist.

Die Reduction der Seitenfäden auf den mittleren in Sternzeit beim zweiten Sterne geschieht bequem vermittelst der folgenden Formel:

$$l = \frac{(f)}{\cos\delta \cos N \cos(M + s^{\circ} - \alpha^{\circ} - \frac{15}{2} l};$$

wo δ die Declination, und α° die in Graden ausgedrückte gerade Aufsteigung des Sterns zur Sternzeit s bedeutet; s° ist ebenfalls in Graden ausgedrückt. Nehmen wir der Kürze wegen $l = \frac{(f)}{\Theta}$ an, wo (f) der in Zeit ausgedrückte Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden ist, welcher einerlei Zeichen mit l hat; so können wir bei der Berechnung von Θ zunächst für l einen genäherten Werth annehmen, welcher der in Sternzeit ausgedrückten Differenz der beobachteten Durchgänge des Sterns durch die Seiten- und Mittelfäden gleich ist, und darauf l genauer berechnen. Man erhält dann l in Secunden nach Sternzeit; es bleibt dann nur noch übrig, den Werth von l in Secunden des Chronometers zu verwandeln, indem man für l die Grösse μl setzt, wo $\mu = \frac{24^h - \zeta}{24^h}$, und ζ die Zahl von Secunden ist, um welche sich das Chronometer in 24^h oder in einem Sterntage gegen Sternzeit verspätet.

Wir wollen nun annehmen, dass das auf den Mittelfaden reducirte arithmetische Mittel der Durchgänge des Sterns an

allen Fäden, nach Chronometerzeit $= k$ sei, und berechnen alsdann für diesen Stern den Werth $\sigma = \frac{c}{\Theta}$. Es sei k' die Chronometerzeit des Antritts des Polarsterns an den Mittelfaden; setzt man nun:

$$p' = k' + \sigma,$$
$$p = k + \sigma$$

und bezeichnet durch $k' + u - \Delta u$ und $k + u$ die Sternzeiten, welche den Chronometerzeiten k' und k entsprechen, so wird u die Uhrcorrection zur Chronometerzeit k, und Δu die Verspätung des Chronometers gegen Sternzeit im Laufe der Zeit $k - k'$ ausdrücken. Bezeichnet man ferner die wahre östliche Entfernung des grössten Kreises des Instruments vom Pole des Aequators durch N, und die wahre östliche Entfernung des Culminationspunkts des Aequators von diesem grössten Kreise durch M, so erhält man durch Verwandlung der Zeiten p', p, u und Δu in Bogen die entsprechenden Grössen P', P, U und ΔU, und mit Hülfe der Gleichung (5) § 116, S. 312 die folgenden Relationen:

$$0 = -\sin N \sin \delta - \cos N \cos \delta \sin (M + P + U - \alpha^\circ) \quad . \quad . \quad (a)$$
$$0 = -\sin N \sin \delta_{,} - \cos N \cos \delta_{,} \sin (M + P' + U - \Delta U - \alpha'^\circ),$$

welche Gleichungen man folgendermassen umformen kann:

$$\operatorname{cotg} N . \sin (\alpha^\circ - P - M - U) = \operatorname{tg} \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$
$$\operatorname{cotg} N . \sin (\alpha_{,}^\circ - P' + \Delta U - M - U) = \operatorname{tg} \delta_{,} \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Setzt man nun $D = \alpha_{,}^\circ - \alpha^\circ - (P' - P) + \Delta U \quad . \quad . \quad . \quad (A)$, so lässt sich D aus den gegebenen Grössen leicht berechnen; führt man die Unbekannte $X = \alpha^\circ - P - M - U$ in die Gleichungen (b) und (c) ein, so wird:

$$\operatorname{cotg} N . \sin X = \operatorname{tg} \delta; \quad \operatorname{cotg} N \sin (X + D) = \operatorname{tg} \delta',$$

oder $$\sin X : \sin (X + D) = \operatorname{tg} \delta : \operatorname{tg} \delta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d).$$

Es sei . . . . . . $\eta = tg\,\delta . cotg\,\delta'$,
$$\sin\psi = \eta . \cos D;$$

aus der Gleichung (d) erhält man:

$$tg\,X = \frac{\eta \sin D}{1-\eta \cos D} = \frac{\eta . \sin D}{2 \sin^2 (45^\circ - \frac{1}{2}\psi)},$$

woraus man bequem X mit fünfstelligen Logarithmen berechnen kann. Der Winkel ψ ist positiv, wenn $\cos D$ positiv; und negativ, wenn $\cos D$ negativ ist; jedenfalls muss er numerisch klein sein. Der Winkel N ist ebenfalls klein und lässt sich aus der Gleichung

$$tg\,N = \sin X . cotg\,\delta$$

bestimmen.

Da bekannt ist, auf welcher Seite des Meridians die Beobachtungen angestellt wurden, so wird man nicht ungewiss sein können, ob der Werth von N positiv oder negativ ist; bezeichnet man nun durch J die Zahl von Bogensecunden, um welche das westliche Ende der Umdrehungsachse höher als das östliche liegt, so kann man M durch folgende Formel finden:

$$\sin M = \frac{\sin J}{\cos N \cos \varphi} - tg\,\varphi\, tg\,N,$$

wo J immer einen sehr kleinen Winkel bedeutet.

Am bequemsten bestimmt man M, wenn man zuerst

$$\sin (M) = -tg\,\varphi . tg\,N$$

berechnet, und darauf:

$$M = (M) + \frac{J}{\cos\varphi \cos N \cos (M)} \text{ setzt.}$$

Aus X und M finden wir sogleich $U = a^\circ - P - M - X$.

Verwandelt man alsdann das in Graden ausgedrückte U in Zeit $= u$, so wird u den Chronometerfehler gegen Sternzeit zur Chronometerzeit k bezeichnen, welcher zu k hinzugelegt werden muss, um Sternzeit zu erhalten.

132. Wir wollen jetzt die Uhrcorrection berechnen, wenn der Collimationsfehler c zwar unbekannt, aber die Beobachtungen in beiden Lagen des Instruments angestellt wurden.

Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) betrachten wir den Fall, wenn das Azimuth des vom mittleren Verticalfaden bei der Drehung des Instruments um seine horizontale Achse beschriebenen, immer nahezu mit einem verticalen Kreise zusammenfallenden Kreises kleiner ist als das grösste Azimuth, welches der Polarstern erreichen kann, so dass der Polarstern am Mittelfaden selbst oder am beweglichen Seitenfaden beobachtet werden kann und es möglich ist, die Zeit des Durchgangs durch den Mittelfaden zu reduciren;

2) werden wir die Rechnungsart angeben für denjenigen Fall, in welchem die erwähnten Voraussetzungen nicht zutreffen.

Erster Fall.

Da $C = 15c$ stets eine sehr kleine Grösse ist, so wird es am einfachsten sein, zuerst in der Annahme $c = 0$ nach der gezeigten Methode u und u' zu berechnen, und darauf den Einfluss dieser Vernachlässigung von c auf den Uhrfehler u zu bestimmen. Wenn c unbekannt ist, so muss man nämlich in dem Vorhergehenden statt P und P' die Werthe K und K' gebrauchen, wo K und K' die in Graden ausgedrückten Chronometerzeiten k und k' bezeichnen. Nimmt man an, dass $C = 15c$ eine positive Grösse ist, so hat man aus Gleichung (5) § 116, S. 312:

$$\sin C = -\sin N \sin\delta - \cos N \cos\delta \sin(M + K + U - \alpha^{\circ});$$
$$\sin C = -\sin N \sin\delta_{,} - \cos N \cos\delta_{,} \sin(M + K + U - \Delta U - \alpha_{,}^{\circ});$$

Es sei $X = \alpha^{\circ} - K - M - U$; $X' = \alpha_{,}^{\circ} - K' + \Delta U - M - U$, $D = \alpha_{,}^{\circ} - \alpha^{\circ} - (K' - K) + \Delta U = X' - X$. Es seien ferner n, m, x und x' die Werthe, welche N, M, X und X' annehmen, wenn $c = 0$ gesetzt wird; wir erhalten dann die Gleichungen:

$$\sin X = tg\,N\,tg\,\delta + \sin C \sec N \sec \delta$$
$$\sin X' = tg\,N\,tg\,\delta' + \sin C \sec N \sec \delta'$$
$$\sin x = tg\,N\,tg\,\delta;\ \sin x' = tg\,N\,tg\,\delta' \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha).$$

Setzen wir

$$N - n = dn,\ M - m = dm,$$
$$X - x = dx,\ X' - x' = dx',$$

so sind, wegen der Kleinheit von C auch dn, dm, dx und dx' kleine Grössen, so dass man

$$\left.\begin{array}{l} dx = tg\,\delta \cos x \cos^2 n\, dn + c \sec n \sec \delta \sec x, \\ dx' = tg\,\delta' \cos x' \cos^2 n\, dn + c \sec n \sec \delta' \sec x' \end{array}\right\} \quad . \quad (\beta)$$

annehmen kann. Da $D = X' - X$ ist, und D eine gegebene, von der Rechnung unabhängige Grösse bezeichnet, so ist die Veränderung von D gleich Null; und differentiiren wir den Ausdruck $D = X' - X$, so kommt . . . $0 = dx' - dx$, oder $dx' = dx$. Die Gleichung

$$\sin x = tg\,N . tg\,\delta$$

gehört einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, dessen Hypothenuse $90° - \delta$, eine der Katheten $= n$, und der Winkel zwischen dieser Kathete und der Hypothenuse $= 90° - x$ ist. Bezeichnen wir die Seite, welche dem Winkel $90° - x$ gegenüberliegt, durch $90° - w$, so ist

$$\sin w = \sin \delta \sec n,\ \cos w = \cos \delta \cos x \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Wenn w' eine ähnliche Bedeutung in Bezug auf den Polarstern hat, wie w in Bezug auf den andern Stern, so ist auch

$$\sin w' = \sin \delta' \sec n,\ \cos w' = \cos \delta \cos x' \quad . \quad . \quad (\gamma').$$

Da aber $dx = dx'$ ist, so erhält man aus den Gleichungen (β), in Folge von (γ) und (γ'):

$$dn . \sin (w' - w) = - c . (\cos w - \cos w').$$

Nun ist

$$\sin M = \sin J \sec N \sec \varphi - tg\,\varphi\, tg\,N,$$
$$\sin m = \sin J \sec n \sec \varphi - tg\,\varphi\, tg\,n;$$

weil aber J nur wenige Secunden beträgt, auch N nicht $1°30'$ übersteigt, so kann man $\sin J\,dn$ vernachlässigen und annehmen

$$dm = M - m = -tg\,\varphi\,sec\,m\,.\,cos^2 n\,.\,dn.$$

Setzen wir im Ausdrucke von dx [Gleich. (β)] statt dn seinen Werth, so kommt

$$dx = -c\,\frac{(\cos w - \cos w')\,tg\,w}{\cos n \sin(w'-w)} + \frac{c}{\cos n\,.\cos w}$$
$$= c\,\frac{(\sin w' - \sin w)}{\cos n \sin(w'-w)}.$$

Machen wir

$$\frac{tg\,\varphi}{\cos n\,.\cos m} = tg\,\Phi,$$

so ist

$$du = -dx - dm = -c\,\frac{(\sin w' - \sin w)}{\cos n \sin(w'-w)} - \frac{c\,.\,tg\,\Phi\,.(\cos w - \cos w')}{\cos n \sin(w'-w)},$$

oder

$$du = -c\,\frac{\cos\left(\frac{w'+w}{2} - \Phi\right)}{\cos n\,.\cos\Phi\,.\cos\frac{1}{2}(w'-w)}\,; \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Dieser elegante Ausdruck ist von Hansen gegeben (Astronomische Nachrichten, Vol. XLVIII, S. 120).

Die Rechnung wird immer leicht sein, denn die Logarithmen der Werthe, die darin vorkommen, sind zum Theil aus der früheren Berechnung von u in der Annahme $C = 0$ bekannt; man braucht dabei nur vierstellige Logarithmen.

In der zweiten Lage des Instruments erhält C das entgegengesetzte Zeichen; findet man daher in dieser neuen Lage des Instruments, unter der Voraussetzung, dass $C = 0$ ist, die Uhrcorrection $= u'$, so wird $\delta u'$ die Verbesserung dieses Werthes unter dieser Annahme bezeichnen; ist alsdann ω die Verspätung des Chronometers gegen Sternzeit in dem Zeitraume zwischen den Beobachtungen in der ersten und zweiten Lage des Instruments und drückt man C, u, u' und ω in Zeit aus, so wird:

$$\delta u' - \delta u + \omega = u' - u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Nun ist $u'-u$ aus der Berechnung von u' und u in der Annahme $C=0$ bekannt, ebenso auch ω, und daher wird C leicht zu bestimmen sein; ferner drückt $u+\delta u$ die genaue Uhrcorrection mit Rücksicht auf den Collimationsfehler aus.

Wünscht man die tägliche Aberration in Rechnung zu ziehen, so braucht man nur zur geraden Aufsteigung des Sterns die Correction $+0^s{,}021 \cos\varphi \cos(s-\alpha) \sec\delta$ in Zeit zu addiren oder, was einerlei ist, eben so viel von dem beobachteten Durchgange des Sterns abzuziehen; bei der Declination muss man die Correction $+0'',31 \cos\varphi \sin(s-\alpha) \sin\delta$ in Bogen hinzufügen; s bedeutet hierbei die Sternzeit der Beobachtung in Graden ausgedrückt.

Beispiel. Am 17. August 1843 wurden zu Kronstadt folgende Beobachtungen angestellt; (J) ist die unmittelbar am Niveau abgelesene Neigung der Horizontalachse, (ξ) die Correction derselben wegen der Ungleichheit der Zapfen, beide in Bogensecunden ausgedrückt. Ein Theil des Niveaus war $1'',70$ in Bogen, $\xi = \pm 2'',1$ in Bogen.

Erste Lage des Instruments, oder Kreisende im Westen.

	im Osten	im Westen	in Bogen
Neigung der Umdrehungsachse am Niveau abgelesen.	A . 12,0	. . . 27,0	$(J) = +7'',8$
	B . 17,8	. . . 21,2	$(\xi) = +2\ ,1$
			$J = +9'',9$

Durchgang der Sterne nach dem Chronometer Haut No. 19, durch die Fäden:

	I	II	III	IV	V
α Ursae minoris . . .	— —	—	$17^h\ 23^m\ 10^s{,}0$	—	—
β Draconis	$38^s{,}0$	$3^s{,}9$	17 28 35 ,0	$1^s{,}4$	$29^s{,}3$

	im Osten	im Westen	im Bogen
Neigung der Umdrehungsachse am Niveau abgelesen.	B . 18,0	. . . 21,0	$(J) = +7'',4$
	A . 12,4	. . . 26,8	$(\xi) = +2'',1$
			$J = +9'',5$

Zweite Lage des Instruments, oder Kreisende im Osten.

	im Osten	im Westen	in Bogen
Neigung der horizontalen Umdrehungsachse am Niveau abgelesen.	*A* . 18,4	. . . 21,0 (J)	$= +3'',5$
	B . 17,4	. . . 23,1 (ξ)	$= -2'',1$
			$J = +1'',4$

Durchgang der Sterne durch die Fäden:

	I	II	III	IV	V
α Ursae minoris . . .	—	—	$17^h\ 52^m\ 45^s,5$	—	—
γ Draconis	$8^s,1$	$35^s,8$	17 55 1 ,4	$31^s,6$	$57^s,1$

	im Osten	im Westen	in Bogen
Neigung der horizontalen Umdrehungsachse am Niveau abgelesen.	*B* . 16,2	. . . 23,6 (J)	$= +4'',5$
	A . 18,3	. . . 21,5 (ξ)	$= -2'',1$
			$J = +2'',4$

Die Verspätung des Chronometers gegen Sternzeit in einem Sterntage $= 1^s,72$; also $\mu = \frac{24^h - 1^s,72}{24^h}$ beinahe $= 1$. Die Fädenintervalle waren gleich:

$$+34^s,0,\ +18^s,74,\ -16^s,14,\ -33^s,33$$

und beziehen sich auf die obere Culmination und Kreisende West.

Für das Datum der Beobachtungen findet man aus dem Nautical-Almanac für 1843 die folgenden scheinbaren Oerter der Sterne:

	AR	Nördliche Declination
α Ursae minoris . . .	$1^h\ 3^m\ 45^s,70$ . .	$88^\circ 28' 24'',2$
β Draconis	17 26 55 ,73 . .	52 25 25 ,5
γ Draconis	17 53 0 ,35 . .	51 30 51 ,0

Die genäherte Correction der Chronometerangabe war $= +0^h\ 0^m,7$, welche man zur Chronometerzeit zulegen muss, um die entsprechende Sternzeit zu erhalten. Aus zahlreichen

Beobachtungen fand man den Collimationsfehler $c = \pm 0^s,33$ in Zeit; wobei (+) sich auf die obere Culmination und Kreisende östlich, dagegen (—) sich auf die obere Culmination und Kreisende westlich bezieht, d. h. im ersten Falle geht der Stern durch den Mittelfaden früher, aber im zweiten Falle später als durch den grössten Kreis, welcher senkrecht auf der Umdrehungsachse steht. Die nördliche geographische Breite des Beobachtungsorts ist $= 59°59',5 = \varphi$. Mit Hülfe der genäherten Uhrcorrection findet man, dass die Sternzeit bei der ersten Beobachtung des Polarsterns $= 17^h 23^m,8$ war; zu dieser Zeit war das nordöstliche Azimuth des Polarsterns $= 2°44'$; bei der zweiten Beobachtung des Polarsterns war die Sternzeit $= 17^h 53^m,5$, sein Azimuth $= 2°52'$.

Berechnet man nun hiermit N und M genähert nach den Formeln:

$$\sin N = \cos\varphi \sin A\,;\ \sin M = -\frac{\sin\varphi}{\cos N}\sin A$$

so findet man für die erste Beobachtung $N = +1°22'$; $M = -2°21'$; für die zweite $N = +1°26'$; $M = -2°29'$.

Bei der Beobachtung von *β Draconis*, als das Kreisende westlich war, findet man die Wirkung des Collimationsfehlers, oder $\sigma = \frac{c}{\Theta} = -0^s,55$; die Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfaden sind $+56^s,59$; $+30^s,75$; $-26^s,50$; $-54^s,70$. Daraus erhält man:

Durchgang durch den Mittelfaden:

für *β Draconis*

	$17^h 28^m 34^s,59$
	$34,65$
	$35,00$
	$34,90$
	$34,60$
Mittel $k =$	$17^h 28^m 34^s,76$
$\sigma =$	$-0,55$
tägl. Aberration $=$	$-0,02$
$p =$	$17^h 28^m 34^s,19$

für *α Ursae minoris*

$k' =$	$17^h 23^m 10^s,0$
$\sigma =$	$+26,7$
tägl. Aberration $=$	$+0,2$
$p_{,} =$	$17^h 23^m 36^s,9$

$D = -16^h 18^m 12^s,74 = -244°33'11'',1$

Die Correction der Declination des Polarsterns wegen täglicher Aberration war gleich $-0'',14$, und daher seine scheinbare Declination $\delta' = 88°28'24'',06$; die Correction der Declination des zweiten Sterns ist verschwindend.

$lg\,sin\,D = 9{,}95568$	$lg\,tg\,\beta = 9{,}74695_n$	$= lg\,tg\,\delta\,cos\,D$
$lg\,tg\,\delta = 0{,}11382$	$\beta = -29°\,10'\,46''$	$M = -2°\,20'\,48'',0$
$lg\,cos\,D = 9{,}63313_n$	$\delta_, = +88\;28\;24$	$X = +1\;45\;54\;,7$
$lg\,sin\,D\,tg\,\delta = 0{,}06950$	$\delta_, - \beta = 117\;39\;10$	$M + X = -0°\,34'\,53'',3$
$lg\,cos\,\delta = 8{,}42557$	$lg\,sin X = 8{,}48861$	$= -0^h\;2^m 19^s,55$
$lg\,cos\,\beta = 9{,}94106$	$lg\,tg\,\delta = 0{,}11382$	$\alpha - p = +0\;\;1\;38,46$
$lg\,sin(\delta_, - \beta) = 9{,}94732_n$	$lg\,tg\,N = 8{,}37479$	$U = +0^h\;0^m 41^s,09$
$lg\,tg\,X = 8{,}48881$	$lg\,tg\,\varphi = 0{,}23841$	
$X = +1°\,45'\,54'',7$	$lg\,sin(-M) = 8{,}61320$	
$N = +1\;21\;28\;,0$	$(M) = -2°\,21'\,7'',4$	
$J = +0\;\;0\;\;9\;,7$		

$$J\,sec\,\varphi\,sec\,N\,sec(M) = +19'',4$$
$$M = -2°\,20'\,48'',0$$

Folglich finden wir aus der Beobachtung von *β Draconis* und *α Ursae minoris*, als der Kreis im Westen war, den Chronometerfehler $U = +0^h 0^m 41^s 09$.

Als der Kreis im Osten war, erhielt man für den Stern *γ Draconis*: $\delta = \frac{c\mu}{\Theta} = +0^s,54$ in Zeit, die Reductionen der Seitenfäden auf den Mittelfaden sind in diesem Falle:

$$+53^s,59;\; +25^s,93;\; -30^s,13;\; -55^s,32.$$

Hieraus erhalten wir die Durchgänge durch den Mittelfaden folgendermassen:

	für *γ Draconis*
	$17^h\,55^m\,1^s,69$
	1 ,73
	1 ,40
	1 ,47
	1 ,78
Mittel aus allen =	$17^h\,55^m\,1^s,61$
σ	+0 ,54
Tägliche Aberration =	−0 ,02
p =	$17^h\,55^m\,2^s,13$

	für *α Ursae minoris*
	$17^h\,52^m\,45^s,5$
σ′	−36 ,1
Tägliche Aberration	+ 0 ,2
p′ =	$17^h\,52^m\,9^s,6$

Führt man die Rechnung auf ganz ähnliche Weise wie vorher, so erhält man:

$N = +1°\,25'\,57'',7$; $X = +1°\,48'\,9'',6$; $J = +1'',9$; $M = -2°\,28'\,51'',2$; $U' = +0^h\,0^m\,40^s,98$ in Zeit.

Da das Chronometer sich gegen Sternzeit um ungefähr $0^s,03$ in Zeit, in einer halben Stunde verspätete, so sollte eigentlich u' grösser als u werden; dass es hier aber kleiner wird als u, rührt von einem zufälligen Fehler der Beobachtungen, und von einer Ungenauigkeit in dem angenommenen Werthe von c her. Der wahrscheinlichste Fehler des Chronometers war daher um $17^h 42^m$ gleich $+41^s,03$ in Zeit.

Wir wollen jetzt die Uhrcorrection in der Annahme berechnen, dass c unbekannt sei, und nur den Einfluss der täglichen Aberration in Betracht ziehen. Für die erste Lage des Instruments, als das Kreisende im Westen war, findet man:

$$n = +1°21'23'',0;\ x = +1°45'48'',3;\ m = -2°20'39'',1$$
$$x' = -242°40'30'' \text{ oder } = +117°19'30''$$
$$u = a - K - (m - x) = +40^s,37 \text{ in Zeit.}$$
$$\delta = +52°25',4;\ \delta' = +88°28',4;\ \varphi = 59°59',5;$$
$$w = 52°26',7;\ w' = 90°42',2;\ \Phi = 60°1',3.$$

$$\log\cos\left(\frac{w+w'}{2} - \Phi\right) = 9{,}99112$$
$$\log\sec n \sec\Phi = 0{,}30144$$
$$0{,}29256$$
$$\log\cos\tfrac{1}{2}(w' - w) = 9{,}97533$$
$$\text{Differenz} \ldots = 0{,}31723$$
$$\text{Num.} \ldots = +2{,}076;\ \delta u = -2{,}076 . c.$$

Für die zweite Lage des Instruments, als das Kreisende im Osten war, wird man finden:

$$n = +1°26'2'',5;\ x = +1°48'16'',1;\ m = 2°28'59'',7$$
$$u' = a - K - (m - x) = +41^s,67 \text{ in Zeit.}$$

Hieraus erhellt, dass der Collimationsfehler c positiv in der zweiten Lage des Instruments sein wird, und nach Formel (δ) § 132, S. 350 findet man, dass $\delta u = +2{,}076\,c$, für die erste Lage des Instruments und ebenso, dass $\delta u' = -2{,}084\,c$,

für die zweite Lage des Instruments war; da nun der verstrichene Zwischenraum zwischen den Beobachtungen ungefähr 26^m in Zeit war, so wird die Verspätung des Chronometers gegen Sternzeit $= 0^s,03 = \omega$ sein, folglich kann man nun c selbst aus folgender Gleichung bestimmen:

$$\delta u - \delta u' + \omega = u' - u \text{ oder } 4{,}160 . c = + 1^s,27;$$

mithin:

$$c = 0^s,305 \text{ in Zeit; } u + \delta u = + 41^s,00; \; u' + \delta u' = + 41^s,03.$$

Daher war die Uhrcorrection um $17^h 42^m$ gleich $41^s,015$, welche sehr nahe mit der früher gefundenen übereinstimmt.

Zweiter Fall.

133. Die Antritte der vom Pol entfernten Sterne können jedenfalls auf den Durchgang durch den Mittelfaden reducirt werden; wenn aber der Polarstern an einem Seitenfaden beobachtet wurde, oder der bewegliche Verticalfaden auf den Polarstern eingestellt war, so ist es nicht immer möglich, die Reduction auf den Mittelfaden auszuführen; im allgemeinen kann man auf folgende Weise zum Ziele kommen.

Es sei F der Winkelabstand des Mittelfadens von demjenigen Seitenfaden, durch welchen man den Durchgang eines vom Pol entfernten Sterns beobachtet hat; F' der Abstand des Mittelfadens von dem Seiten- oder beweglichen Faden, an welchem der Polarstern beobachtet wurde, C der Collimationsfehler der optischen Achse. Betrachten wir F und F' als positiv, wenn der Seiten- oder bewegliche Faden im Osten vom Mittelfaden sich befindet, und C positiv, wenn die Projection des Mittelfadens auf der Himmelskugel östlich von dem Verticalkreise liegt, welcher senkrecht auf der horizontalen Achse des Instruments liegt; setzen ferner:

$$X = a - T - U - M; \; D = a' - a - (T' - T + \Delta U)$$

und behalten im Uebrigen die oben angewandten Bezeichnungen, so kommt

$$\sin(C+F) = -\sin N \sin \delta + \cos N \cos \delta \sin X,$$
$$\sin(C+F') = -\sin N \sin \delta' + \cos N \cos \delta' \sin(X+D).$$

Nehmen wir

$$B = (C+F')\sin\delta - (C+F)\sin\delta'$$

an, so ist

$$\frac{B}{\cos N} = \cos\delta' \sin\delta \sin D \cos X -$$
$$-(\sin\delta' \cos\delta - \cos\delta' \sin\delta \cos D)\sin X.$$

Es sei

$$h \sin H = \cos\delta' \sin\delta \sin D,$$
$$h \cos H = \sin\delta' \cos\delta - \cos\delta' \sin\delta \cos D,$$
$$\cos\Theta = \operatorname{cotg}\delta' \operatorname{tg}\delta \cos D;$$

wir erhalten dann:

$$\operatorname{tg} H = \frac{\cos\Theta \operatorname{tg} D}{2\sin^2 \frac{1}{2}\Theta}, \quad h = \frac{\sin\delta' \cos\delta . 2\sin^2 \frac{1}{2}\Theta}{\cos H}$$
$$\frac{B \sin 1''}{h \cos N} = \sin(H-X);$$

da F, F' und C kleine Winkel bedeuten, kann man auch

$$X = H - \frac{B}{h \cos N}$$

schreiben. Der Winkel Θ gehört dem ersten Quadranten an, wenn $\cos D$ positiv ist, und dem zweiten, wenn $\cos D$ negativ ist; H ist positiv oder negativ, je nachdem $\sin D$ positiv oder negativ ist.

Die Uhrcorrection muss noch vor dem Beginn der Beobachtungen beiläufig, bis auf etwa eine Minute bekannt sein, weil sonst die Beobachtungen nicht angestellt werden können; das genäherte nordöstliche Azimuth $A°$ des Instruments lässt sich hieraus leicht berechnen und auch der entsprechende Werth

von N aus der Gleichung $\sin N^\circ \cos\varphi . \sin A^\circ$ ableiten. Da N nicht $1^\circ 23'$ übersteigt, so kann man $\log\cos N^\circ$ statt des $\log\cos N$ anwenden; der Fehler wird kaum eine Einheit der fünften Decimale betragen; die Rechnung von X ist dann sehr bequem. Hat man X gefunden, so werden N, M, U und A wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} tg\,N' &= cotg\,\delta' \sin(X+D), & N &= N' - \frac{(C+F')\cos N'}{\sin\delta'}, \\ \sin M' &= -\,tg\,\varphi\,tg\,N, & M &= M' + \frac{J}{\cos\varphi\cos N\cos M'}, \\ \sin A' &= \frac{\sin N}{\cos\varphi}, & A &= A' - \frac{J.tg\,\varphi}{\cos A}, \\ U &= a - T - M - X \text{ in Bogen.} \end{aligned}$$

Hier ist J die Neigung der Umdrehungsachse, positiv, wenn das westliche Ende der Achse das höhere ist.

Auf dieselbe Weise lassen sich die Beobachtungen sowohl in einer Lage, als auch in der anderen Lage des Instruments berechnen; man braucht nur in der zweiten Lage $-C$ anzunehmen, wenn in der ersten $+C$ angenommen wurde.

Es ist hier vorausgesetzt, dass bei der Beobachtung beider Sterne die Neigung J unveränderlich dieselbe bleibt; dies wird aber nicht immer der Fall sein. Es sei z die Zenithdistanz des vom Pol entfernten Sterns, J die Neigung der Achse bei der Beobachtung dieses Sterns, J' die Neigung bei Beobachtung des Polarsterns. Wenn man zur Zeit des Durchgangs des vom Pol entfernten Sterns die Correction

$$\frac{1}{15}\,\frac{(J'-J)\cos z}{\sqrt{\cos(\delta-N)\cos(\delta+N)}}$$

addirt, so erhält man die Zeit des der Neigung J' entsprechenden Durchgangs. Die übrige Rechnung wird gemacht mit J' statt J.

Wenn die Antritte eines vom Pol entfernten Sterns an allen oder an mehreren Verticalfäden des Netzes beobachtet sind

und C bekannt ist, so wird es vortheilhaft sein, diese Antritte auf den Mittelfaden zu reduciren und darauf vom Collimationsfehler zu befreien, also statt F eine solche Zeit anzunehmen, wie man sie erhalten hätte, wenn $c = 0$ gewesen wäre. In diesem Falle verwandelt sich B in $(C + F') \sin \delta$ und man hat

$$X = H - \frac{(C + F') \operatorname{tg} \delta . \cos H}{\sin \delta' 2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta . \cos N^{\circ}}.$$

Gewöhnlich ist der Collimationsfehler C sehr klein; ist er unbekannt, so rechnet man zuerst in der Annahme, dass $C = 0$ ist; wenn die Beobachtungen in beiden Lagen des Instruments gemacht sind, so kann man am leichtesten C bestimmen und die genauen Werthe von U und A ableiten nach den Rechnungsvorschriften, welche Hansen vorgeschlagen hat, wie wir oben erwähnt haben.

Wenn der bewegliche Faden mehrere Mal in jeder Lage des Instruments auf den Polarstern eingestellt war, so kann man aus der Verbindung der Beobachtungen eines vom Pole entfernten Sterns mit jeder Einstellung des beweglichen Fadens auf den Polarstern die Werthe von U und A ableiten; die Uebereinstimmung der Resultate wird die Unveränderlichkeit des Instruments im Azimuthe beweisen. Es ist aber einfacher, die mittleren Bestimmungen direct zu erhalten, nach der von Bessel in den Astronomischen Nachrichten, Bd. VI gegebenen Rechnungsart.

Es mögen T', T'', ... $T^{(\sigma)}$ die in Bogen ausgedrückten Uhrzeiten der in derselben Lage des Instruments gemachten Einstellungen des beweglichen Fadens auf den Polarstern bezeichnen; t', t'', ... $t^{(\sigma)}$ die correspondirenden Stundenwinkel dieses Sterns; F', F'', ... $F^{(\sigma)}$ die Abstände des beweglichen Fadens vom Mittelfaden des Netzes. Es sei ferner die Mittelzahl

$$\frac{T' + T'' + \ldots + T^{(\sigma)}}{\sigma} = K$$

und U, $U+\triangle u'$, $U+\triangle u''$ u. s. w. die in Bogen ausgedrückten Uhrcorrectionen zu den Zeiten K, T', T'' u. s. w. Sind α' und δ' die scheinbare Rectascension und Declination des Polarsterns, so wird

$$t' = \alpha' - T' - U - \triangle U', \; t'' = \alpha'' - T'' - U - \triangle U'' \text{ u. s. w.}$$

Nehmen wir . . . $\tau = \alpha' - K - U$,

$$l' = K - T' - \triangle U', \quad l'' = K - T'' - \triangle U'' \text{ u. s. w.}$$

an, so bedeutet τ den Stundenwinkel des Polarsterns zur Zeit K; l' l'' u. s. w. sind die in Sternzeit ausgedrückten und in Bogen verwandelten Intervalle zwischen T' und K, T'' und K u. s. w.; sind σ solcher Intervalle vorhanden, so muss

$$\Sigma l = l' + l'' + \ldots . \, l^{(\sigma)} = 0$$

sein; man hat auch

$$t' = \tau + l', \; t'' = \tau + l'', \ldots . \, t^{(\sigma)} = \tau + l^{(\sigma)}.$$

Irgend einem l in der Reihe l', l'', ... $l^{(\sigma)}$ entspricht der Fadenabstand $F_{,}$, und man erhält die Gleichung

$$\begin{aligned}(C+F_{,}) \sin 1'' &= -\sin N \sin \delta' + \cos N \cos \delta' \sin(\tau - l - M) \\ &= -\sin N \sin \delta' \\ &\quad + \cos N \cos \delta' \{\sin(\tau - M) \cos l + \cos(\tau - M) \\ &\qquad \sin l\}.\end{aligned}$$

Jede Einstellung des beweglichen Fadens auf den Polarstern giebt eine ähnliche Gleichung; die arithmetische Mittelzahl aus allen solchen Gleichungen bezeichnet das mittlere Resultat aus den in einer Lage des Instruments gemachten Einstellungen. Setzen wir

$$F^{(m)} = \frac{F' + F'' + \ldots + F^{(\sigma)}}{\sigma},$$

$$\Sigma \cos l = \cos l' + \cos l'' + \ldots + \cos l^{(\sigma)},$$

$$\Sigma \sin l = \sin l' + \sin l'' + \ldots + \sin l^{(\sigma)},$$

$$\frac{1}{\sigma} \Sigma \cos l = \frac{1}{k} \cos \xi, \; -\frac{1}{\sigma} \Sigma \sin l = \frac{1}{k} \sin \xi$$

$$\frac{1}{k} \cos \delta' = \gamma \cos d', \; \sin \delta' = \gamma \sin d',$$

so entsteht die Gleichung

$$\frac{C+F^{(m)}}{\gamma}\sin 1'' = -\sin N \sin d' + \cos N \cos d' \sin(\tau - M - \xi)$$

von derselben Gestalt, wie sie die der einzigen Einstellung des beweglichen Fadens entsprechende Gleichung annimmt.

Da $\cos l = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}l$ und $\Sigma l = 0$ ist, so bekommt man

$$\frac{1}{k}\cos\xi = 1 - \frac{1}{\sigma}\Sigma 2\sin^2\tfrac{1}{2}l = 1 - \frac{\sin 1''}{\sigma}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}l}{\sin 1''},$$

$$\frac{1}{k}\sin\xi = \frac{1}{\sigma}\Sigma(l - \sin l) = \frac{1}{\sigma}\Sigma\left(\tfrac{1}{2}\frac{\sin^3 l}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{\sin^5 l}{5} + \ldots\right).$$

Selten wird eines der Intervalle l 20^m in Zeit oder $5°$ in Bogen erreichen; der Winkel ξ kann also nur einige Secunden, höchstens $23''$ betragen und man kann $\cos\xi = 1$, $\sin\xi = \xi\sin 1''$ annehmen, vorausgesetzt, dass ξ in Secunden ausgedrückt ist. Demnach erhalten wir

$$\frac{1}{k} = 1 - \frac{\sin 1''}{\sigma}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}l}{\sin 1''},$$

Wird l in Theilen des Radius des Kreises ausgedrückt, so ist

$$\xi = \frac{1}{\sigma}\Sigma\frac{(l - \sin l)}{\sin 1''}.$$

Dem Werth jedes Gliedes von der Gestalt $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}l}{\sin 1''}$ kann man in den Tafeln finden, welche zur Berechnung der Reduction der Circummeridianhöhen auf den Meridian gebraucht werden.

Man hat nicht nöthig $\frac{1}{k}$ zu berechnen; wir bekommen unmittelbar, ohne merklichen Fehler

$$\gamma = 1 - \frac{\cos^2\delta'\sin 1''}{\sigma}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}l}{\sin 1''},$$

$$d' = \delta' + \cos\delta'\sin\delta'\,\frac{1}{\sigma}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}l}{\sin 1''}.$$

Für den Polarstern ist $\delta' = 88° \, 38'$ und für ihn darf man immer $\gamma = 1$ annehmen. Es existiren fertige Tafeln zur Bestimmung von $\frac{l - sin\, l}{sin\, 1''}$ in Secunden; man kann auch folgende Tafel gebrauchen; das Argument ist l in Zeitminuten ausgedrückt und die Tafel giebt (ξ) in Bogensecunden.

l	(ξ)	Diff.	l	(ξ)	Diff.	l	(ξ)	Diff.	l	(ξ)	Diff.
1^m	0'',00	0'',02	6^m	0'',62	0'',36	11^m	3'',80	1'',10	16^m	11'',73	2'',31
2	0 ,02	0 ,06	7	0 ,98	0 ,48	12	4 ,90	1 ,37	17	14 ,04	2 ,60
3	0 ,08	0 ,10	8	1 ,46	0 ,62	13	6 ,27	1 ,57	18	16 ,64	2 ,96
4	0 ,18	0 ,18	9	2 ,08	0 ,78	14	7 ,84	1 ,81	19	19 ,60	3 ,25
5	0 ,36	0 ,26	10	2 ,86	0 ,94	15	9 ,65	2 ,08	20	22 ,85	
6	0 ,62		11	3 ,80		16	11 ,73				

Die arithmetische Mittelzahl aus den Werthen von (ξ), welche den Intervallen l', l'', ... $l^{(\sigma)}$ entsprechen, giebt den Winkel ξ.

Hat man die beobachteten Fädenantritte eines vom Pol entfernten Sterns auf die Durchgangszeit $\frac{1}{15} T°$ durch den grössten Kreis des Instruments reducirt und für den Polarstern d' und ξ gefunden, so erhält man zur Bestimmung der Uhrcorrection und des Azimuths bei einer Lage des Instruments zwei definitive Gleichungen:

$$0 = -sin\, N sin\, \delta + cos\, N cos\, \delta \, sin\, (\alpha - T° - U - \triangle U - M)$$

$$sin\, 1'' (C + F^{(m)}) = -sin\, N sin\, d'$$
$$+ cos\, N cos\, d' \, sin\, (\alpha' - K - U - M - \xi),$$

wo $\frac{1}{15}(U + \triangle U)$ die Uhrcorrection zur Zeit $\frac{1}{15} T°$ bedeutet.

Die anzuwendende Neigung der Umdrehungsachse ist das arithmetische Mittel aus allen Neigungen, welche bei den Einstellungen auf den Polarstern in derselben Lage des Instruments beobachtet wurden. Auf diese mittlere Neigung muss man auch den Durchgang des vom Pol entfernten Sterns reduciren. Die weitere Rechnung geschieht so, wie oben erklärt wurde.

Wenn in jeder Lage des Instruments ausser dem Polarsterne mehrere vom Pol entfernte Sterne beobachtet wurden und man wünscht aus allen Beobachtungen die wahrscheinlichsten Re-

sultate abzuleiten, so berechnet man zuerst U und A, wie wir gezeigt haben; zur Ermittelung der wahrscheinlichsten Correctionen werden dann die Bedingungsgleichungen gebildet, welche diese Correctionen enthalten, und nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst werden können.

Es seien C, $\frac{1}{15}\,U$ und A die zuerst gefundenen Werthe des Collimationsfehlers, der Uhrcorrection und des Azimuths; $C+\mathfrak{d}C$, $\frac{1}{15}(Y+\mathfrak{d}U)$ und $A+\mathfrak{d}A$ die wahrscheinlichsten Werthe derselben, wo überhaupt $\mathfrak{d}C$, $\mathfrak{d}U$ und $\mathfrak{d}A$ kleine Grössen bedeuten. Wir wenden uns zur Beobachtung eines Sterns, welcher zur Berechnung von C, U und A nicht benutzt war, und nennen $\frac{1}{15}\,T$ die Uhrzeit des Durchgangs dieses Sterns durch den Mittelfaden des Netzes in solcher Lage des Instruments, für welche C positiv ist; es sei J die Neigung der Umdrehungsachse während dieses Durchgangs. Die dem angenommenen Azimuthe A entsprechenden Werthe von N, M, X und der Uhrcorrection $\frac{1}{15}\,V$ werden nach folgenden Formeln gerechnet:

$$\sin N' = \cos\varphi \sin A,\quad N = N' + \frac{J.\sin\varphi}{\cos N'},$$
$$\sin M' = -tg\,\varphi\, tg\, N,\quad M = M' + \frac{J}{\cos\varphi \cos N \cos M'},$$
$$\sin X' = tg\,\delta\, tg\, N,\quad X = X' + \frac{C}{\cos\varphi \cos N \cos X'},$$
$$V = a - T - M - X,$$

wo φ die Polhöhe des Beobachtungsorts, a und δ die scheinbare Rectascension und Declination des Sterns bedeutet, dessen Beobachtungen der Rechnung unterworfen sind.

Auf ähnliche Weise kann man die Uhrcorrectionen V', V'' u. s. w. aus den Beobachtungen anderer Sterne bestimmen; aber wegen der Unrichtigkeit der angenommenen Werthe von A und C müssen alle diese Bestimmungen fehlerhaft sein. Um den Beobachtungen des erwählten Sterns zu genügen, ist es nöthig, die genaue Gleichung

$$(C+\delta C)\sin 1'' = -\sin\delta \sin(N+\delta N) + \cos\delta \cos(N+\delta N)\sin(X+\delta X)$$

zu betrachten, wo

$$X = a - T - M - V,\ \delta X = -\delta M - \delta V$$

angenommen ist. Entwickeln wir $\sin(N+\delta N)$, $\cos(N+\delta N)$, $\sin(X+\delta X)$ und setzen

$$p \sin 1'' = \sin C + \sin\delta \sin N - \cos\delta \cos N \sin X,$$

so kommt in Bogensecunden, da δC, δN und δX sehr klein sind:

$$p = -\frac{\sin\delta \,.\, \delta N}{\cos N} + \cos N \cos\delta \cos X \delta X - \delta C$$

Es ist annähernd

$$\sin M = -tg\,\varphi \,.\, tg\,N;\ \delta M = -\frac{tg\,\varphi\,\delta N}{\cos^2 N \cos M}$$

$$\sin N = \cos\varphi \,.\, \sin A,\quad \cos M \cos N = \cos A$$

$$\delta N = \frac{\cos\varphi \cos A\,\delta A}{\cos N} = \cos\varphi \cos M \,.\, \delta A.$$

Setzen wir

$$\frac{\sin\delta}{\cos N} = \sin w \qquad \frac{\sin\varphi}{\cos N} = \sin\Phi$$

$$\cos\delta \cos X = \cos w \qquad \cos\varphi \cos M = \cos\Phi,$$

und nehmen wir $-\delta M - \delta V$ statt δX an, setzen ferner für δM, δN ihre Werthe durch δA ausgedrückt, so kommt

$$p = \sin(\Phi - w)\delta A - \cos N \cos w\,\delta V - \delta C.$$

Andere Sterne geben ähnliche Bedingungsgleichungen; ist $C+\delta C$ in einer Lage positiv angenommen, so muss $C+\delta C$ in der anderen Lage des Instruments negativ sein. Wenn keine Aenderungen im Azimuthe zu erwarten sind, wegen der festen Aufstellung des Instruments, so kann man δA, δV und δC nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen. Es ist aber vortheilhafter für die erste und für die zweite Lage des Instru-

ments $\mathfrak{d}A$ verschieden anzunehmen, z. B. $\mathfrak{d}A'$ in der ersten und $\mathfrak{d}A''$ in der zweiten Lage statt $\mathfrak{d}A$ zu setzen. Man eliminirt dann $\mathfrak{d}A'$ aus den Gleichungen, die zur ersten Lage des Instruments gehören, und ebenso $\mathfrak{d}A''$ aus den Gleichungen, die sich zur zweiten Lage beziehen; es bilden sich dadurch zwei Systeme von Gleichungen, die nur $\mathfrak{d}V$ und $\mathfrak{d}C$ enthalten; die Auflösung dieser Gleichungen giebt am sichersten $\mathfrak{d}V$ und $\mathfrak{d}C$; hat man $\mathfrak{d}V$ und $\mathfrak{d}C$ gefunden, so wird es leicht sein, auch $\mathfrak{d}A'$ und $\mathfrak{d}A''$ zu bestimmen. Die Winkel M und N sind gewöhnlich klein für einen vom Pol entfernten Stern ist auch X ein kleiner Winkel; folglich sind $\cos N$, $\cos M$ und $\cos X$ wenig von Eins verschieden; dadurch weicht w von δ und Φ von φ nur wenig ab, so dass $\Phi - w$ wenig von $\varphi - \delta$ sich unterscheidet. Ist der $\sin(\varphi - \delta)$ sehr klein, so verschwindet nahezu das Glied $\sin(\Phi - w)\mathfrak{d}A$; wir schliessen daraus, dass der Fehler im Azimuth einen unbedeutenden Einfluss auf die Berechnung von $\mathfrak{d}V$, also auf die Zeitbestimmung ausüben kann, wenn man für diesen Zweck Sterne beobachtet, die nahe ihrer oberen Culmination, unweit vom Zenith durch den Vertical des Polarsterns gehen.

Beispiel. Am 23. September 1875 wurde auf der Pulkowaer Sternwarte durch die Beobachtung im Vertical des Polarsterns, vermittelst des tragbaren Passageninstruments die Uhrcorrection eines Chronometers bestimmt, dessen tägliche Voreilung gegen Sternzeit $2^s,92$ betrug; beobachtet wurde in beiden Lagen des Instruments; die mit Hülfe des Niveaus bestimmten Neigungen der Umdrehungsachse des Fernrohrs sind wegen der Ungleichheit der Zapfen dieser Achse corrigirt. Die Polhöhe des Beobachtungsorts ist $\varphi = 59°46'16''$; die vorläufig angenommene Uhrcorrection des Chronometers gegen die Pulkowaer Sternzeit ist ungefähr $+0^h 0^m 30^s$. Die Rechnung, nach erläuterter Methode, hat Herr Astronom Lewitzky ausgeführt. Es folgen hier die Beobachtungen; der Kürze halber erwähnen wir, dass die Sterne α und ε *Lyrae* an allen Verticalfäden des Netzes beobachtet wurden; hier begnügen wir uns aber mit der

Anführung nur der mittleren, aus allen Durchgängen durch verschiedene Fäden abgeleiteten Durchgänge durch den Mittelfaden. Auf den Polarstern war der bewegliche Faden einmal in der ersten und einmal in der zweiten Lage des Instruments eingestellt.

I.	II.
Höhenkreis nach Westen.	Höhenkreis nach Osten.

Beweglicher Faden auf *α Ur. min.* eingestellt (nach Chronometerzeit)

um $18^h 29^m 58^s,0 = T'$	um $18^h 42^m 20^s,5 = T'$
$35'',7$ *westlich vom Mittelfaden.*	$62'',1$ *östlich vom Mittelfaden.*
Am Mittelfaden.	Am Mittelfaden.
α Lyrae um $18^h 37^m 27^s,511 = T.$	*ε Lyrae* um $18^h 44^m 44^s,447 = T.$

Neigung der Umdrehungsachse.

Oestliches Ende höher als das westliche um $3'',425$. also $J = -3'',425$.	Westliches Ende höher als das östliche um $1'',245$, $J = +1'',245$.

Aus dem Nautical-Almanac für den 23. September 1875 entnommene und wegen der täglichen Aberration verbesserte

	Scheinbare Rectascension.		Scheinbare Declination.	
α Ursae minoris	$1^h 13^m 38^s,48$	$= \alpha'$	$+ 88° 38' 44'',31$	$= \delta'$
α Lyrae . .	18 32 43 ,91	$= \alpha$	+ 38 40 16 ,70	$= \delta$
ε Lyrae . .	18 40 13 ,38	$= \alpha$	+ 39 32 36 ,00	$= \delta.$

Der Collimationsfehler war unbekannt.

Bei der nördlichen Polhöhe $= 59° 46',3$ und Sternzeit von ungefähr

$18^h 30^m,5$ ist das nordöstliche Azimuth des Polarsterns, $2° 33' = A°$ in der ersten Lage.	$18^h 43^m$ ist das nordöstliche Azimuth des Polarsterns, $2° 31' = A°$ in der zweiten Lage des Instruments.

Die Rechnung ist mit fünfstelligen Logarithmen gemacht und hat folgende Bestimmungen gegeben; der unbekannte Collimationsfehler C war vorläufig $C = 0$ angenommen.

Höhenkreis West:	Höhenkreis Ost:
$F' = -35'',7$, $J = J'$	$F' = +\ 62'',1$ $J =$
$= -\ 3'',425$	$J' = +1'',245$ in Bogen
$D = 102^\circ\ 6'16'',20$	$D = 98^\circ 57' 15'',75$
$\Theta = 90\ 13\ 37\ ,40$	$\Theta = 90\ 10\ 26\ ,60$
$H = +1\ \ 3\ 20\ ,72$	$H = +1\ \ 6\ \ 4\ ,64$
$X - H = +28\ ,47$	$H - X = -51\ ,03$
$N = +1\ 19\ \ 8\ ,55$	$X = +1\ \ 5\ 13\ ,61$
$N - N' = +35\ ,71$	$N' = +1\ 20\ \ 1\ ,09$
$N = +1\ 19\ 44\ ,26$	$N - N' = -1\ \ 2\ ,10$
$M' = -2\ 16\ 54\ ,33$	$N = +1\ 18\ 58\ ,99$
$M - M' = -6\ ,83$	$M' = -2\ 15\ 36\ ,60$
$M = -2\ 17\ \ 1\ ,16$	$M - M' = -2\ ,48$
$\frac{1}{15} U = u = +9^s,197$ in Zeit	$M = -2\ 15\ 39\ ,08$
Chron.-Gang $= +0^s,005$	$u = +10^s,307$
$u_w = +9^s,202$	Chron.-Gang $= -0\ ,005$
um $18^h 41^m 6^s$ Chronometerzeit.	$u_0 = +10^s,302$
	um $18^h 41^m 6^s$ Chronometerzeit.

Der Collimationsfehler C ist bestimmt nach den Rechnungsvorschriften von Hansen; es wurden dabei vierstellige Logarithmen angewandt.

Höhenkreis West:	Höhenkreis Ost:
$w = 38^\circ 41',1$, $w' = 90^\circ 18',5$	$w = 39^\circ 33',4$, $w' = 90^\circ 14',2$
$\Phi = 59\ 47,4$	$\Phi = 59\ 47,4$
$Q' = + \dfrac{\cos\left(\frac{w+w'}{2} - \Phi\right)}{\cos N \cos \Phi \cos \frac{1}{2}(w'-w)}$	$Q'' = + \dfrac{\cos\left(\frac{w+w'}{2} - \Phi\right)}{\cos N \cos \Phi \cos \frac{1}{2}(w'-w)}$
$= +2,200$	$= +2',191$

$$u_w + Q' \cdot \frac{C}{15} = u_0 - Q'' \cdot \frac{C}{15}; \quad \frac{1}{15} C = \frac{u_0 - u_w}{Q' + Q''} = + \frac{1^s,100}{4,391} = 0^s 25$$

Also ist der Collimationsfehler $= \pm 0^s,25$ in Zeit, + für den Höhenkreis West — für den Höhenkreis Ost; die Uhrcorrection ist $+9^s,754$ um $18^h 21' 6''$ Chronometerzeit. Wäre das Azimuth A der optischen Achse unverändert in beiden Lagen des Instruments geblieben, so wäre das nordöstliche Azimuth $A = 2° 37' 42''7$.

Allgemeine Bemerkungen über die bisher angeführten Methoden zur Zeitbestimmung.

134. Obgleich das Durchgangsinstrument, in der Ebene des Meridians oder in der Ebene des Verticals des Polarsterns aufgestellt, ein ganz vorzügliches Mittel zur Zeitbestimmung an die Hand giebt, so wird doch die Genauigkeit des Endresultats gänzlich von der festen Aufstellung des Instruments abhängen. Hat daher der Beobachter keinen gemauerten Pfeiler oder eine sonstige feste Unterlage zur Aufstellung seines Intruments zur Verfügung, oder fehlt ihm eine feste Meridianmarke, mit Hülfe deren er fortwährend die Veränderungen im Azimuthe des Fernrohrs bemerken könnte, so wird er in diesem Falle sich nicht von der Unveränderlichkeit der Aufstellung des Instruments überzeugen können, sogar selbst nicht in ganz kurzen Zwischenzeiten. Es ist daher alsdann zuverlässiger, die Zeitbestimmungen mit Hülfe der Messung der Zenithdistanzen von Sternen in gehöriger Entfernung vom Meridiane an einem Verticalkreise vorzunehmen. Alsdann kann man vermittelst des Niveaus die Veränderungen in der Lage des Kreises unaufhörlich in Betracht ziehen und dadurch die Fehler, die aus der veränderlichen Lage des Instruments entspringen, beseitigen.

Besselsche Methode, die Polhöhe durch das Durchgangsinstrument zu bestimmen.

135. Wir haben schon § 114, S. 309 gesehen, dass man hierzu das Instrument in der Ebene des ersten Verticals aufstellen muss. Schon zu Anfang des 18. Jahrhunderts hatte Römer diese Lage des Instruments zum Beobachten vorgeschlagen, jedoch zu anderen Zwecken, als wozu man es jetzt anwendet, und die man auch gegenwärtig bequemer auf andere Weise erreichen kann. Bessel war der erste, welcher die Methode angab, wie man das Durchgangsinstrument im Azimuthe 90° oder 270°*) mit Vortheil gebrauchen könnte, und lehrte damit die Polhöhe zu ermitteln, wenn die Declination des Sterns bekannt ist, oder im allgemeinen die Zenithdistanzen des Sterns während seines Durchgangs durch den Meridian zu bestimmen. Eben dadurch erwies Bessel der praktischen Astronomie einen grossen Dienst, indem er ein neues und vorzügliches Mittel schuf, um die verschiedenen Untersuchungen durchzuführen, zu welchen früher die sogenannten Zenithsectoren angewandt wurden. Die Unabhängigkeit der Besselschen Methode von der Refraction, von den Theilungsfehlern der Kreise und überhaupt von allen constanten Fehlern des Instruments macht sie im höchsten Grade schätzbar. Später beschäftigten sich hiermit einige der berühmtesten Astronomen; aber vorzüglich war es Struve, welcher diese Beobachtungsart durch die Construction dazu geeigneter Messapparate vervollkommnete und zu interessanten Untersuchungen anwandte, nämlich zu der Bestimmung der Aberrations- und Nutationsconstanten.

Man denke sich das sphärische Dreieck, welches vom Zenithe, vom sichtbaren Pole des Aequators und von einem Sterne gebildet wird; bezeichnet man die Polhöhe durch φ, den Stun-

---

*) Astronomische Nachrichten, Nr. 40.

denwinkel des Sterns durch t, seine Zenithdistanz durch z, seine Declination durch δ und seine gerade Aufsteigung durch α, so wird beim Durchgange des Sterns durch den ersten Vertical sein Azimuth $= 90°$ oder $270°$ werden, und wir erhalten daher in diesem Falle:

$$\cos t = \frac{tg\,\delta}{tg\,\varphi};\ \cos z = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\sin t = \frac{\sin z}{\cos\delta};\ \sin z = \frac{\sqrt{\sin(\varphi-\delta)\sin(\varphi+\delta)}}{\sin\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Um also einen Stern im ersten Vertical beobachten zu können, muss seine Declination positiv (gleichnamig mit der Polhöhe) und kleiner als die Polhöhe sein.

Drücken wir nun t und α in Zeit aus, und zählen den Stundenwinkel t von der oberen Culmination des Sterns nach beiden Seiten des Meridians von 0 bis zu 12^h, so erhalten wir für die Sternzeit des Durchgangs des Sterns durch den ersten Vertical:

$$\alpha - t \text{ im Osten und } \alpha + t \text{ im Westen} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Wenn α und δ bekannt sind, und man hat t aus den Beobachtungen erhalten, so kann man leicht die Breite φ des Beobachtungsorts finden. Um aber den Einfluss, welchen kleine Fehler in δ und t auf die Bestimmung von φ hervorbringen, näher in Erwägung ziehen zu können, wollen wir annehmen, dass $\mathfrak{d}\delta$ und $\mathfrak{d}t$ die in δ und t enthaltenen Fehler seien, und dass die ihnen entsprechende Correction von φ den Werth $\mathfrak{d}\varphi$ habe. Da diese Fehler immer sehr klein sein werden, so kann man ohne Besorgniss die zweiten und höheren Potenzen von $\mathfrak{d}\delta$, $\mathfrak{d}t$ und $\mathfrak{d}\varphi$ vernachlässigen. Aus der Differenziation der Gleichung $tg\,\varphi = tg\,\delta . \sec t$, folgt dann:

$$\mathfrak{d}\varphi \sec^2\varphi = \mathfrak{d}\delta . \sec^2\delta \sec t + \mathfrak{d}t . tg\,\delta \sin t \sec^2 t;$$

$$\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\delta . \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta} + \frac{\mathfrak{d}t}{2} \cdot tg\,t \sin 2\varphi;$$

$$\mathfrak{d}\varphi = \mathfrak{d}\delta . \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\delta} + \mathfrak{d}t . \sin\varphi\, tg\,z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Hieraus sieht man, dass, wenn $\delta = \varphi$, ein Fehler in der Declination einen gleichen Fehler in der Breite des Orts hervorbringt. Wenn $\delta < \varphi$ und $\varphi < 45°$, so wird der Fehler in der Breite grösser als der Fehler in der Declination sein, und wegen der Ungenauigkeit von t um so bedeutender werden, je weiter der Stern im ersten Verticale vom Zenithe absteht. Wenn $\varphi > 45°$ und die Declination des Sterns zwischen den Grenzen φ und $90° - \varphi$ enthalten ist, so wird der Fehler in der Breite, welcher von einer Ungenauigkeit der Declination herrührt, kleiner als der Fehler der Declination sein, und zwar in dem Masse, als sich δ der Grenze 45° nähert. Wenn man diese Methode jedoch nur zur Bestimmung des Breitenunterschiedes zweier wenig von einander entlegener Oerter anwendet, so wird ein Fehler in der Declination auf den gesuchten Breitenunterschied wenig Einfluss haben.

Der Fehler in der Breite, welcher von einer Ungenauigkeit der Declination herrührt, wird später beseitigt werden durch Anwendung besserer Sternverzeichnisse; der Beobachter muss dagegen die grösste Vorsicht beim Anstellen der Beobachtungen selbst anwenden. Viel nachtheiliger wirkt der Fehler im Stundenwinkel, welcher weiter nicht zu beseitigen ist, und daher muss man hauptsächlich nur solche Sterne zur Breitenbestimmung wählen, für welche dieser Fehler den möglichst geringsten Einfluss auf die Endbestimmung ausübt; d. h. solche, die den ersten Vertical in der Nähe des Zeniths passiren, oder deren Declination sehr wenig von der Breite des Orts verschieden ist.

Man beobachtet gewöhnlich den Stern an allen Verticalfäden, und reducirt darauf nach § 120, S. 322 diese Beobachtungen auf den Mittelfaden; wir wollen daher in allen folgenden Untersuchungen annehmen, dass diese Reduction schon erfolgt sei, und jetzt nur zeigen, wie man aus dem Durchgange des Sterns durch den Mittelfaden, den Durchgang des Sterns durch die Ebene des ersten Verticals herleiten kann. Wir

nehmen hierbei für unser Instrument die folgenden Bezeichnungen, in Bogensecunden ausgedrückt, an:

$C =$ dem Collimationsfehler der Absehenslinie des Fernrohrs, welcher positiv gezählt wird, wenn bei der Drehung des Fernrohrs um die Horizontalachse, die durch den Mittelfaden bestimmte Gesichtslinie an der Himmelskugel einen kleinen Kreis beschreibt, welcher südlich vom grössten, auf der Umdrehungsachse senkrecht stehenden Kreise abweicht (die Polhöhe φ des Beobachtungsorts als nördlich betrachtet).

$J =$ der wahren Neigung der Umdrehungsachse des Fernrohrs gegen den Horizont, welche als positiv betrachtet werden soll, wenn das Nordende dieser Achse höher als das südliche liegt. Es sei J' die unmittelbar aus den Niveauablesungen bestimmte Neigung; x der Fehler, welcher von der Durchbiegung der Achse durch die Einwirkung der Schwere herrührt, und y der Fehler in J', welcher durch die Ungleichheit der Zapfen entsteht; alsdann wird in einer Lage des Instruments $J = J' + x \pm y$ werden, dagegen in der anderen Lage des Instruments, wenn die Achse umgelegt wird, $J = J' - x \mp y$ sein.

$\Delta a =$ dem Azimuth des Südendes der Umdrehungsachse, welches wir positiv von Süden gegen Westen zählen wollen, so dass $90° + \Delta a$ das südwestliche Azimuth derjenigen Ebene wird, welche senkrecht auf der Umdrehungsachse des Fernrohrs steht.

Wenn das Instrument genähert in der Ebene des ersten Verticals aufgestellt und gut berichtigt ist, so werden C, J und Δa immer kleine Grössen sein, was wir auch in allen folgenden Entwickelungen annehmen wollen.

Aus § 121, S. 324 erhellt, dass, wenn C ein sehr kleiner Bogen ist, dann die Sternzeit, bei welcher ein Stern durch den grössten Kreis der Himmelskugel geht, der senkrecht auf der Umdrehungsachse steht, dadurch erhalten wird, dass man zur beobachteten Sternzeit des Durchgangs dieses Sterns durch den Mittelfaden den in Secunden ausgedrückten Werth:

$$\pm \frac{C}{15\sqrt{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)}} = \pm \frac{C}{15 \sin\varphi \sin z}$$

hinzulegt, wobei man bei einem positiven C das obere Zeichen (+) zu nehmen hat, wenn der Stern im Westen ist, dagegen das untere (—), wenn er im Osten ist.

In § 64, S. 153 ist erwiesen worden, dass die Neigung J der Umdrehungsachse gegen den Horizont, die Sternzeit des Durchgangs durch den Mittelfaden um einen Werth ändert, der $= \frac{J}{15} \cos z \sec\delta \sec q$ ist, wo q den parallactischen Winkel des Sterns bezeichnet. Im ersten Verticale wird $\cos\delta \cos q = \sin\varphi \sin z$; will man daher den beobachteten Durchgang des Sterns auf diejenige Lage des Instruments zurückführen, für welche $J = 0$ ist, so muss man zum beobachteten Durchgange durch den Mittelfaden den Werth

$$\pm \frac{J}{\sin\varphi\, tg\, z}$$

in Secunden ausgedrückt, hinzulegen. Wenn der Stern im Westen ist, braucht man (+), dagegen (—), wenn er im Osten ist, und zwar in beiden Fällen bei einem positiven J.

Es sei z' die Zenithdistanz und t' der Stundenwinkel des Sterns bei dem südwestlichen Azimuthe von $90° + \Delta a$; z und t dasselbe im ersten Vertical; nehmen wir Δa positiv, so muss t' grösser als t sein. Wenn Δa ein kleiner Winkel ist, so werden auch $z'-z$ und $t'-t$ klein sein; es entsteht dann die Gleichung

$$(t'-t)^2 . \cos^2\delta = (z'-z)^2 + (\Delta a)^2 \sin^2 z.$$

Im ersten Vertical ist aber

$$z'-z = (t'-t)\cos\varphi; \quad \sin\delta = \cos z . \sin\varphi;$$

es kommt also

$$(t'-t)^2 . (\cos^2\delta - \cos^2\varphi) = (\Delta a)^2 . \sin z, \text{ oder}$$

$$(t'-t)^2 . (\sin^2\varphi - \sin^2\delta) = (t'-t)^2 \sin^2\varphi \sin^2 z = (\Delta a)^2 . \sin^2 z;$$

$$(t'-t)\sin\varphi = \pm \Delta a;$$

da t' grösser ist als t, so muss hier nur das Zeichen $+$ angewandt werden. Denken wir eine verticale Ebene, deren südwestliche Seite dem Azimuth $90° + \Delta a$ entspricht, so werden die Sterne im Westen und im Osten später durch diese Ebene, als durch den ersten Vertical gehen. Setzt man also $(t'-t) = 15 . \Delta \tau$ und berechnet

$$\Delta \tau = \frac{\Delta a}{15 \sin \varphi},$$

so muss man $\Delta \tau$ von der beobachteten Sternzeit des Durchgangs des Sterns durch die Ostseite sowohl als Westseite desjenigen Verticals abziehen, dessen südwestliches Azimuth $= 90° + \Delta a$ ist, um den Durchgang durch den ersten Vertical zu erhalten.

136. Man kann die Polhöhe bequem und genau bestimmen, wenn man einen Stern in der Nähe des Zeniths wählt, ihn auf der Ostseite und Westseite einer Ebene, die dem ersten Verticale möglichst nahe ist, beobachtet und zwischen diesen Beobachtungen die horizontale Umdrehungsachse des Fernrohrs so umlegt, dass das Ende, welches vorher nach Süden gerichtet war, jetzt nach Norden weist. Die Polhöhe lässt sich dann auf zweierlei Weise finden.

a) Es sei T die Chronometerzeit als der Stern den Mittelfaden im Osten in der Nähe des ersten Verticals passirte, und es sei U die Uhrcorrection, welche man zu T hinzulegen muss, um die entsprechende Sternzeit zu erhalten; für den Durchgang des Sterns im Westen mögen T' und U' dieselbe Bedeutung haben. Wenn wir nun annehmen, dass bei den östlichen Beobachtungen, welche in der ersten Lage des Instruments angestellt wurden, die Werthe C, x und y positiv waren, so werden sie bei den westlichen Beobachtungen in der zweiten Lage des Instruments, nach der Umlegung der Horizontalachse, negativ gezählt werden müssen. Drückt man jetzt durch J' und J'' die beobachteten Erhöhungen des nördlichen Endes der Umdrehungsachse über dem Südende der Achse, in der ersten

und zweiten Lage des Instruments aus, und bezeichnet durch S und S' die Sternzeiten der Durchgänge des Sterns durch den ersten Vertical im Osten und Westen, so erhalten wir aus § 135, S. 373 und 374 folgende Gleichungen:

$$S = T + U - \frac{C}{15 \sin\varphi \sin z} - \frac{(J' + x + y)}{15 \sin\varphi \, tg\, z} - \frac{\Delta a}{15 \sin\varphi}$$

$$S' = T' + U' - \frac{C}{15 \sin\varphi \sin z} + \frac{J'' - x - y)}{15 \sin\varphi \, tg\, z} - \frac{\Delta a}{15 \sin\varphi}.$$

Bezeichnet man den Stundenwinkel im ersten Verticale durch τ, und drückt $U' - U$ durch ΔU aus, so findet man dass:

$$\tfrac{1}{15}\tau = \tfrac{1}{2}(S' - S) = \tfrac{1}{2}(T' - T + \Delta U) + \frac{\frac{1}{2}(J'' + J')}{15 \sin\varphi \, tg\, z};$$

wo ΔU die Verspätung des Chronometers gegen Sternzeit im Laufe des Zeitraums $T' - T$ bezeichnet. Aus dem Obigen ersieht man, dass τ nicht von den Werthen von U, U', C, x und y abhängt, sondern nur von der Neigung der Umdrehungsachse gegen den Horizont und von dem täglichen Gange des Chronometers.

Hat man auf diese Weise τ gefunden, so folgt φ aus der Gleichung:

$$tg\,\varphi = tg\,\delta \sec\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a);$$

oder wenn $\varphi - \delta$ eine kleine Grösse ist; z. B. nicht mehr als 1° oder 2°, so kann man φ noch bequemer aus folgender Gleichung berechnen:

$$\sin(\varphi - \delta) = \sin\varphi \cos\delta \,.\, 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b);$$

Hierbei kann man die früher mehrmals erwähnten Tafeln benutzen, welche $\log\sin^2 \frac{1}{2}\tau$, mit τ (in Zeit ausgedrückt) als Argument geben, ferner kann man statt der wahren Breite φ im zweiten Theile der Gleichung (b), die vorläufig bekannte genäherte Breite des Orts annehmen; wenn sie aber mehr als 1′ oder 2′ von der Wahrheit abweicht, so muss man die Rechnung nochmals wiederholen.

b) Noch bequemer kann man φ bestimmen, wenn man, ohne erst S und S' zu suchen, sogleich $\frac{1}{15}t = \frac{1}{2}(T' - T + \triangle U)$ setzt, und φ' nach einer der beiden Formeln:

$$tg\,\varphi' = tg\,\delta\, sec\, t,$$
$$sin(\varphi' - \delta) = sin\,\varphi . cos\,\delta . 2\, sin^2 \tfrac{1}{2} t;$$

berechnet, wo φ nur insofern von φ' verschieden sein wird, als wir den Einfluss der Neigung der Umdrehungsachse gegen den Horizont vernachlässigt haben. Dieser Einfluss ruft in dem Stundenwinkel eine Aenderung $\delta t = \frac{1}{2}\frac{(J'' + J')}{sin\,\varphi\, tg\, z}$ hervor; aber aus der Gleichung (4) § 135, S. 370 folgt unmittelbar, dass ein Fehler im Stundenwinkel $= \delta t$ auf die Breite einen Fehler $= \delta\varphi = \delta t . sin\,\varphi . tg\, z$ hervorbringt, folglich wird in diesem Falle $\delta\varphi = \frac{1}{2}(J'' + J')$ und daher die wahre Breite des Beobachtungsorts:

$$\varphi = \varphi' + \tfrac{1}{2}(J'' + J').$$

Wenn der Beobachter nicht gewiss weiss, ob das Azimuth seines Fernrohrs sehr nahe an 90°, so muss er den Einfluss des Azimuths so genau als möglich in Rechnung ziehen. Es sei das Azimuth des Fernrohrs von 90° um die Grösse $\triangle a$ verschieden; bezeichnet man die gerade Aufsteigung des Sterns durch α und nimmt man an, dass die Sternzeiten bei den Beobachtungen im Osten und Westen Θ und Θ' waren, so wird der Stundenwinkel im Osten $= \Theta - \alpha$, im Westen aber $= \Theta' - \alpha$ werden; verwandelt man alsdann Θ', Θ und α aus Zeit in Gradmass, so erhält man:

$$cotg(270° + \triangle a) = -tg\triangle a = \frac{cos(\Theta - \alpha)\, sin\,\varphi - tg\,\delta\, cos\,\varphi}{sin(\Theta - \alpha)}$$
$$cotg(90° + \triangle a) = -tg\triangle a = \frac{cos(\Theta' - \alpha)\, sin\,\varphi - tg\,\delta\, cos\,\varphi}{sin(\Theta' - \alpha)}$$

folglich

$$tg\,\varphi = tg\,\delta . cos[\tfrac{1}{2}(\Theta' + \Theta) - \alpha]\, sec\, \tfrac{1}{2}(\Theta' - \Theta),$$
$$tg\triangle a = sin\,\varphi . tg[\tfrac{1}{2}(\Theta' + \Theta) - \alpha]$$

Setzt man nun $\frac{\Theta'+\Theta}{2} - a = \eta$ und nimmt man an, dass φ die wahre, dagegen $\varphi_{,}$ die ungenaue Breite des Orts sei, welche in der Annahme $\eta = 0$ berechnet ist, so hat man:

$$tg\,\varphi_{,} = tg\,\delta \,.\, sec\,\tfrac{1}{2}(\Theta'-\Theta),$$
$$tg\,\varphi_{,} - tg\,\varphi = tg\,\varphi_{,}(1-cos\,\eta)$$

oder, weil η sehr klein ist, so hat man in Bogensecunden ausgedrückt:

$$\varphi - \varphi_{,} = -\tfrac{1}{2} sin\,2\varphi_{,} \,.\, \frac{2\,sin^2\tfrac{1}{2}\eta}{sin\,1''}.$$

Hieraus sieht man, dass $\varphi' > \varphi$, oder dass $\varphi - \varphi_{,}$ stets negativ ist; den obigen Ausdruck kann man leicht vermöge derselben Tafeln berechnen, welche wir schon zur Bestimmung von $\varphi - \delta$ gebrauchten.

Wenn zwischen den Beobachtungszeiten das Azimuth des Fernrohrs sich um den Werth δa ändert, so wird im doppelten Stundenwinkel $2t$, welcher auf dem Unterschiede der Beobachtungszeiten beruht, ein Fehler $\frac{\delta a}{sin\,\varphi}$ enthalten sein; folglich wird der Fehler, der in t selbst stattfindet, nämlich $\delta t = \frac{1}{2}\frac{\delta a}{sin\,\varphi}$ sein, und die Breite des Orts muss die Correction $\delta\varphi = sin\,\varphi\, tg\,z \,.\, \delta t = \frac{1}{2}\delta a \,.\, tg\,z$ erhalten; diese Correction wird aber um so kleiner sein, je näher der beobachtete Stern am Zenithe ist; wenn z. B. $z = 5°44'21''$, und $\delta a = 20''$, so ist der Fehler in der Breite $= 1''$. Hieraus sieht man, dass grosse Vorsicht bei der Aufstellung des Instruments nöthig ist, und besonders wird es gut sein, im ersten Verticale eine feste Marke aufzustellen, nach welcher man dann bei Tage und bei Nacht sich von der Unveränderlichkeit des Instruments in Beziehung auf Azimuth versichern kann.

137. Die eben auseinandergesetzte Methode, die Breite zu bestimmen, ist besonders deshalb zu empfehlen, weil sie von der Refraction und von allen constanten Fehlern des Instruments

vollkommen unabhängig ist. Wenn die Absehenslinie des Fernrohrs einen Collimationsfehler hat und die cylindrischen Zapfen der horizontalen Umdrehungsachse verschiedene Durchmesser haben, wenn ferner diese Achse selbst dem Einflusse der Durchbiegung durch die Schwere unterworfen ist; und wenn endlich das Azimuth des Fernrohrs einige wenige Minuten von 90° abweicht, so kann man, wenn auch alle diese Fehler unbekannt sind, die Breite des Beobachtungsortes bestimmen. Das Endresultat hängt nur von der Genauigkeit der angenommenen Declination des Sterns, von der festen Aufstellung des Instruments, von der Genauigkeit in dem angenommenen Gange des Chronometers, von der optischen Stärke des Fernrohrs und von der unmittelbaren Bestimmung der Neigung der horizontalen Umdrehungsachse vermittelst des Niveaus ab.

Wenn der beobachtete Stern dem Zenithe recht nahe ist, wie dieses gewöhnlich der Fall sein wird, so wird ein Fehler von 1^s in Zeit, in der Bestimmung des täglichen Gangs der Uhr keinen merklichen Einfluss hervorbringen. Die Neigung der Achse muss aber möglichst scharf bestimmt werden, weil die Genauigkeit der Resultate ganz vorzüglich davon abhängt.

Die constanten Fehler des Instruments können auch dadurch eliminirt werden, dass man zuerst einen Stern im Osten und Westen in der ersten Lage des Instruments beobachtet, alsdann die horizontale Umdrehungsachse umlegt und darauf wieder denselben oder auch einen anderen Stern in der zweiten Lage des Instruments sowohl im Osten als im Westen beobachtet. Je näher die beiden beobachteten Sterne dem Zenithe gelegen sind, desto genauer wird das Endresultat sein.

Aus § 135, S. 373 erhellt, dass bei Vernachlässigung des Collimationsfehlers C in der Bestimmung des Stundenwinkels t ein Fehler $= \delta t = \frac{C}{\sin\varphi \sin z}$ begangen wird, und aus der Gleichung $\delta\varphi = \delta t \sin\varphi \, tg z$ sehen wir, dass der dadurch hervorgebrachte Fehler in der Breite, nämlich $\delta\varphi = C \sec z = \frac{C \sin\varphi}{\sin\delta}$

sein wird. Wenn wir daher einen Stern im Osten und Westen beobachten, ohne das Instrument umzulegen, aber den Collimationsfehler und die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse J' und J'' bei der Herleitung der Breite vernachlässigen, und die so hergeleitete Breite φ' nennen; wenn ferner die Umdrehungsachse umgelegt wird, und φ'' die ähnlich abgeleitete Breite aus den Beobachtungen eines zweiten Sterns im Osten und Westen, in der zweiten Lage der Achse bezeichnet, für welchen die Niveauablesungen in Secunden ausgedrückt die Neigungen $J'_,$, $J''_,$ ergeben; so haben wir zur Bestimmung der wahren Polhöhe $= \varphi$ die folgenden Gleichungen:

$$\varphi = \varphi' + \tfrac{1}{2}(J' + J'') + C.sec\,z'; \quad \varphi = \varphi'' + \tfrac{1}{2}(J'_, + J''_,) - C.sec\,z''$$

wo z' und z'' die Zenithdistanzen des ersten und zweiten Sterns im ersten Verticale bezeichnen. Nimmt man nun der Kürze wegen an, dass

$$\varphi' + \tfrac{1}{2}(J' + J'') = \psi', \quad \varphi'' + \tfrac{1}{2}(J'_, + J''_,) = \psi'',$$

so erhalten wir:

$$\psi'' - \psi' = C(sec\,z' + sec\,z''),$$

oder auch:

$$C = \frac{\psi'' - \psi}{sec\,z' + sec\,z''};$$

berechnet man hieraus C, so kann man φ bestimmen.

Obgleich die eben erläuterte Methode, die Breite eines Orts zu finden, sehr befriedigende Resultate liefert und auch viel angewandt wird, so stellt sie doch Reisenden, die sich mit geographischen Ortsbestimmungen beschäftigen, wie schon Struve sehr richtig bemerkt hat, besondere Schwierigkeiten in den Weg; und namentlich trifft es sich oft, dass der Beobachter wenig helle Sterne in der Nähe des Zeniths findet und folglich sich mit Sternen, die 15° und noch mehr vom Zenithe abstehen, behelfen muss. In diesem Falle geht zwischen den Durchgängen des Sterns auf der Ost- und Westseite des ersten Verticals viel Zeit verloren; ferner ist die Unveränderlichkeit des Azimuths des

Fernrohrs in dem grossen Zeitraume zwischen den Beobachtungen eine, bei den dem Beobachter zu Gebote stehenden Mitteln, sehr schwer zu erfüllende Bedingung, und endlich in sehr hohen Breiten wird die Kürze der Sommernächte die Operationen des Beobachters bedeutend beschränken. Um nun diese Schwierigkeiten zu vermindern, schlägt Struve vor, dass man vier Sterne in der Nähe des Zeniths wählen soll, von denen man einen auf der Ostseite und einen zweiten bald nachher auf der Westseite des ersten Verticals beobachten kann, wobei man aber das Instrument in derselben Lage stehen lässt. Legt man darauf das Instrument um, so muss man ganz in der vorhergehenden Ordnung die zwei anderen Sterne, den einen im Osten, den andern im Westen beobachten. Sind nun die geraden Aufsteigungen und Abweichungen der vier angenommenen Sterne bekannt, so kann man aus diesen Beobachtungen die Breite des Orts und den Collimationsfehler des Fernrohrs sogleich bestimmen; wenn aber auch noch die Sternzeiten der Beobachtungen genau bekannt sind, so kann man noch die Abweichung des Azimuths des Fernrohrs von 90° ableiten.

Es mögen T', T'', T''' und T^{IV} die auf den Mittelfaden reducirten Chronometerzeiten bei den Beobachtungen dieser vier Sterne bezeichnen; U', U'', U''' und U^{IV} diejenigen Grössen, welche man zu diesen Chronometerzeiten hinzulegen muss, um sie in Sternzeit zu verwandeln; J', J'', J''' und J^{IV} die Erhöhungen des Nordendes der horizontalen Umdrehungsachse, endlich z', z'', z''' und z^{IV} die Zenithdistanzen der Sterne zur Zeit ihrer Beobachtung. Alsdann werden die Stundenwinkel dieser vier Sterne: $T'+U'-\alpha'$; $T''+U''-\alpha''$ u. s. w. sein, wo α', α'' u. s. w. die Rectascensionen des ersten, zweiten u. s. w. Sternes bezeichnen. Sind nun φ', φ'', φ''', φ^{IV}, d. h. die Breiten des Beobachtungsorts, wie sie aus der Berechnung dieser vier Beobachtungen, ohne Rücksicht auf die Neigungen J', J'' u. s. w. auf den Collimationsfehler C und auf die Abweichung Δa des südwestlichen Azimuths des Fernrohrs, $90°+\Delta a$, von 90° folgen,

gefunden, und man nimmt an, dass auch der Gang des Chronometers bekannt sei, dass aber sein Stand gegen Sternzeit einen kleinen Fehler δU enthalte, so wird man finden:

1) aus den Beobachtungen in der ersten Lage des Instruments, wenn der Stern

im Osten $\varphi = \varphi' + J' + C sec z' - (\delta U . sin \varphi - \Delta a) tg z'$,
im Westen $\varphi = \varphi'' + J'' + C sec z'' + (\delta U . sin \varphi - \Delta a) tg z''$,

nach der Umlegung:

2) aus den Beobachtungen in der zweiten Lage des Instruments, wenn der Stern

im Osten $\varphi = \varphi''' + J''' - C sec z''' - (\delta U sin \varphi - \Delta a) tg z'''$,
im Westen $\varphi = \varphi^{IV} + J^{IV} - C sec z^{IV} + (\delta U sin \varphi - \Delta a) tg z^{IV}$.

Aus diesen Gleichungen kann man nun φ, C und $(\delta U sin \varphi - \Delta a)$ bestimmen; war der Stand des Chronometers gegen Sternzeit genau bekannt, so ist ferner $\delta U = 0$, und dann kann man Δa selbst finden.

Wenn man an einem Abende die Durchgänge vieler Sterne im Osten und Westen durch den ersten Vertical beobachtet hat, so kann man für jeden Stern eine Bedingungsgleichung zur Bestimmung der Breite φ bilden, wie wir oben erklärt haben. Auf diese Weise bekommt man mehr Gleichungen, als nöthig sind, um die bekannten Grössen zu finden; man kann sie aber zur Ausgleichung der Beobachtungsfehler benutzen. Dazu multiplicirt man jede Gleichung mit der Zahl der Fäden, an denen die Antritte des entsprechenden Sternes beobachtet wurden, und dann bestimmt man die unbekannten Grössen nach der Methode der kleinsten Quadrate.

138. Wenn die Fadendistanzen unbekannt sind, so kann die Polhöhe nach folgenden beiden Beobachtungsmethoden gefunden werden:

1) Man beobachtet in einer Lage des Instruments die Durchgänge des Sterns durch alle Fäden im Ostverticale; dann wird die Umdrehungsachse des Fernrohrs umgelegt, und in dieser

zweiten Lage des Instruments werden ähnliche Beobachtungen im Westverticale wiederholt. Es seien α und δ die AR und die Declination des Sterns, φ die Polhöhe, Θ und Θ' die Sternzeiten der östlichen und westlichen Durchgänge des Sterns durch denselben Seitenfaden, bei der ersten und zweiten Lage des Instruments, J und J' die entsprechenden Neigungen der Umdrehungsachse, positiv, wenn das Nordende das höhere ist; alsdann berechnet man:

$$s = \frac{\Theta' + \Theta}{2} - \alpha; \; u = \frac{\Theta' - \Theta}{2};$$
$$tg\varphi' = tg\delta . sec\, s . sec\, u$$

und es wird

$$\varphi = \varphi' + \frac{J + J'}{2} + (90^\circ - A) . tg\, s . cos\,\varphi'$$

sein; wo A das nordöstliche Azimuth des grössten Kreises bedeutet, welcher senkrecht auf der Umdrehungsachse steht*). Das

---

*) Diese Formeln lassen sich leicht aus den Gleichungen 1, 2, 3, 4, 5 des § 116, S. 312 ableiten. Ist $F_{,}$ die Entfernung des Fadens vom genannten grössten Kreise und wird dann $F_{,}$ als positiv in der ersten Lage des Instruments betrachtet, so muss, nach der Umlegung der Achse, die Entfernung dieses Fadens negativ werden. Behalten wir also alle Bezeichnungen des § 116, S. 312 bei, so ist

$$+ sin F_{,} = - sin\,\delta\, sin N - cos\,\delta\, cos N sin (M + \Theta - \alpha),$$
$$- sin F_{,} = - sin\,\delta\, sin N - cos\,\delta\, cos N sin (M + \Theta' - \alpha),$$

wobei wir der Kürze halber annehmen wollen, dass die Neigung der Achse $= J$ und das Azimuth des Fernrohrs $= A$ in beiden Lagen des Instruments unveränderlich dieselben bleiben. Dividiren wir die Summe der beiden vorhergehenden Gleichungen mit $cos\,\delta$, und setzen wir

$$s = \frac{\Theta' + \Theta}{2} - \alpha; \; u = \frac{\Theta' - \Theta}{2},$$

so ist

$$tg\,\delta . sin N = - cos N . sin M . cos\, s . cos\, u - cos N . cos M sin\, s . cos\, u.$$

Wenn das Fernrohr sehr nahezu im ersten Verticale aufgestellt ist, so muss A wenig von 90° verschieden und J sehr klein sein; setzt man daher $sin A = 1$, so kömmt (aus den Gleichungen 1, 3, 4, § 116, S. 312):

$$sin N = cos (\varphi - J);$$
$$cos N sin M = - sin (\varphi - J);$$

letzte Glied: $(90° - A)\ tg\, s \cos \varphi'$, kann vernachlässigt werden, da es für einen Faden positiv, für den andern correspondirenden Faden aber negativ und sehr nahe ebenso gross wird, also im Mittel verschwindet. Bei dieser Polhöhenbestimmung muss man die Sternzeit oder die Uhrcorrection annähernd kennen, doch ein Fehler in der Uhrcorrection bis auf ein paar Secunden in Zeit, hat keinen erheblichen Einfluss.

2) Herr v. Struve hat ein Verfahren vorgeschlagen, welches von der Uhrcorrection beinahe ganz unabhängig ist und nur die Kenntniss des Uhrganges voraussetzt. Man beobachtet nämlich vor dem östlichen Durchgange des Sterns durch den ersten Vertical die Antrittsmomente desselben an zwei oder drei Verticalfäden und nach der, unmittelbar darauf vorgenommenen Umlegung der Horizontalachse beobachtet man noch einmal die Antrittsmomente des Sterns an dieselben Fäden, welche früher nördlich, nach der Umlegung der Achse aber südlich vom ersten Verticale liegen und vom Sterne, bald nach dem Durchgange desselben durch den Ostvertical getroffen werden, falls das Fernrohr auf die richtige Zenithdistanz eingestellt wird. Nun wartet man ab, bis der Stern in die Nähe des ersten Westverticals kommt; alsdann bemerkt man die Durchgangszeiten des Sterns durch die zwei oder drei ersten Fäden; legt die Horizontalachse zum zweiten Male um, und beobachtet die Antrittsmomente an die Fäden, an welche der Stern nach seinem westlichen Durchgange durch den ersten Vertical gelangt; man kommt also am Schlusse der Beobachtungen in die erste oder ursprüngliche Lage des Instruments zurück. Es versteht sich übrigens von selbst, dass die Neigungen der Achse hier, so wie immer, möglichst genau bestimmt werden müssen.

$$\cos N \cos M = \cos A = \sin(90° - A) = (90° - A).\sin 1'';$$
$$tg\,\delta \sec s \sec u \cos(\varphi - J) = \sin(\varphi - J) - (90° - A)\,tg\, s \sin 1''.$$

Da nun $tg\,\delta \sec s \sec u = tg\,\varphi'$ ist,

so erhalten wir: $tg(\varphi - J) = tg\,\varphi' + (90° - A) \sin 1''.tg\, s.\sec(\varphi - J),$

und hieraus $\varphi = \varphi' + J + (90° - A)\,tg\, s.\cos\varphi'.$

Zur Polhöhenberechnung dienen in diesem Falle ähnliche Formeln wie vorher; wenn aber das Instrument sehr nahezu im ersten Verticale eingestellt ist, so lassen sich die Stundenwinkel unmittelbar aus den Beobachtungen ableiten. Es seien: Θ', Θ'', Θ''', Θ^{IV} die Sternzeiten der ersten, zweiten, dritten und vierten Durchgänge des Sterns durch denselben Seitenfaden; α die *AR* des Sterns, t' und t'' die östlichen Stundenwinkel zu den Zeiten Θ' und Θ''; t''' und t^{IV} die westlichen Stundenwinkel zu den Zeiten Θ''' und Θ^{IV}. Wenn die Umdrehungsachse des Fernrohrs im Meridiane liegt und vollkommen horizontal ist, so muss der Seitenfaden bei der ersten und vierten Beobachtung nördlich, bei der zweiten und dritten aber südlich von der Ebene des ersten Verticals, gleich weit von letzterem abliegen. Folglich muss, der Grösse des Winkels nach, $t' = t^{IV}$ und $t'' = t'''$ sein. Es ist also $t' = \alpha - \Theta' = \Theta^{IV} - \alpha$ und $t'' = \alpha - \Theta'' = \Theta''' - \alpha$, oder $t' = \frac{\Theta^{IV} - \Theta'}{2}$ und $t'' = \frac{\Theta''' - \Theta''}{2}$; d. h. die Stundenwinkel werden respective durch die halbe Zwischenzeit zwischen dem vierten und ersten, und zwischen dem dritten und zweiten Durchgange des Sterns durch denselben Seitenfaden gegeben; es müssen nur diese Zwischenzeiten nach dem bekannten Uhrgange in entsprechende Sternzeitintervalle verwandelt werden. Mit diesem Stundenwinkel wird die genäherte Polhöhe φ' berechnet; addirt man darauf zu diesem φ' das arithmetische Mittel aus den beobachteten Neigungen der Umdrehungsachse mit gehörigem Zeichen hinzu, so erhält man die richtige Polhöhe φ.

Setzen wir also $s = \frac{t'+t''}{2}$ und $u = \frac{t''-t'}{2}$, und nennen wir T', T'', T''', T^{IV} die Uhrzeiten, welche bei den ersten, zweiten, dritten und vierten Durchgängen des Sterns durch denselben Faden bemerkt wurden; J', J'', J''', J^{IV} die entsprechenden Neigungen der Achse, Δ und Δ' die Retardationen der Uhr gegen Sternzeit im Laufe der Zeitintervalle $T^{IV} - T'$ und $T''' - T''$, so findet man:

$$s = \tfrac{1}{4}[(T^{IV} - T' + \Delta) + (T''' - T'' + \Delta')];$$
$$u = \tfrac{1}{4}[(T^{IV} - T' + \Delta) - (T''' - T'' + \Delta')];$$
$$tg\,\varphi' = tg\,\delta\,.\,sec\,s\,.\,sec\,u;$$
$$\varphi = \varphi' + \tfrac{1}{4}(J' + J'' + J''' + J^{IV}).$$

Praktische Regeln.

139.

1) Muss das Fernrohr sehr nahezu, nach den Regeln, die wir in § 57 und 58, S. 127—136 erklärt haben, im Azimuthe = 90° eingestellt werden.

2) Hängt die Genauigkeit der Polhöhenbestimmung mit Hülfe des Durchgangsinstruments wesentlich davon ab, dass die Neigung der Umdrehungsachse des Fernrohrs genau ermittelt wird. Daher ist es nöthig, bei jeder Umlegung der Achse, am Anfange und am Schlusse der Beobachtungen, im Osten und Westen, die Neigung der Achse vermittelst des Niveaus sorgfältig zu bestimmen.

Der Einfluss der ungleichen Dicke der Zapfen der Umdrehungsachse und des Fehlers der Absehenslinie (oder des Collimationsfehlers) wird durch die Umlegung der Achse eliminirt, indem man entweder den Durchgang im Ostverticale und im Westverticale in entgegengesetzten Lagen der Achse beobachtet, oder indem man die Achse sowohl bei den östlichen, als auch bei den westlichen Durchgängen umlegt, oder indem man den einen Stern in beiden Verticalen in derselben Lage der Achse und einen andern nachher in entgegengesetzter Lage derselben wiederum in beiden Verticalen beobachtet.

3) Die Lichtstärke des Fernrohrs bei den von uns beschriebenen Instrumenten gestattet die bequeme Beobachtung der Sterne bis zur fünften oder sechsten Grösse. Aus den Sternverzeichnissen sind daher vorzüglich diejenigen helleren Sterne auszuwählen, deren Declination δ wenig kleiner ist, als die Polhöhe

φ; es ist wenigstens vortheilhaft, solche Sterne zu benutzen, für welche $\varphi - \delta$ nicht mehr als 10° beträgt, oder noch kleiner ist. Man wird die Auswahl der Sterne so treffen, dass dieselben zu bequemen Nachtstunden durch die beiden Theile des ersten Verticals passiren. Den Stundenwinkel des Sterns, für den Durchgang durch den ersten Vertical $= \tau$ in Zeit ausgedrückt, sowie die Zenithdistanz z beim Durchgange, findet man nach den Formeln:

$$\cos 15\tau = \frac{tg\,\delta}{tg\,\varphi};\; \cos z = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi};$$

ist nun α die gerade Aufsteigung, so ist $\alpha - \tau$ die Sternzeit des Durchgangs des Sterns durch den Ostvertical, und $\alpha + \tau$ die Sternzeit des Durchgangs durch den Westvertical.

Die Durchschneidung der Verticalfäden muss genau in der Mitte der Horizontalfäden geschehen, und diesem gemäss muss der Beobachter die Zenithdistanz des Fernrohrs für jeden Faden ändern. Geht der Stern nicht an der gehörigen Stelle durch, so werden die Zeitmomente wegen der Abweichung der Fäden von der genauen, senkrechten Richtung zur Umdrehungsachse, fehlerhaft. Es ist daher vortheilhaft, die genäherten Momente der Uhr und die Zenithdistanzen bei dem Durchgange für jeden Faden vorauszuberechnen, um sicher und bequem beobachten zu können. Für den Mittelfaden gelten unmittelbar die oben angeführten Formeln.

Bei dieser Vorausberechnung wird es genügend sein, die Polhöhe des Beobachtungsorts bis auf einige Minuten zu kennen. Die entsprechende Chronometerzeit kann man alsdann leicht vermittelst des bekannten Standes des Chronometers finden. Bezeichnet man durch f den Abstand des Mittelfadens vom Seitenfaden in Zeitsecunden, durch T die Sternzeit des Antritts des Sterns an den Mittelfaden, durch z die Zenithdistanz des Sterns, durch $T + \mathfrak{d}T$ die Sternzeit des Antritts des Sterns an den Seitenfaden und durch $z + \mathfrak{d}z$ die entsprechende Zenithdistanz am Seitenfaden, so hat man genähert:

$$\mathfrak{d}T = \pm\frac{f}{\sin\varphi\sin z};\; \mathfrak{d}z = \pm 15\cos\varphi\,\mathfrak{d}T.$$

Um die richtigen Zeichen zu nehmen, muss man bemerken, dass nach dem Durchgange des Sterns durch den östlichen ersten Vertical die Zenithdistanzen abnehmen; dagegen nach dem Durchgange durch den westlichen zunehmen.

4) Muss man die Beobachtungen in beiden Lagen des Instruments, sowohl im Osten als auch im Westen, wie wir es oben erläutert haben, anstellen.

5) Muss man hinreichend genau den täglichen Gang des Chronometers gegen Sternzeit kennen.

6) Es ist nöthig, sich der unveränderlichen Lage des Instruments in Beziehung auf Azimuth zu versichern, und demnach muss man entweder dem Instrumente eine sehr feste Aufstellung geben, oder in dem ersten Verticale eine feste, zweckmässige Marke aufstellen, um danach das Azimuth des Fernrohrs berichtigen zu können.

1. Beispiel. Zur Bestimmung der Breite von Kronstadt wurden die Sterne γ und δ *Cassiopeae* in dem ersten Verticale beobachtet; das hierbei gebrauchte Chronometer und Durchgangsinstrument waren dieselben, mit welchen die Beobachtungen zur Zeitbestimmung angestellt wurden; folglich wird alles, was sich auf die Fädenintervalle und auf den Werth eines Niveautheiles u. s. w. bezieht, ganz so, wie in dem früheren Beispiel (§ 128, S. 336) bleiben; am Beobachtungstage verspätete sich das Chronometer täglich um $0^s,90$ gegen Sternzeit. Die Buchstaben *A* und *B* beziehen sich auf die Umlegung des Niveaus.

Datum der Beobachtung: 1843 am 9. August.

Erste Lage: Höhenkreis im Süden.

			Enden der Blase: nördlich	südlich	
Neigung der horizontalen Umdrehungsachse gegen den Horizont, am Niveau abgelesen; ein Theil des Niveaus war $= 1'',70$ in Bogen.	Objectiv nach Osten gerichtet	*A*	24,0	18,6	Theile
		B	25,0	17,4	—
	nach Westen gerichtet	*B*	24,8	17,6	—
		A	23,2	18,0	—
		$J' = +5'',36$ in Bogen.			

Durchgang der Sterne im Osten durch die Fäden:

	I	II	III	IV	V	Reducirter Mittelfaden
	h m s	m s	m s	m s	m s	h m s
γ Cassiopeae .	0 13 23	17 46	24 6	31 32	—	0 24 6,6
δ Cassiopeae .	0 20 32	23 6	26 21	29 19	32 44	0 26 20,9

Gleich darauf wurde aus Niveaubeobachtungen die Neigung $J' = 5'',56$ in Bogen gefunden.

Nachdem dieses geschehen war, wurde die Umdrehungsachse des Fernrohrs umgelegt, und dadurch das Instrument versetzt in die

Zweite Lage: Höhenkreis im Norden.

Ehe man die Beobachtungen anfing, bestimmte man die Neigung $J'' = -2'',10$ in Bogen.

Durchgang der Sterne im Westen durch die Fäden:

	I	II	III	IV	V	Reducirter Mittelfaden
	h m s	h m s	m s	m s	m s	h m s
γ Cassiopeae .	— —	1 1 2	9 55	15 26	20 21	1 9 55,4
δ Cassiopeae .	1 57 36	2 0 45	4 11	7 0	9 50	2 4 11,7

Bald nach der Beobachtung von *γ Cassiopeae* bestimmte man

die Neigung $J'' = -2'',08$ in Bogen.

Vor der Beobachtung von *δ Cassiopeae* fand man

die Neigung $J'' = -1'',50$ in Bogen.

Sogleich nach der Beendigung aller Beobachtungen wurde gefunden

die Neigung $J'' = -1'',10$ in Bogen.

Fadendistanzen in der Ordnung wie ein Stern im Osten, bei Höhenkreis im Süden, oder im Westen bei Höhenkreis im Norden, den ersten Vertical passirt:

I	II	IV	V
$f = +34^s,40$	$+18^s,74$	$-16^s,14$	$-33^s,33$ in Zeit.

Aus dem Pond'schen Cataloge findet man, für den 1. Januar 1830 die mittlere gerade Aufsteigung von *γ Cassiopeae* $= 0^h 46^m 30^s,77$, für *δ Cassiopeae* dagegen $1^h 14^m 45^s,77$; die mittlere nördliche Declination des Sterns *γ Cassiopeae* $= 59° 47' 39'',3$. Aus den Beobachtungen, welche zu Pulkowa angestellt wurden, findet man für den Anfang des Jahres 1841 die mittlere nördliche Declination von *δ Cassiopeae* $= 59° 24' 22''0$. Hieraus kann man mit Hülfe der jährlichen Präcession den mittleren Ort dieser beiden Sterne für den Anfang des Jahres 1843 finden und alsdann mit Hülfe des Nautical Almanac für 1843 ihren scheinbaren Ort für den 9. August 1843 bestimmen, wie folgt:

Scheinbare gerade Aufsteigung	Scheinbare nördl. Declin.
für *γ Cassiopeae* $0^h 47^m 21^s,49 = \alpha$	$59° 52' 2'',3 = \delta$
δ Cassiopeae 1 15 40,38 . . .	59 25 6 ,2 . . .

Die genäherte nördliche Breite des Beobachtungsorts $= \varphi = 59° 59',5$.

Zunächst müssen wir die an den Seitenfäden gemachten Beobachtungen auf den Mittelfaden reduciren; als Beispiel hierzu wollen wir die Reduction des vierten Fadens auf den Mittelfaden, bei der Beobachtung von *γ Cassiopeae* im Osten *in extenso* hersetzen, als der Verticalkreis im Süden war. Die Entfernung dieses Seitenfadens vom mittleren war $= f = 16^s,14$ in Zeit, oder $F = 0° 4' 2'',13$ in Bogen.

Aus den Formeln (1) und (2) § 135, S. 370 findet man, dass der östliche Stundenwinkel des Sterns *γ Cassiopeae*, im ersten Verticale, oder am Mittelfaden $= t = 5° 43' 48''$ war; wobei zugleich aus den Beobachtungen selbst folgt, dass dieser Stern um $7^m 26^s$ früher an den Mittelfaden als an den vierten Faden trat. Diese $7^m 26^s$ in Zeit oder $1° 51' 30''$ in Bogen,

drücken also genähert die Reduction des Seitenfadens auf den Mittelfaden aus, und die Ungenauigkeit dieser Reduction hängt vom Fehler der Beobachtungen ab. Der Stundenwinkel des Sterns bei seinem Durchgange durch den Seitenfaden, ist daher sehr nahe $= t' = t - 1^\circ 51' 30'' = 3^\circ 52' 18''$. Aber auf S. 324, § 122 haben wir erwähnt, dass, wenn man die in Chronometerzeit ausgedrückte Reduction durch $l_,$ bezeichnet und die tägliche Verspätung des Chronometers gegen Sternzeit $= r$ setzt, alsdann:

$$\sin \frac{15}{2} l_, = \mu \sin \tfrac{1}{2}(t - t') = \frac{\mu \sin F}{2 \cos \delta \sin \varphi \sin \frac{1}{2}(t + t')};$$

$$\text{wo } \mu = \frac{86400}{86400 + r} \text{ ist.}$$

Hier ist $F = 0^\circ 4' 2''.13$; $\delta = 59^\circ 52' 2''$; $\varphi = 59^\circ 59' 30''$; $\frac{1}{2}(t + t')$ sehr nahe $= 4^\circ 48' 3''$; $r = 0^s,9$ in Zeit und μ daher beinahe $= 1$. Die *logarithmische Differenz* bei $\log \sin \frac{1}{2}(t + t')$ für $+1''$ findet man aus den Tafeln $+0{,}000026$, und bei $\log \sin \frac{1}{2}(t - t')$ . . . $+0{,}000130$; oder respective $2{,}6 = \beta$ und $13 = \alpha$, die fünfte Decimalstelle als Einheit genommen. Nun ist aber:

$\log \left(\frac{\mu \sin F}{2 \cos \delta \sin \varphi} \right)$	$= 7{,}13036$
$\log \sin \frac{1}{2}(t + t')$ . . .	$= 8{,}92269$
$\log \mu \sin \frac{1}{2}(t - t')$ . .	$= 8{,}20767$
Correction $= -17{,}5 \times 2{,}6$	$= -44$
I. $\log \mu \sin \frac{1}{2}(t - t')$ . .	$= 8{,}20723$
Correction $= -3{,}5 \times 2{,}6$	$= -9$
II. $\log \mu \sin \frac{1}{2}(t - t')$.	$= 8{,}20714$
Correction $= -0{,}5 \times 2{,}6$	$= -1$
III. $\log \mu \sin \frac{1}{2}(t - t')$.	$= 8{,}20713$

hieraus $\mu \frac{1}{2}(t + t') = 0^\circ 55' 27'',5$
wir haben aber angenommen $0\ 55\ 45\ ,0$

folglich ist der Fehler in $\frac{t'}{2}$ oder in $\frac{1}{2}(t + t') =$ . . . . $+17'',5$

nach einer zweiten Berechnung $\mu \frac{1}{2}(t - t') = 0^\circ 55' 24''$; der Fehler in $\frac{t'}{2} =$ . . $+3'',5 = \frac{\beta}{\alpha} . 17'',5$

nach der dritten Berechnung $\mu \frac{1}{2}(t - t') = 0^\circ 55' 23'',5$; oder Fehler in dem angenommenen $\frac{t'}{2} = 0'',7 = \frac{\beta}{\alpha} . 3'',5$

Eine vierte Rechnung hätte die Correction $0'',7 \times \frac{\beta}{\alpha} = 0'',14$ gegeben, u. s. w. Also die ganze Correction des ursprünglich

angenommenen Werthes von $\mu\left(\frac{t-t'}{2}\right)$, oder von 0° 55′ 45″ wird der Summe

$$17'',5+3'',5+0'',7+0'',14+\ldots=17'',5\left(1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\beta^3}{\alpha^3}+\ldots\right)$$
$$=17'',5\frac{1}{\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

gleich sein. In unserem Fall ist $\frac{\beta}{\alpha}=0'',2$, und die gesammte Correction $=17'',5.\frac{1}{0,8}=21'',9$ ist folglich $\mu\left(\frac{t-t'}{2}\right)$ $=0°55'45''-21'',9$, oder $\mu(t-t')=1°50'46'',2=0^h7^m23^s,1$ in Zeit. Man sieht hieraus, wie die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden zu berechnen ist; hat man vorläufig $\mu\left(\frac{t-t'}{2}\right)$ $=A$ angenommen, und hat man nach der ersten Rechnung $\mu\left(\frac{t-t'}{2}\right)=B$ gefunden, so ist die ganze Correction von A durch die Formel:

$$(B-A)\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)},\text{ oder } B-A\cdot\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$$

vollständig ausgedrückt und auf einmal berechnet, wo α und β respective die Aenderungen der *log sin* ½ $(t-t')$ und *log sin* ½ $(t+t')$ für $+1''$ bedeuten.

Auf diese Weise sind folgende Reductionen gefunden worden:

Kr. Süd γ Cassiopeae im Osten: $+10^m43^s,0$; $+6^m19^s,5$; $-7^m23^s,1$; — —′—′.
Kr. Nord . . . im Westen: + — — ; +8 55,9; —5 32,0; —10 26,3.

Werden diese Zahlen zu den Durchgangszeiten des Sterns durch die entsprechenden Verticalfäden zugelegt, so hat man die Antrittsmomente an den Mittelfaden, wie sie einzeln aus den verschiedenen Beobachtungen folgen, und man bekommt für *γ Cassiopeae:*

Oestlicher Durchgang bei	*Westlicher Durchgang bei*
Kreis Süd . . $0^h 24^m 6^s, 0$	*Kreis Nord* . . $1^h 9^m 57^s, 9$
$5, 5$	$55, 0$
$6, 0$	$54, 0$
$9, 0$	$54, 7$
im Mittel $= 0^h 24^m 6^s, 6 = T'$	$1^h 9^m 55^s, 4 = T'$
Neig. der Achse $= +5,46 = J$	$-2,09 = J'$

Also $T' - T = 0^h 45^m 48^s,80$; die Verspätung der Uhr gegen Sternzeit im Laufe von $0^h 45^m 48^s,8$ ist hier $= 0^s,03 = \Delta u$; folglich $2t = T' - T + \Delta u = 0^h 45^m 48^s,83$; $t = 0^h 22^m 54^s,41$.

$\log \sin^2 \frac{1}{2} t = 7,39714$	$\varphi' - \delta = 0^\circ\ 7'\ 27'',5$
$\log (2 \sin \varphi \cos \delta) = 9,93923$	$\delta = 59\ 52\ 2\ ,3$
Summe $= 7,33637$	$\frac{1}{2}(J + J') = \ .\ .\ +1\ ,7$
$= \log \sin (\varphi' - \delta)$	Summe $= \varphi = 59^\circ 59' 31'',5$

Die Beobachtungen von *δ Cassiopeae* auf dieselbe Weise berechnet, geben $\varphi = 59^\circ 59' 30'',8$, also im Mittel $\varphi = 59^\circ 59' 31'',1$. Der Beobachtungsort lag $7'',1$ nördlicher als die Sternwarte des Steuermannscorps zu Kronstadt; folglich ist die Polhöhe dieser Sternwarte $= 59^\circ 59' 24'',0$.

Um den Collimationsfehler c zu berechnen, muss man auf die ungleiche Dicke der Zapfen der Horizontalachse Rücksicht nehmen. Bei unserem Instrumente war der Zapfen, auf welchem der Höhenkreis sass, der dünnere, und die Correction der Niveauablesungen x betrug $2'',1$. Folglich ist die Correction der abgelesenen Neigung $= -2'',1$ bei *Kreis Süd*, und $+2'',1$ bei *Kreis Nord*; also wird die verbesserte Neigung der Achse $= +5'',46 - 2'',10 = i$ bei *Kreis Süd*, und $= -2'',09 + 2'',10 = i'$ bei *Kreis Nord* sein. Die *AR* des Sternes ist hier $= 0^h 47^m 21^s,49 = \alpha$; die Uhrcorrection gegen Sternzeit, aus den Meridianbeobachtungen am 9. und 10. August abgeleitet, war $= +30^s,20 = u$ um $0^h 24$, und $= +30^s, 21 = u'$ um $1^h 10^m$ Sternzeit. Wenn wir daher die Neigung i, i' und den Collimationsfehler vernachlässigen, so ist der

östl. Stundenw. $= \alpha - T - u = 0^h 22^m 44^s,69 = t$; damit $\varphi' = 59° 59' 23'',5$;
westl. Stundenw. $= T' + u' - \alpha = 0\ 23\ \ 4,12$ . . . . $\varphi'' = 59\ 59\ 36'',1$;
Die Polhöhe $\varphi = \varphi' + i + c \sec z = \varphi'' + i' - c . \sec z$; $i = +3'',36$; $i' = +0'',01$
oder $59° 59' 26'',86 + c \sec z = 59° 59' 36'',11 - c . \sec z$,

wo z die Zenithdistanz des Sterns im ersten Verticale bedeutet. Im vorliegenden Falle ist $z = 2° 52',3$; $\sec z = 1,0013$; folglich $c = +4'',62$; $\varphi = 59° 59' 31'',48$; die durch den Mittelfaden gehende Gesichtslinie weicht daher um $4'',62$ von der senkrechten zur Umdrehungsachse ab, nach der Seite zu, auf welcher der Höhenkreis sitzt. Die Bestimmung des Collimationsfehlers ist noch etwas ungenau, wegen der kleinen Abweichung des Azimuths der Visirlinie des Fernrohrs von 90°.

Wünscht man das Azimuth zu bestimmen, so ist es vortheilhaft zu dieser Bestimmung einen mehr vom Zenithe entfernten Stern, im vorliegenden Falle δ *Cassiopeae*, zu benutzen. Nehmen wir den Collimationsfehler $c = 4'',50$ in Bogen an, wie er aus den Meridianbeobachtungen folgt, so erhält man aus den angeführten Beobachtungen:

Bei Kreis Süd:

Oestlicher Durchgang um	$0^h 26^m 20^s,9$	$= T$
Uhrcorrection	$+30,2$	$= u$
Abgelesene Neigung $i = +5'',46$ / Correction . . . $x = -2,10$ — $\dfrac{i+x}{15 \sin\varphi \,tg\, z}$	$= -2,3$	
Zenithdistanz $z = 6° 11',3$ . . / $c = +4'',5$ in Bogen . . . . — $\dfrac{c}{15 \sin\varphi \sin z}$	$= -3,0$	
Summe $= S =$	$0^h 26^m 45^s,8$	

Bei Kreis Nord:

Westlicher Durchgang um	$2^h 4^m 11^s,7$	$= T'$
Uhrcorrection	$+30,2$	$= u'$
Abgelesene Neigung $i' = -1'',30$ / Correction . . . $x = +2,10$ — $\dfrac{i'+x}{15 \sin\varphi \,tg\, z}$	$= +0,6$	
Zenithdistanz $= 6° 11',3$ . . / $c = -4'',5$ in Bogen . . . — $\dfrac{c}{15 \sin\varphi \sin z}$	$= -3,0$	
Summe $= S' =$	$2^h 4^m 39^s,6$	

Wenn das Fernrohr genau im ersten Verticale wäre, so würde die gerade Aufsteigung $\alpha = \frac{1}{2}(S + S')$ sein; für *δ Cassiopeae* ist aber am 9. August 1843: $\alpha = 1^h 15^m 40^s,38$; im vorliegenden Falle also wird $\eta = \frac{1}{2}(S + S') - \alpha = 2^s,32$ in Zeit, oder $= 34'',8$ in Bogen sein. Es sei Δa die Abweichung des Azimuthes des Fernrohrs von 90°; alsdann ist $tg \Delta a = sin \varphi \, tg \eta$. Hier ist $\varphi = 59° 59',5$; $\eta = 34'',8$; folglich $\Delta a = 30'',1$, und das südwestliche Azimuth des Fernrohrs $= 90° 0' 30'',1$. Der Fehler in der Polhöhen-Bestimmung, der von dieser Abweichung $= a$ herrührt, ist gleich $0'',01$.

Wenn im ersten Verticale eine Marke aufgestellt ist, so ist es zweckmässig, ausser den nahen am Zenithe gelegenen Sternen, die für die Polhöhen-Bestimmung benutzt werden, noch die Sterne mitzunehmen, welche den ersten Vertical weit vom Zenithe passiren, um mit deren Hülfe das Azimuth der Marke schärfer zu ermitteln.

2. Beispiel. Wir wollen sehen, wie man die Polhöhe bestimmt, ohne die Fadendistanzen zu kennen. Am 16. August 1843 wurden in Kronstadt folgende Beobachtungen der Durchgänge von *δ Cassiopeae* gemacht; J, J', J'', J''' bedeuten die unmittelbar am Niveau abgelesenen Neigungen der Horizontalachse.

$J = +1'',7$			$J'' = +1'',2$		
Ost-vertical	Faden	Durchgang	West-vertical	Faden	Durchgang
Kr. Süd.	*A*	$T = 0^h 20^m 18^s,5$	*Kr. Süd.*	*A*	$2^h\ 9^m 50^s,5 = T''$
	B	0 22 56		*B*	7 16,0
	C	0 26 9		*C*	— — —
Kr. Nord.	*C*	— — —	*Kr. Nord.*	*C*	$2^h\ 4^m\ 0^s$
	B	$0^h 29^m 38^s$		*B*	2 0 32
	A	$T' = 0$ 32 45		*A*	$1\ 57\ 24 = T'''$
$J' = -2'',7$			$J''' = -1'',6$		

Das Chronometer verspätete sich täglich um $1^s,74$ gegen Sternzeit; die Uhrcorrection war am 16. August um $1^h 15^m$ in Bezug auf Sternzeit $= +40^s,1$. Man hat also:

Für den Faden A:

$$
\begin{array}{llll}
T''-T \ldots = & 1^h 49^m 32^s,0 & T'''-T' \ldots = & 1^h 24^m 39^s,0 \\
\text{Gang der Uhr} \ldots & +0\ ,2 & & +0\ ,1 \\
\hline
2t' \ldots = & 1^h 49^m 32^s,2 & 2t \ldots = & 1^h 24^m 39^s,1
\end{array}
$$

$$\tfrac{1}{2}(t+t') = 0^h 48^m 32^s,8 = 12^\circ\ 8'\ 12'',0 = s$$

$$\tfrac{1}{2}(t'-t) = 0\ \ 6\ \ 13,25 = 1\ 33\ 18,7 = u$$

Declination des Sterns $= \delta = 59\ 25\ \ 7\ ,75$.

$$
\begin{array}{rl}
\log tg\,\delta = & 0,2284455 \\
\log sec\,s = & 0,0098174 \\
\log sec\,u = & 0,0001600 \\
\hline
\log tg\,\varphi' = & 0,2384229 \\
\varphi' = & 59^\circ 59' 31'',6 \\
\dfrac{J+J'+J''+J'''}{4} = & \ldots -0\ ,6 \\
\hline
\varphi = & 59^\circ 59' 31'',0
\end{array}
$$

Für den Faden B:

$$
\begin{array}{llll}
T''-T \ldots = & 1^h 44^m 20^s,0 & T'''-T' \ldots = & 1^h 30^m 54^s,0 \\
\text{Gang der Uhr} \ldots & +0\ ,1 & & +0\ ,1 \\
\hline
2t' \ldots = & 1^h 24^m 20^s,1 & 2t \ldots = & 1^h 30^m 54^s,1
\end{array}
$$

$$\tfrac{1}{2}(t'+t) = 0^h 48^m 48^s,55 = 12^\circ 12'\ 8'',2 = s$$

$$\tfrac{1}{2}(t'-t) = 0\ \ 3\ \ 21,50 = 0\ 50\ 17\ ,5 = u.$$

$$
\begin{array}{rl}
\log tg\,\delta = & 0,2284455 \\
\log sec\,s = & 0,0099244 \\
\log sec\,u = & 0,0000465 \\
\hline
\log tg\,\varphi' = & 0,2384164 \\
\varphi' = & 59^\circ 59' 30'',5 \\
\dfrac{J+J'+J''+J'''}{4} = & \ldots -0\ ,6 \\
\hline
\varphi = & 59^\circ 59' 29'',9
\end{array}
$$

Für den Faden C (Mittelfaden) bekommt man die halbe Zwischenzeit der beiden Durchgänge + Gang der Uhr $= 0^h\,48^m\,55^s{,}6$ $= t$; oder in Bogen $t = 12°\,13'\,54''$;

$$\begin{array}{rlrl} & & \varphi' = & 59°\,59'\,30'',6 \\ \log tg\,\delta = & 0{,}2284455 & \frac{J+J'''}{2} \;\ldots\ldots & +0\;,0 \\ \log sec\,t = & 0{,}0099725 & & \\ \hline \log tg\,\varphi' = & 0{,}2384180 & \varphi = & 59°\,59'\,30'',6 \end{array}$$

Da an jedem Seitenfaden doppelt so viele Beobachtungen gemacht wurden, als am Mittelfaden, so ist das Gewicht der letzteren Bestimmung nur halb so gross, als das Gewicht der beiden anderen Bestimmungen, und damit die wahrscheinlichste Polhöhe des Beobachtungsorts $= 59°\,59'\,30'',5$.

Anhang.

Die Besselsche Methode, die Polhöhe durch das Passageninstrument zu bestimmen, wird vorzüglich bei den Breitengradmessungen angewandt; wenn die letzteren aber eine bedeutende Ausdehnung haben, so werden die Sterne, welche nahe am Zenithe eines Orts durch den ersten Vertical passiren, weit vom Scheitel des andern Orts durchgehen; zugleich werden auch die Zeitintervalle zwischen den östlichen und westlichen Durchgängen sehr rasch zunehmen. Will man nicht dieselben Sterne an beiden Orten beobachten, so bleiben die Polhöhenunterschiede mit dem Fehler der angenommenen Declination der Sterne vermischt. Es scheint uns vortheilhafter, einen Stern zu wählen, dessen Declination nahezu der Halbsumme, der Polhöhen beider Endpunkte der Gradmessung gleich ist, und in einem (weiter vom Aequator liegenden) Orte, den Stern im ersten Verticale, am

zweiten Orte aber den Stern in der Nähe der grössten Ausweichung vom Meridiane zu beobachten. Im letzteren Falle kann man folgendermassen verfahren, um den Einfluss der Fehler des Instruments möglichst zu beseitigen. Man stellt das Instrument in einem östlichen Azimuthe fest, welches etwas kleiner als das grösste Azimuth ist, bis zu welchem der Stern gelangen kann, und zwar um so viel als nöthig ist, damit der Stern kurz vor seiner Digression, oder grössten Ausweichung, durch drei oder fünf Verticalfäden passiren kann. Dann werden die Durchgangszeiten beobachtet; erstens vor der östlichen Digression und zweitens bald nach dieser Digression. Nun wird die Horizontalachse umgelegt und das Instrument in einem ebenso grossen westlichen Azimuthe festgestellt, welches dem früheren östlichen Azimuthe nahezu gleich sein muss; in dieser Lage beobachtet man wieder die Antrittsmomente des Sterns an den Verticalfaden sowohl vor, als nach der grössten westlichen Digression des Sterns. Es versteht sich von selbst, dass die Neigung der Horizontalachse jedesmal sorgfältig durch das Niveau bestimmt werden muss. Der Einfluss der Fehler des Instruments kann auch eliminirt werden, wenn man das Instrument im Osten und Westen in beiden Lagen benutzt, nur muss man im Westen die Beobachtungen bei derselben Lage der Achse anfangen, bei welcher man im Osten die Beobachtungen beendigt hatte.

Es seien t und t' die östlichen Stundenwinkel zur Zeit der beiden Durchgänge des Sterns durch denselben Verticalkreis, dessen Azimuth von Norden gerechnet $= A$ ist, δ sei die Declination des Sterns und φ die (nördliche) Polhöhe, so kömmt:

$$cotg\, A = \frac{tg\,\delta\, cos\,\varphi - sin\,\varphi\, cos\, t}{sin\, t} = \frac{tg\,\delta\, cos\,\varphi - sin\,\varphi\, cos\, t'}{sin\, t'},$$

woraus folgt:

$$tg\,\varphi = tg\,\delta \cdot \frac{cos\,\frac{1}{2}(t+t')}{cos\,\frac{1}{2}(t-t')}$$

Ein ähnlicher Ausdruck folgt auch aus den westlichen Beobachtungen. Da der östliche Stundenwinkel $= \alpha - s$, der

westliche aber $= s - \alpha$ ist, wo s die Sternzeit der Beobachtungen und α die *AR* des Sterns bedeuten; so sieht man, dass das arithmetische Mittel aus beiden Polhöhenbestimmungen unabhängig von den kleinen constanten Fehlern der Uhrcorrection wird.

Wie man sich zur Beobachtung vorbereitet und wie man die Rechnung zu führen hat, wird das folgende Beispiel zeigen. Am 18. August 1849 wurde *α Cephei* in Pulkowa im Osten und Westen, weit vom Meridiane mit einem kleinen Ertelschen Passageninstrumente beobachtet. Die Polhöhe in Pulkowa ist $\varphi = 59°46'18''$; am 18. August 1849 war nach dem Nautical Almanac die scheinbare *AR* von *α Cephei* $= \alpha = 21^h 15^m 2^s,4$ und die Declination $\delta = 61°57'7''$. Bezeichnen wir durch N die Entfernung des Verticalkreises vom Pole, und durch A und τ das Azimuth und den Stundenwinkel zur Zeit der grössten Ausweichung des Sterns vom Meridiane, so kömmt:

$$N = 90° - \delta;\ \sin A = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi};\ \cos\tau = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta}.$$

Im vorliegenden Fall ist $A = 69°8'5$; $\tau = 23°52'5$ $= 1^h 35^m 30^s$. Aus der strengen Besselschen Formel für die Fadenreduction (§ 118, S. 318) finden wir, dass für $N = 90° - \delta$, $\sin\frac{1}{2}(s - s') = \sqrt{\frac{\sin F}{\sin 2\delta}}$ sein wird, wo F die Fadendistanz in Bogen, und $s - s'$ der in Bogen ausgedrückte Unterschied der Sternzeiten der Durchgänge durch den Mittel- und Seitenfaden ist. Setzen wir $F = 0°10'40''$, wie es bei uns nahezu für den ersten und letzen Faden der Fall war, so kömmt $s - s' = 7°0'40''$ $= 0^h 28^m 2^s,7$. Die *AR* von *α Cephei* $= 21^h 15^m 2^s,4$; folglich ist die Sternzeit der östlichen Digression $= 19^h 39^m 32^s,4$; die Sternzeit der westlichen $= 22^h 50^m 32^s,4$; also kommt der Stern an den ersten Faden im Osten ungefähr um $19^h 11^m$, im Westen um $22^h 22^m$ Sternzeit, oder etwas früher; die entsprechenden Zenithdistanzen sind $z = 15°6'$ und $z = 8°16'$.

Der Ort des Meridians wurde durch den Polarstern *α Ursae*

Minoris gefunden, und das Instrument war im Azimuthe $= 68° 50',5$ eingestellt. Die Uhrcorrection gegen Sternzeit wurde durch die Vergleichung des Chronometers mit der Normaluhr der Sternwarte $= - 2^m 27^s,0$ gefunden; da aber die Sterne *δ Ursae Minoris* und *α Lyrae* um 18½, die Sterne *α Cephei*, *β Cephei* und *ε Pegasi* dagegen zwischen $21^h 15^m$ und $21^h 37^m$ culminiren, so wäre es leicht gewesen, die Uhrcorrection beim Anfange der Beobachtungen in einer Lage des Instruments und in der Zwischenzeit, zwischen den östlichen und westlichen Durchgängen in der andern Lage des Instruments zu bestimmen.

Aus vielen Meridianbeobachtungen wurde gefunden, dass in der oberen Culmination bei Kreis Ost die Fadendistanzen vom Mittelfaden waren:

I	II	IV	V
$+10' 37''$	$+5' 26''$	$-5' 5'',5$	$-10' 41''$ in Bogen.

Dieselbe Reihenfolge der Fäden gilt bei Kreis Nordost vor der westlichen Digression, oder bei Kreis Südost, nach der östlichen Digression.

Ein Theil des Niveaus war $= 4'',1$. Die tägliche Acceleration des Chronometers $= 0^s,6$ gegen Sternzeit.

Der Kürze halber wollen wir nur die westlichen Beobachtungen anführen und berechnen. Das südwestliche Ende der Umdrehungsachse des Fernrohrs war jedesmal das höhere. Der Faden III ist der Mittelfaden.

Datum der Beobachtung: 1849 am 18. August.

Neigung der Achse $= 10'',4$

Kreis Nordost	Faden	Sternzeit des Durchgangs	Stundenwinkel
α Cephei	I	$22^h 20^m 17^s,0$	$16° 18' 39'',0$
im Westen	II	27 10 ,5	18 2 1 ,5
	III	37 40 ,5	20 39 31 ,5

Neigung der Achse $= 11'',6$

Neigung der Achse = 9″,1

Kreis Südwest	Faden	Sternzeit des Durchgangs	Stundenwinkel
α Cephei im Westen	III	$23^h\ 5^m 57^s,0$	27° 43′ 39″,0
	IV	15 38 ,0	30 8 54 ,0
	V	23 2 ,0	31 59 54 ,0

Neigung der Achse = 9″,9.

Aus diesen Beobachtungen lässt sich erstens der Collimationsfehler C der Absehenslinie ableiten. Berechnet man das nordwestliche Azimuth A für die Sternzeiten der Durchgänge durch den Mittelfaden (III), so findet man $A = 68°\,51'\,6''$ bei Kreis Nordost, oder zur Sternzeit $22^h\,37^m\,40^s,5$, und $A = 68°\,50'\,5''$ bei Kreis Südwest, oder zur Sternzeit $23^h\,5^m\,58^s.0$. Da aber das Azimuth des Fernrohrs unverändert blieb, so kann der Unterschied in den berechneten Azimuthen nur von dem Collimationsfehler C und von der Neigung der Achse herrühren. Im Mittel ist die Neigung der Achse = 11″,0 bei Kreis Nordost und = 9″,5 bei Kreis Südwest; und beidemal war das südwestliche Ende der Achse das höhere; um $22^h\,37^m\,40^s,5$ und $23^h\,5^m\,58^s$ Sternzeit waren die Zenithdistanzen von *α Cephei* = 10° 15′ und 13° 34′; man bekommt also die Bedingungsgleichung (§ 78, S. 193):

$$68°\,51'\,6'' + \frac{11''}{tg\,10°\,15'} - \frac{C}{sin\,10°\,15'}$$
$$= 68°\,50'\,5'' + \frac{9'',5}{tg\,13°\,34'} + \frac{C}{sin\,13°\,34'},$$

woraus $C = 8'',2$ in Bogen folgt, und die Absehenslinie neigt sich also von der senkrechten Linie zur Umdrehungsachse nach der Seite des Ocularendes der Achse hin. Folglich ist das nordwestliche Azimuth des Fernrohrs = 68° 51′ 23″. In den Formeln (1) bis (5) des § 116, S. 312 bedeutet A das Azimuth von Norden nach Osten gerechnet, und J den Abstand des auf der Umdrehungsachse senkrecht stehenden grössten Kreises vom

Zenithe; positiv, wenn das westliche Ende der Achse das höhere ist; im vorliegenden Falle wird also $A = -68°51'23''$ und $J = +11''$ bei Kreis Nordost, $J = +9'',5$ bei Kreis Südwest. Berechnen wir:

$$\sin N_{,} = \cos\varphi \sin A;\ tg M_{,} = -\sin\varphi . tg A;$$
$$N = N_{,} + \frac{J . \sin\varphi}{\cos N_{,}};\ M = M_{,} + \frac{J \cos\varphi \cos M_{,}}{\cos N_{,}},$$

so kommt $N = -28°0'3$; $M = +65°53'10''$. Damit bestimmt man die Fädenreductionen nach der Formel:

$$\sin\tfrac{1}{2}(t_{,}-t) = \frac{\sin F}{2\cos\delta\cos N\cos\left(M+\frac{t+t_{,}}{2}\right)},$$

wo F den Fadenabstand bezeichnet, und t und $t_{,}$ die westlichen Stundenwinkel bei den Antritten des Sterns an den Mittel- und Seitenfaden bedeuten; bei der Berechnung verfährt man so, wie wir oben (§ 139, S. 390) erklärt haben. Auf diese Weise bekommen wir die Reductionen:

bei Kreis Nordost $-17^m 23^s,0$; $-10^m 29^s,9$;
bei Kreis Südwest $+\ 9\ 45\ ,3$; $+17\ \ 9\ ,7$.

Damit findet man den Durchgang des Sterns durch den Mittelfaden:

bei Kreis Nordost	bei Kreis Südwest
$22^h 37^m 40^s,0$ St.-Zeit	$23^h 5^m 57^s,0$ St.-Zeit
$40\ ,4$	$52\ ,7$
$40\ ,5$	$51\ ,3$
im Mittel $= 22^h 37^m 40^s,3$	im Mittel $= 23^h 5^m 53^s,67$

Der parallactische Winkel q wird nach der Formel $\sin q = \frac{\sin A \cos\varphi}{\cos\delta}$ berechnet, wo statt A sein numerischer Werth zu setzen ist; im ersten Fall wird $q = 93°2'$, im zweiten $q = 86°58'$ sein. Die Correction des Durchgangs, welche von der Neigung

der Umdrehungsachse abhängt, ist $= \frac{-J.\cos z}{15\cos\delta\cos q}$, wenn das westliche Ende das höhere ist und z die Zenithdistanz bedeutet (§ 64, S. 152); der parallactische Winkel q ist ein stumpfer Winkel zwischen der oberen Culmination des Sterns und seiner grössten östlichen oder westlichen Ausweichung vom Meridiane.

Die Correction wegen des Collimationsfehlers C wird ebenso wie die Fadenreduction berechnet, wenn man $F = C$ setzt; da die Reduction eines Fadens, welcher $0°5'5'',5$ vom Mittelfaden absteht, $0^h 9^m 45^s,3$ beträgt, so muss der Einfluss des Collimationsfehlers $C = 8'',2$ ungefähr $0^h 0^m 15^s,7$ oder nahezu $4'$ in Bogen ausmachen; in unserem Falle muss daher die genannte Correction

$$= \frac{\pm 8'',5}{15\cos\delta\cos N\cos(M+t\pm 0°2')}$$

sein, wo t den westlichen Stundenwinkel des Sterns beim Durchgange durch den Mittelfaden bedeutet.

Es findet sich demnach:

	bei Kr. Nordost	bei Kr. Südwest
Durchg. durch den Mittelf.:	$22^h 37^m 40^s,3$ . .	$23^h\ 5^m 53^s,7$ St.-Zeit
Correction wegen des Collimationsfehlers	$-21,4$	$-20,6$
Correction wegen der Neigung der Achse	$+28,8$	$-24,5$
	$22^h 37^m 47^s,7$	$23^h\ 5^m\ 8^s,6$
Scheinbare *AR* *α Cephei*	21 15 2,4	21 15 2,4
Stundenwinkel	$1^h 22^m 45^s,3$	$1^h 50^m\ 6^s,2$
Stundenwinkel	$20°41'19'',5 = t$;	$27°31'33'',0 = t'$

$s = \frac{t+t'}{2} = 24°\ 6'26'',5$ $\log\cos = 9,960367$

$\frac{t'-t}{2} = 3\ 25\ 6,7$ $C\log\sec = 0,000774$

$\delta = 61\ 57\ 6,7$ $\log tg\,\delta = 0,273445$

$\varphi = 59\ 46\ 21,0$ $\log tg\,\varphi = 0,234586$

Der Beobachtungsort lag ungefähr 2″ nördlich von der Mitte der Sternwarte; folglich wird die Polhöhe der Sternwarte = 59° 46′ 19″, welche Bestimmung nur um 1″ von der wahren Polhöhe abweicht.

Vierter Abschnitt.

Von der Bestimmung des Azimuths eines gegebenen irdischen Gegenstands.

---

140. Oft wird es nöthig werden, den Winkel zu bestimmen, welchen der Meridian mit derjenigen Verticalebene bildet, die durch den Ort des Beobachters und einen gegebenen Gegenstand geht; dieser Winkel heisst das Azimuth und entspricht dem Bogen auf dem Horizonte, welcher zwischen dem Meridiane und der eben erwähnten Ebene liegt.

Wenn der Gegenstand dem Meridiane selbst sehr nahe liegt, so kann man sein Azimuth dadurch sehr scharf finden, dass man das Fernrohr des Durchgangsinstruments genau auf diesen Gegenstand richtet und alsdann in beiden Lagen der Umdrehungsachse eben solche Beobachtungen anstellt, wie wir schon mit Hülfe des Durchgangsinstruments bei der Zeit- und Azimuthbestimmung abgehandelt haben.

Auch kann man sehr scharf das Azimuth des Gegenstandes bestimmen, wenn er in irgend einer Verticalebene liegt, die von einem in der Nähe des sichtbaren Weltpols befindlichen Sterne bei seiner täglichen scheinbaren Bahn passirt wird; denn in

diesem Falle kann man die Zeit und auch das Azimuth gerade so finden, wie wir es in § 129 — 130, S. 340 — 344 gezeigt haben.

Hat endlich der Gegenstand eine ganz beliebige Lage, so kann man sehr nahe dem Meridiane selbst ein Abzeichen aufstellen und darauf das Azimuth dieses Abzeichens nach dem oben Gesagten bestimmen. Man misst darauf den horizontalen Winkel, welcher zwischen diesem Abzeichen und dem gegebenen Gegenstande eingeschlossen ist, und addirt darauf zu diesem Winkel das obige gefundene Azimuth mit seinem gehörigen Zeichen hinzu; auf diese Weise erhält man das gesuchte Azimuth des Gegenstandes.

Uebrigens genügt es in den meisten Fällen, einen passenden Stern zu wählen und zu einer beliebigen Zeit seinen Durchgang durch den verticalen Mittelfaden, zugleich aber die Niveauangaben zu bemerken und die Verniere oder Mikroskope an dem Horizontalkreise eines Universalinstruments abzulesen. Es bleibt dann nur übrig, das Azimuth des Sterns zu berechnen und den horizontalen Winkel zwischen dem gegebenen Gegenstande und dem bekannten Gestirne zu messen; die bei dieser Messung zu befolgenden Vorschriften haben wir schon früher in § 76—79, S. 187—194 erläutert. Wenn die Sternzeit der Beobachtung $= s$, die Breite des Orts $= \varphi$, die gerade Aufsteigung des Gestirns $= \alpha$, und seine Declination $= \delta$ bekannt sind, so kann man leicht das Azimuth des Gestirns $= A$, von Norden nach Osten gezählt, wenn die Polhöhe des Beobachtungsorts eine nördliche ist, oder von Süden nach Osten gezählt, wenn die Polhöhe eine südliche ist, berechnen, indem

$$tg A = \frac{\sin t}{\cos\varphi \, tg\,\delta - \sin\varphi \cos t}, \text{ wo } t = \alpha - s \text{ ist} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Hier bezeichnet s die Sternzeit der Beobachtung ebenso, wie α in Graden ausgedrückt; man braucht diese Formel vorzüglich dann, wenn A einen kleinen Werth hat. In anderen Fällen

bedient man sich statt der vorhergehenden Formel bequemer der folgenden:

$$\left.\begin{aligned} tg\tfrac{1}{2}(A+q) &= \frac{cotg\tfrac{1}{2}t\,.\,cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)}{sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)} \\ tg\tfrac{1}{2}(A-q) &= \frac{cotg\tfrac{1}{2}t\,.\,sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\delta)}{cos\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta)} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2),$$

worin auch das Azimuth von Norden nach Osten gezählt wird, wenn der sichtbare Weltpol der nördliche ist.

Wenn wir die Sonne beobachtet hätten, so würde t oder der östliche Stundenwinkel der Sonne gleich dem Supplemente der wahren Zeit in Graden ausgedrückt zu 360° werden, wobei vorausgesetzt ist, dass die wahre Zeit vom wahren Mittage an bis zum folgenden Mittage ununterbrochen fortgezählt wird. In unseren obigen Formeln (2) bestimmt man die gesuchten Bögen vermittelst ihrer Tangenten, und wenn daher in beiden Gleichungen die Zähler und Nenner positiv sind, so liegen die Bögen im ersten Quadranten; wenn der Zähler positiv, der zugehörige Nenner aber negativ ist, so wird der entsprechende Bogen zwischen 90° und 180° liegen; wenn der Zähler aber negativ, und sein zugehöriger Nenner auch negativ ist, so liegt der Bogen zwischen 180° und 270°, und wenn endlich der Zähler negativ, der Nenner aber positiv ist, so liegt der Bogen zwischen 270° und 360°.

Hat man nun A gefunden, und legt es mit seinem zugehörigen Zeichen zum gemessenen horizontalen Winkel hinzu, so erhält man das gesuchte Azimuth des terrestrischen Gegenstandes.

141. Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Umständen man die genaueste Azimuthbestimmung zu erwarten hat.

Wir wollen annehmen, dass t, δ und φ kleine Fehler $\mathfrak{d}t$, $\mathfrak{d}\delta$ und $\mathfrak{d}\varphi$ enthielten, welche in A einen Fehler $= \mathfrak{d}A$ hervorbringen würden, und haben alsdann durch die Differenziation der Formel $cotg\,A$ aus (1) die folgende Relation:

$$\delta A = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 t}(\cos t \cos\varphi\, tg\,\delta - \sin\varphi).\delta t - \frac{\cos\varphi}{\sin t}\cdot\frac{\sin^2 A}{\cos^2\delta}\cdot\delta\delta$$
$$+\frac{\sin^2 A}{\sin t}(\sin\varphi\, tg\,\delta + \cos\varphi \cos t).\delta\varphi;$$

oder auch in Folge der Gleichungen auf S. 17:

$$\delta A = -\frac{\cos\delta}{\sin z}\cos q.\delta t - \frac{\cos\varphi.\sin t}{\sin^2 z}\cdot\delta\delta + \frac{\sin A}{tg\,z}\cdot\delta\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wo z die wahre Zenithdistanz des Gestirns und q der Winkel ist, welcher zwischen dem Höhenkreise und Declinationskreise enthalten ist. Hieraus sieht man im Allgemeinen, dass unter sonst gleichen Umständen der Fehler in der Bestimmung des Azimuths mit der Abnahme der Zenithdistanzen wächst.

Für solche Sterne, die dem sichtbaren Pole des Aequators sehr nahe sind, ist $\cos\delta$ immer eine sehr kleine Grösse, und wenn man die Beobachtungen in Gegenden anstellt, deren Breite namhaft von 90° verschieden ist, so wird für die eben erwähnten Sterne $\sin A$ sehr klein in Vergleich zu $\sin z$ sein; folglich sehen wir aus der Gleichung (3), dass ein kleiner Fehler im Stundenwinkel und ein kleiner Fehler in der Breite des Orts, in solchen Fällen wenig Einfluss auf die Azimuthbestimmung haben wird. Bei der grössten Abweichung eines Circumpolarsterns vom Meridiane wird der Höhenkreis den täglichen Parallel des Sterns berühren und folglich mit dem Declinationskreise einen rechten Winkel bilden; alsdann wird also $q = 90°$, und das Glied, welches in (3) vom Fehler des Stundenwinkels herrührt, daher verschwinden; die Glieder dagegen, welche von dem Fehler in der Declination und in der Breite abhängen, erreichen um diese Zeit beinahe ihre allergrössten Werthe. Es ist übrigens leicht einzusehen, dass, wenn die Beobachtungen zur Zeit der grössten östlichen sowohl als grössten westlichen Abweichung des Sterns vom Meridiane angestellt werden, alsdann auch der Einfluss der Fehler $\delta\delta$ und $\delta\varphi$ im mittleren Resultate bei dem gesuchten Azimuthe verschwinden wer-

den. Ebenso heben sich überhaupt diese Fehler im mittleren Resultate, welches aus Beobachtungen bei gleichen und entgegengesetzten Azimuthen abgeleitet wird, gegenseitig in jedem Falle auf; nur der eine Fehler, welcher von einer Ungenauigkeit der Sternzeit s herrührt, wird hierbei nicht weggeschafft werden können, es sei denn, dass der Stern sich in beiden Fällen in seiner grössten Abweichung befunden hätte. Im Meridian erreicht nun dieses Glied das Maximum seines Werthes, in allen anderen Fällen wird es kleiner sein, und um so kleiner werden, je mehr die Breite das Orts abnimmt.

Also fällt im Allgemeinen die günstigste Beobachtungszeit für einen Stern, welcher zwischen Pol und Zenith culminirt, oder dessen Declination δ grösser als die Polhöhe φ ist, mit seiner grössten Abweichung vom Meridiane zusammen, d. h. also, wenn der Stundenwinkel t durch die Gleichung:

$$\cos t = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta}$$

bestimmt wird.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung eines Gestirns über, dessen Declination kleiner als die Polhöhe ist, und wir wollen auch in diesem Fall untersuchen, zu welcher Tageszeit ein Fehler in dem Stundenwinkel den kleinsten Einfluss auf die Azimuthalbestimmung äussert.

Es ist klar, dass dieses dann stattfinden muss, wenn die Azimuthänderung nach der Zeit ein Minimum sein wird; dieses, analytisch ausgedrückt, heisst aber so viel, als dass die numerische Grösse von $\frac{dA}{dt}$ ein Minimum werden soll, und man weiss nach den Grundsätzen des Differenzialcalcüls, dass alsdann $\frac{d^2A}{dt^2} = 0$ sein muss*). Es ist aber $\frac{dA}{dt} = -\frac{\cos\delta}{\sin z}\cos q$, und wenn wir

*) Es ist allgemeiner, die Bedingung des Minimums durch die

$z = 90° - h$ setzen, wo h die Höhe des Gestirns bedeutet, so wird nach § 6, S. 17

$$\cos q = \frac{\sin\varphi - \sin\delta \sin h}{\cos h \cos\delta}; \quad \cos h \frac{dh}{dt} = -\sin t . \cos\varphi \cos\delta;$$

folglich:
$$\frac{dA}{dt} = -\frac{(\sin\varphi - \sin\delta \sin h)}{\cos^2 h}$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\frac{(2\sin\varphi \sin h - \sin\delta - \sin\delta \sin^2 h)}{\cos^4 h} . \cos h \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = -\frac{(2\sin\varphi \sin h - \sin\delta - \sin\delta \sin^2 h) \sin t \cos\varphi \cos\delta}{\cos^4 h}$$

Die Bedingung: $\frac{d^2A}{dt^2} = 0$ schliesst sowohl ein Maximum als auch ein Minimum des Werthes $\frac{dA}{dt}$ in sich; wir wissen aber, dass $\frac{dA}{dt}$ ein Maximum im Meridian wird, d. h., wenn also $\sin t = 0$ ist; folglich haben wir als Bedingung eines Minimums die nachfolgende Gleichung:

$$2\sin\varphi \sin h - \sin\delta - \sin\delta \sin^2 h = 0, \text{ oder auch}$$

$$\sin h = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2\delta}{\sin^2\varphi}}\right);$$

Gleichung: $\frac{d\left(\frac{dA}{dt}\right)^2}{dt} = 0$ auszudrücken; diese Gleichung ist gleichbedeutend mit $\frac{dA}{dt} \cdot \frac{d^2A}{dt^2} = 0$ und zerfällt also in zwei andere: $\frac{dA}{dt} = 0$ und $\frac{d^2A}{dt^2} = 0$; die erste gilt für diejenigen Sterne, welche zwischen Pol und Zenith culminiren und da $\frac{dA}{dt} = -\frac{\cos\delta}{\sin z}\cos q$, so ist die günstigste Zeit für die Azimuthbestimmung dann, wenn $q = 90°$, oder wenn $\cos t = tg\,\varphi \cot g\,\delta$; t wird hier imaginär, wenn $\delta < \varphi$ ist; in solchen Fällen wird die Bedingung des Minimums durch die Gleichung $\frac{d^2A}{dt^2}$ ausgedrückt, welche im Texte weiter entwickelt ist. Diese Bemerkung verdanken wir dem Herrn Knorre.

wir dürfen das positive Zeichen (+) bei der Quadratwurzel nicht brauchen, weil $sin\,h < 1$ sein muss; ferner muss noch die Declination gleichnamig mit der Breite sein, denn im entgegengesetzten Falle würde h negativ und daher $\frac{dA}{dt}$ kein Minimum werden können. Wenn aber die Höhe des Gestirns im ersten Vertical $= h'$ ist, so wissen wir, dass alsdann $sin\,h' = \frac{sin\,\delta}{sin\,\varphi}$; folglich werden wir erhalten:

$$sin\,h = \frac{1 - cos\,h'}{sin\,h'}, \text{ oder } sin\,h = tg\,\tfrac{1}{2}h',$$

d. h. die Azimuthänderung eines Gestirns ist alsdann ein Minimum in Beziehung auf die Zeit, wenn der Sinus der Höhe des Gestirns gleich der Tangente der halben Höhe des Gestirns im ersten Verticale sein wird, und verursacht also in diesem Falle ein kleiner Fehler im Stundenwinkel den geringsten Einfluss auf die Azimuthbestimmung.

142. Die Art und Weise, wie man die Beobachtungen anstellen muss, wurde umständlich in § 69—78, S. 167—194 erörtert. Wenn man einen Stern, der dem Pole des Aequators sehr nahe ist, beobachtet, so muss man, um nicht zu viel Zeit zu verlieren, nur seinen Durchgang durch den Mittelverticalfaden beobachten; bei der Beobachtung eines anderen Sterns dagegen kann man seine Durchgänge durch alle Fäden bemerken und diese alsdann auf den Mittelfaden reduciren; übrigens kann man auch in diesem Falle sich meistens mit der Beobachtung des Antritts an den Mittelfaden begnügen, denn in den meisten Winkelmessinstrumenten ist die Genauigkeit der Gradtheilung und die Ablesung der Verniere oder Mikroskope weniger genau, als die Beobachtung der Zeit des Durchgangs eines nur einigermassen vom Pole entfernten Sterns, auch wenn man nur den Antritt an einen Verticalfaden beobachtet.

Aus dem eben Gesagten kann man nun folgende allgemeine

Vorschriften ableiten, die man stets bei der Bestimmung des Azimuths im Auge behalten muss:

1) Muss man vorzugsweise solche Sterne beobachten, deren Polardistanz klein ist, und sollte die Zeit nicht sehr genau bestimmt sein, so muss man, wenn es thunlich ist, diese Sterne in der Gegend ihrer allergrössten Abweichung vom Meridiane beobachten, denn alsdann wird ein Fehler im Stande des Chronometers von 2^s und noch mehr, beinahe gar keinen Einfluss haben. Die Sterne α, δ im kleinen Bären sind diejenigen, welche man auf unserer nördlichen Halbkugel hierzu gewöhnlich benutzt.

2) Wenn man einen vom Pole des Aequators entfernten Stern oder auch die Sonne beobachtet, und diese Gestirne positive Declination haben, so ist es am besten, die Beobachtungen vor ihrem östlichen, oder nach ihrem westlichen Durchgange durch den ersten Vertical anzustellen, nämlich zu der Zeit, wenn die Azimuthänderung nach der Zeit ein Minimum ist; man muss aber vermeiden, das Gestirn zu nahe am Horizonte zu beobachten, weil alsdann das Bild des Sterns im Fernrohre undeutlich und unruhig erscheinen wird. Wenn das Gestirn eine negative Declination hat, so ist es ebenfalls vortheilhaft, dieses Gestirn je nach den Umständen in einiger Entfernung vom Meridiane zu beobachten; jedoch wird in diesem Falle der Unterschied der Genauigkeit nicht sehr gross sein.

3) Um den Einfluss der Ungenauigkeit in der Declination und der Breite des Orts auf die Azimuthbestimmung zu vernichten, muss man die Beobachtungen bei gleichen und entgegengesetzten Azimuthen anstellen.

4) Die Angaben der Mikroskope am Horizontalkreise muss man vorher vom Einflusse des Collimationsfehlers, den man durch die Beobachtung eines irdischen Gegenstandes herleitet, und ebenso vom Einflusse der Neigung der horizontalen Umdrehungsachse gegen den Horizont $= J$ befreien. Aus § 73, S. 179 erhellt es, dass, wenn die Theilung auf dem Horizontalkreise von links

nach rechts zunimmt, so muss man $J \cot g\, z$ zur Ablesung zulegen, sobald man einen Polarstern beobachtet und das Westende der Achse (oder das linke) höher als das Ostende liegt; dagegen wird für einen südlichen Stern diese Correction $J \cot g\, z$ auf der nördlichen Halbkugel positiv, wenn das Ostende höher als das Westende liegt.

Beispiel. In dem folgenden Paragraphen (§ 143) werden wir ein sehr belehrendes Beispiel zur Bestimmung des Azimuths eines terrestrischen Gegenstandes vermittelst des Polarsterns geben und wollen daher hier nur ganz kurz ein Beispiel anführen, um zu zeigen, wie man das Azimuth eines Objects durch Beobachtungen der Sonne bestimmen kann.

Am 25. August 1837 wurde in der Nähe von Ekatherinograd das Azimuth des Kasbeks, eines Berges im Kaukasus, durch Beobachtungen der Sonne an einem Universalinstrumente bestimmt.

Die östliche Länge des Beobachtungsorts von Greenwich kann man $= 2^h 57^m 12^s$ in Zeit annehmen, und aus den gemessenen Höhen der Sonne und mehrerer Sterne wurde die Breite dieses Orts $= \varphi = 45° 45' 47'',2$ gefunden. Am 25. August 1837 um $6^h 4^m 44^s,80$ mittlere Zeit zu Ekatherinograd zeigte das Chronometer $5^h 46^m 0^s$, und die tägliche Voreilung des Chronometers um diese Epoche herum gegen mittlere Zeit betrug $7^s,2$. Ein Theil des Niveaus an der horizontalen Umdrehungsachse war $= 4'',46$ in Bogen, und der Kasbek befand sich ungefähr in einer Entfernung von 16 Meilen vom Beobachtungsorte.

Die Beobachtungen wurden in beiden Lagen des Instruments und an beiden Rändern der Sonne angestellt; die Antritte wurden nur am Mittelfaden beobachtet, und nach der Beobachtung des ersten Randes der Sonne wurden sogleich die Angaben des Niveaus an der horizontalen Umdrehungsachse, und auch die Angaben der Verniere am Horizontalkreise abgelesen, denn dieses musste geschehen, ehe noch der zweite Rand der Sonne den Mittelfaden erreichte, welcher alsdann bei unveränderter

Lage des Instruments beobachtet wurde; aber vor der Beobachtung dieses Durchgangs wurde das Niveau auf der horizontalen Umdrehungsachse umgestellt, so dass also auf diese Weise eine Ablesung der Verniere am Horizontalkreise, beiden Beobachtungen der Sonnenränder und beiden Niveauablesungen entspricht.

Verticalkreis	Object	Chronometerzeit	Niveauablesung links	Niveauablesung rechts	Mittel der Ablesungen am Horizontalkreise	Genäherte Zenithdistanz $= z$
Rechts	Gipfel des Kasbeks				156°58′30″	88° 8′,0
					— — 34	
			Theile			
	I Rand ⊙	$5^h 38^m 27^s,5$	0,0	5,6	264 47 22	81 39,7
	II Rand ⊙	5 41 35,5	2,1	3,6		82 12,3
			$J = -7'',9$			
Links	I Rand ⊙	$5^h 44^m 34^s,0$	1,5	2,2	85°49′ 8″	82°43′,3
	II Rand ⊙	5 47 41,5	3,2	1,4		83 15,7
	Gipfel des Kasbeks		$J = +1'',2$		336 58 16	88 8,0
					— — 18	

Aus den Beobachtungen des terrestrischen Gegenstandes wurde der Collimationsfehler $= C = 7'',5 \sin 88° 8'$ oder beinahe $= 7'',5$ gefunden; er ist positiv, wenn der Verticalkreis nach links umgelegt ist.

Aus der angenommenen Länge des Orts der Beobachtung und dem oben angegebenen Stande und Gange des Chronometers wurden für die Zeiten, die den Mitten der Sonnenbeobachtungen entsprechen, d. h. für $5^h 40^m 1^s,5$ und $5^h 46^m 7^s,7$ Chronometerzeit, die zugehörigen mittleren Greenwicher Zeiten $3^h 1^m 56^s,5$ und $3^h 7^m 42^s,5$ gefunden; hierfür findet man nun aus dem Nautical Almanac für 1837 die Declinationen der Sonne: $\delta = +10° 43' 31'',8$ und $\delta = +10° 43' 26'',2$, den Sonnenhalbmesser $= 15' 51'',2 = 951'',2$ und die Zeitgleichung $= 1^m 50^s,71$, welche von der mittleren Zeit abzuziehen ist, um sie in wahre Sonnenzeit zu verwandeln. Auf diese Weise haben wir daher aus den Beobachtungen in beiden Lagen des Instruments:

	Verticalkreis rechts		Verticalkreis links	
Durchgang	I Rand ⊙ um	$5^h 38^m 27^s,5$ ...	$5^h 44^m 34^s,0$	Chronometerzeit
	II Rand ⊙ um	5 41 35,5 ...	5 47 41,5	
Mittel		$5^h 40^m 1^s,50$ ...	$5^h 46^m 7^s,75$	
Chronometerfehler .		+ 18 44,83 ...	+ 18 44,80	
Zeitgleichung . .		− 1 50,71 ...	− 1 50,71	
Wahre Zeit . . .		$5^h 56^m 55^s,62 = -t$;	$6^h 3^m 1^s,84 = -t$;	

$$\tfrac{1}{2}t = -44°36'57'',2 \qquad \tfrac{1}{2}t = -45°22'43'',8$$
$$\delta = +10\ 43\ 31\ ,8 \qquad \delta = +10\ 43\ 26\ ,2$$

$\varphi = 45°45'47'',2$; folglich haben wir nach Formel (2) § 140, S. 406 zur Bestimmung des Azimuths A:

$$\tfrac{1}{2}(A+q) = 295°13'36'',2 \ \ldots\ 295°49'10'',5$$
$$\tfrac{1}{2}(A-q) = 342\ 2\ 28\ ,4 \ \ldots\ 342\ 28\ 1\ ,5$$
$$A = 277°16'\ 4'',6 \ \ldots\ 278°18'12'',0$$

Für die Sonnenbeobachtungen fand man folgende Ablesungen am Horizontalkreise:

1. Lage des Instruments		2. Lage des Instruments	
	264°47'22'',0		85°49' 8'',0
$-\frac{951'',2}{\sin 81°39',7} + \frac{951'',2}{\sin 82°12'',3}$	= −1 ,3		= −1 ,1
$J \operatorname{cotg} 82°56'$	= −1 ,1	$J \operatorname{cotg} 83°0'$	= +0 ,1
$C = \mp 7,5$; $\frac{C}{\sin 81°51'}$.	= −7 ,6	$\frac{C}{\sin 83°0'}$ . .	= +7 ,6
Verbesserte Abl.	360° + 264°47'12'',0		360° + 85°49'14'',6
Nordöstl. Azimuth ⊙	= 277 16 4 ,6		278 18 12 ,0
Nordpunkt d. Horizont.	= 347°31' 7'',4		167°31' 2'',6
Kasbeck + $\frac{C}{\sin 88°8'}$	= 360° + 156 58 24 ,5		336 58 24 ,5
Azimuth des Kasbeks .	169°27'17'',1		169°27'21'',9

Hieraus folgt für das nordöstliche Azimuth des Kasbeks, vom Beobachtungsorte aus gezählt, aus dem Mittel beider gefundenen Werthe:

$$169°27'19'',5 - 0,68\, \delta t + 0,73\, \delta\delta + 0,13\, \delta\varphi,$$

wo δt, $\delta\delta$ und $\delta\varphi$ die Fehler bedeuten, welche in den angenommenen Werthen von t, δ und φ enthalten sein können; setzt man $\delta t = \pm 15''$ in Bogen oder $\pm 1^s$ in Zeit, so würde der dadurch entstehende Fehler im Azimuthe $= \mp 10'',2$ werden, und folglich müsste in diesem Falle die Zeit sehr genau bestimmt gewesen sein, um das Azimuth des Kasbeks mit hinreichender Genauigkeit zu finden.

Bestimmung der Zeit und des Azimuths aus den gemessenen Azimuthunterschieden von Gestirnen.

143. Wir haben gesehen, dass ein Stern sein Azimuth am schnellsten in der Nähe des Meridians ändert; wenn aber die Polardistanz des Sterns gross ist, so wird selbst noch bei einer bedeutenden Abweichung des Sterns vom Meridiane diese Veränderung sehr merklich sein. So wird sich z. B. das Azimuth eines Sterns im ersten Verticale in einer Zeitsecunde um $15'' \sin\varphi$ in Bogen ändern; und folglich kann man an allen Orten, deren Breite $= \varphi$ gross ist, den Durchgang dieses Sterns durch die verschiedenen Verticalebenen zwischen dem Meridiane und dem ersten Verticale mit hinreichender Genauigkeit beobachten. Hierauf gründet sich nun die Methode, welche Struve zur Zeit- und Azimuthbestimmung vorgeschlagen hat*).

Um mit dem einfachsten Falle zuerst anzufangen, wollen wir annehmen, dass das Azimuth irgend eines terrestrischen Gegenstandes genau bekannt sei, und dass wir den horizontalen Winkel, welcher zwischen diesem Gegenstande und einem bekannten Ge-

---

*) Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Russlands, Thl. I, S. 104. 317—519.

stirne eingeschlossen ist, gemessen, und dabei die entsprechende Angabe des Chronometers beobachtet hätten; legt man alsdann mit dem zugehörigen Zeichen das Azimuth des Gegenstandes zum gemessenen Winkel hinzu, so erhält man das Azimuth des Gestirns. Es sei nun dieses Azimuth von Süden nach Westen gezählt $= a$, die nördliche Breite des Orts sei $= \varphi$, die scheinbare gerade Aufsteigung und Abweichung des Gestirns sei α und δ, und der westliche Stundenwinkel des Gestirns $= t$, so erhalten wir:

$$\sin q = \cos\varphi \sec\delta \sin a,$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}t = \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}\,tg\,\tfrac{1}{2}(a-q),$$

$$\text{oder } tg\,\tfrac{1}{2}t = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}\,tg\,\tfrac{1}{2}(a+q);$$

drückt man darauf α und t in Zeit aus, so findet man, dass die Sternzeit der Beobachtung $s = \alpha + t$.

Hierbei hängt die Genauigkeit der Zeitbestimmung von der genauen Bestimmung des angenommenen Azimuths des terrestrischen Gegenstands ab; aber um so näher der beobachtete Stern am Meridiane und um so kleiner seine Zenithdistanz ist, desto geringer wird der Einfluss eines Fehlers im angenommenen Azimuthe auf die Zeitbestimmung sein.

Wenn aber das Azimuth eines beliebigen terrestrischen Gegenstandes unbekannt sein sollte, und man dieses Azimuth zugleich mit der Uhrcorrection zu bestimmen wünscht, so muss man noch den horizontalen Winkel messen, welcher zwischen zwei Sternen enthalten ist, von denen der eine nahe dem Pole des Aequators sein, der andere aber eine bedeutende Polardistanz haben muss; gewöhnlich kann man hierzu den Polarstern mit einem nicht weit vom Zenithe entfernten Stern verbinden oder mit einem Sterne, dessen Declination nicht viel kleiner als die Breite des Orts ist und der sich alsdann nicht allzuweit vom Meridiane befindet.

Man kann stets annehmen, dass die Sternzeit der Beob-

achtung bis auf zwei oder drei Minuten in Zeit bekannt ist, und in § 57, S. 130 haben wir gesehen, dass es sehr leicht ist, die genäherte Zeit der Beobachtung noch genauer zu bestimmen. Man sucht nun zuerst das Azimuth des Polarsterns, welches der genäherten Zeit entspricht. Wegen der langsamen scheinbaren täglichen Bewegung dieses Sterns wird jedoch ein Fehler in der Zeitbestimmung keinen sehr merklichen Einfluss auf sein Azimuth hervorbringen. Dieses gefundene Azimuth legt man zum horizontalen gemessenen Winkel zwischen den beiden Sternen mit gehörigem Zeichen hinzu, und erhält auf diese Weise das genäherte Azimuth des vom Pole entfernteren Sterns. Hieraus findet man nun die Zeit der Beobachtung mit grösserer Genauigkeit, als bei der früheren Annahme; und wenn man darauf wiederum das Azimuth des Polarsterns berechnet, und alle Rechnungen wiederholt, so wird man selten drei Approximationen nöthig haben, um die Zeit so genau als möglich zu bestimmen. Beinahe immer genügt es, mittelst Proportionaltheile die den Aenderungen des Azimuths entsprechenden Zeitänderungen zu bestimmen.

Beispiel. Wir nehmen hierzu einige Beobachtungen, die Struve auf der Insel Hogland am 15. August 1826 angestellt hat.

Zuerst wurde mittelst der Sonne die Zeit und der Ort des Meridians auf dem Horizontalkreise bestimmt, damit man bei Tage noch die zu beobachtenden Sterne auffinden konnte. Zwischen den beiden Sternen *α Bootis* (Arcturus) und *α Ursae minoris* (Polaris), welche zu den Beobachtungen gewählt wurden, und einem entfernten irdischen Signale, mass man hierauf mehrere horizontale Winkel an einem Instrumente, dessen Fernrohr auf der Mitte der horizontalen Umdrehungsachse befestigt war. Beim Niveau, welches zur Bestimmung der Neigung dieser Achse diente, war der Nullpunkt der Theilung am Ende der gläsernen Röhre, und daher müssen wir die Vorschriften befolgen, die in § 51, S. 113 auseinandergesetzt wurden; ein Niveautheil $= 2'',66$ in Bogen.

Das benutzte Chronometer verspätete sich täglich gegen Sternzeit um $3^m 51^s,45$ in Zeit, und um $6^h 27^m$ Chronometerzeit kann man die ungefähre Sternzeit $= 16^h 20^m$ annehmen. Die Breite des Beobachtungsorts $= \varphi = 60° 4' 27''$.

	Scheinbare gerade Aufsteigung.	Scheinbare nördliche Declination.
Polaris . . .	$0^h 59^m 20^s,91$	$88° 22' 52'',1$
Arcturus . .	14 7 45 ,71	20 5 29 ,0

Die folgende Tabelle enthält die Beobachtungen selbst:

Höhenkreis	Object	Chronometerzeit	Ablesung am Horizontalkreise	Niveauablesung	Genäherte Zenithdistanz $= z$
Rechts	Arcturus	$4^h\ 9^m 35^s,6$	$22° 19' 59'',3$	im Westen von 26,0 bis 57,0	40° 3'
"	"	12 21 ,2	23 20 45 ,3	im Osten von 21,4 bis 52,0	40 2
"	Signal		179 58 51 ,5		. . . .
"	"		47 ,0	oder östlich $J = 6'',4$	. . . .
Links	Signal		$359° 57' 44'',0$	im Osten von 23,0 bis 53,6	. . . .
"	"		45 ,0	im Westen von 23,3 bis 54,4	. . . .
"	Arcturus	$4^h 34^m 26^s,2$	211 23 33 ,0		40° 7'
"	"	39 14 ,4	213 8 12 ,0	oder östlich $J = 0'',7$	40 13
Links	Signal		$359° 57' 43'',0$	im Osten von 22,5 bis 56,3	. . . .
"	"		46 ,0	im Westen von 21,6 bis 55,7	. . . .
"	Polaris	$6^h 23^m\ 0^s,8$	26 23 47 ,0		31° 1'
"	"	26 50 ,0	26 26 0 ,8	oder östlich $J = 1'',7$	31 0
Rechts	Polaris	$6^h 33^m 45^s,6$	$206° 31' 39'',8$	im Westen von 25,8 bis 60,4	30° 58'
"	"	36 56 ,2	206 33 21 ,0	im Osten von 16,4 bis 51,0	30 57
"	Signal		179 58 51 ,3		. . . .
"	"		51 ,8	oder westlich $J = 10'',5$	. . . .

Es wird nun verlangt, aus diesen Beobachtungen die genaue Uhrcorrection gegen Sternzeit und das Azimuth des Signals herzuleiten. Zuerst findet man, dass, als man nach dem Signale visirte, und der Höhenkreis nach rechts umgelegt war, die Ablesung auf dem Horizontalkreise $= 179° 58' 50'',4$ war; dagegen war bei der Umlegung nach links diese Ablesung $= 359° 57' 44'',5$.

Da nun das Fernrohr auf der Mitte der horizontalen Umdrehungsachse befestigt war, so folgt offenbar, dass der doppelte Collimationsfehler $= 2\,C = 65'',9$ oder $C = 32'',95$ ist, und bei Höhenkreis rechts negativ zu nehmen ist; nun fand ihn aber Struve durch die Beobachtung eines andern irdischen Abzeichens etwas grösser, und die Mittelzahl beider Bestimmungen giebt dafür $C = 34'',15$ in Bogen.

Mit dem genäherten Chronometerfehler berechnet man nun das Azimuth des *Polaris*, und findet daraus alsdann, dass das nordöstliche Azimuth des Signales ungefähr $= 335°\,56'\,2'',3$ war; dadurch bestimmt man das Azimuth von *Arcturus*, und mit Hülfe dieses letzteren Azimuths die ihm entsprechende Sternzeit; nach einer leichten Rechnung findet man alsdann, dass um $6^h\,26^m\,50^s,8$ Chronometerzeit, die Sternzeit $= 16^h\,20^m\,40^s,5$, oder dass die Uhrcorrection $= +\,9^h\,53^m\,49^s,7$ war; bei der ersten Berechnung haben wir aber dafür $9^h\,53^m$ angenommen, und folglich bei dieser Annahme einen Fehler $= 49^s,7$ begangen. Berechnet man nun nochmals das Azimuth des Polarsterns, so findet man das entsprechende nordöstliche Azimuth des Signals $= 335°\,56'\,30'',1$, oder um $27'',8$ grösser als vorher. Dieser Aenderung im Azimuthe entspricht eine Aenderung im Stundenwinkel des *Arcturus* von sehr nahe $1^s,3$ in Zeit, und daher wird alsdann die Uhrcorrection $= +\,9^h\,53^m\,51^s,0$ werden, welche aber schon so nahe an dem dafür bei der zweiten Berechnung angenommenen Werth liegt, dass wir den noch jetzt übrig bleibenden Fehler leicht durch proportionale Theile finden können; denn da einer Aenderung von $49^s,7$ in der Uhrcorrection eine Aenderung $= 27'',8$ im Azimuthe des Polarsterns entspricht, so wird ein Fehler in der Zeit $= 1^s,3$ eine Aenderung des Azimuths $= 0'',7$ zur Folge haben, und daher endlich das genaue Azimuth des Signals $= 335°\,56'\,30'',8$ werden.

Die ganze Anordnung der Rechnung legen wir hier in Gestalt einer Tafel vor; hierbei nehmen wir die Breite des Orts und die scheinbare Lage der Sterne zur Zeit der Beob-

achtung so an, wie sie oben angegeben sind. Ferner wollen wir annehmen, dass um $6^h 26^m 50^s,8$ Chronometerzeit, die Uhrcorrection $= +9^h 53^m 50^s,65$ gegen die Sternzeit s war, und dass jede Chronometerstunde $= 1^h + 9^s,65$ in Sternzeit. Bezeichnen wir alsdann den Stundenwinkel $\alpha - s$ durch t, so finden wir für den Polarstern nach Formel (1), § 140, S. 405:

$t = \alpha - s$	Nordöstliches Azimuth	Höhenkreis	Ablesung am Horizontalkreis	$\frac{J}{tg\,z}$	$\frac{C}{sin\,z}$	Verbesserte Ablesung
h m s	° ′ ″		° ′ ″	″	′ ″	° ′ ″
− 15 17 30,0	2 23 9,1	Links	26 23 47,0	− 2,8	+ 1 6,3	26 24 50,5
− 15 21 20,6	2 25 17,0	Links	26 26 0,8	− 2,8	+ 1 6,4	26 27 1,3
− 15 28 16,5	2 29 1,2	Rechts	206 31 39,8	+ 17,5	− 1 6,4	206 30 50,9
− 15 31 27,6	2 30 41,8	Rechts	206 33 21,0	+ 17,5	− 1 6,4	206 32 32,1

Hieraus findet man, dass der entsprechende Nordpunkt auf dem Horizontalkreise der Vernierablesung = 24° 1′ 44″4 alsdann entspricht, wenn der Höhenkreis links, und dass diese Ablesung = 204° 1′ 50″,0 sein wird, wenn der Höhenkreis rechts ist; aber wenn man die Kreisablesungen, als das Fernrohr auf das Signal gerichtet war, wegen des Collimationsfehlers verbessert, so findet man bei Höhenkreis links 359° 58′ 18″,6 und bei Höhenkreis rechts 179° 58′ 17″,4; folglich wird das nordöstliche Azimuth des Signals = 335° 56′ 30″,8 werden. Aus einigen anderen Beobachtungen fand Struve dieses Azimuth etwas kleiner, und das Mittel aller Bestimmungen = 335° 56′ 28″,5. Diesen Werth wollen wir für die Berechnung des Azimuths des *Arcturus* beibehalten, und die Resultate der Rechnung in folgender Tafel zusammenstellen:

Höhenkreis	Horizontalkreisablesung	$\frac{J}{tg\,z}$	$\frac{C}{sin\,z}$	Verbesserte Ablesung	Ort des Südpunkts	Südwestliches Azimuth *Arcturus* $= a$
	° ′ ″	″	″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
Rechts	22 19 59,3	− 7,4	− 53,1	22 18 58,8	24 1 48,3	− 1 42 49,5
Rechts	23 20 45,3	− 7,4	− 53,1	23 19 44,8		− 0 42 3,5
Links	211 23 33,0	− 0,9	+ 52,9	211 24 25,0	204 1 48,3	+ 7 22 36,7
Links	213 8 12,0	− 0,9	+ 52,8	213 9 3,9		+ 9 7 15,6

Mit diesen Azimuthen wurden nun nach den oben angegebenen Formeln § 143, S. 416 die Stundenwinkel $= t$ berechnet, von Süden nach Westen gezählt. Legt man hierauf zu diesen Stundenwinkeln die gerade Aufsteigung von *Arcturus* $= \alpha$ hinzu, so erhält man die Sternzeiten s, und vergleicht man alsdann die beobachteten Chronometerzeiten mit diesen Sternzeiten, so erhält man dadurch den Stand des Chronometers gegen Sternzeit, wie in folgender Tafel zu sehen ist:

Westlicher Stundenwinkel in Zeit $= t$	Sternzeit $= \alpha + t$	Chronometerzeit	Uhrcorrection des Chronometers gegen Sternzeit
$-0^h\ 4^m\ 41^s,43$	$14^h\ 3^m\ 4^s,28$	$4^h\ 9^m\ 35^s,6$	$+4^h\ 53^m\ 28^s,68$
$-0\ 1\ 55,10$	$14\ 3\ 50,61$	$12\ 21,2$	$29,41$
$+0\ 20\ 13,63$	$14\ 27\ 59,34$	$34\ 26,2$	$33,14$
$+0\ 25\ 2,10$	$14\ 32\ 47,81$	$39\ 14,4$	$33,41$

Hieraus findet man für das Mittel der Chronometerzeiten $4^h 23^m 54^s,35$ den entsprechenden Stand des Chronometers (Uhrcorrection) $= + 9^h 53^m 31^s,16$.

Um nun die Genauigkeit der Zeitbestimmung beurtheilen zu können, muss man vermittelst des bekannten Ganges des Chronometers, jeden einzelnen der gefundenen Chronometerfehler auf eine feste Epoche reduciren, wozu wir das Mittel aus den Chronometerzeiten $= 4^h 23^m 54,^s35$ annehmen können; berechnet man also auf diese Weise jede einzelne Beobachtung des *Arcturus*, so findet man folgende Chronometercorrection:

	Abweichung vom Mittel
$+9^h\ 53^m\ 30^s,98$	$-0^s,18$
$31,26$	$+0,10$
$31,45$	$+0,29$
$30,95$	$-0,21$

Mittel $= + 9^h 53^m 31^s,16$ für $4^h 23^m 54^s,35$ Chronometerzeit.

Der Werth des mittleren zufälligen Fehlers einer Beobachtung übersteigt in diesem Falle nicht $0^s,19$ in Zeit; wenn

aber die Beobachtungen in beiden Lagen des Instruments angestellt werden, so werden die Einflüsse aller constanten Fehler des Instruments sich gegenseitig aufheben, und nur ein Fehler in dem angenommenen Werthe des Azimuths des Signals wird einen bleibenden Fehler in der Zeitbestimmung verursachen. Bei der Untersuchung des mittleren zufälligen Fehlers, welchem man bei der Zeitbestimmung aus Azimuthbeobachtungen unterworfen ist, hat Struve gefunden, dass in Gegenden, deren Breite gross ist, wie z. B. $= 60°$, eine einzige Azimuthbeobachtung eben so viel Genauigkeit, als die Messung von acht Zenithdistanzen eines Sterns im ersten Verticale gewährt. Aber Struve hat zugleich bemerkt, dass selbst an Orten, die eine kleinere Breite haben, und sogar noch unter dem Aequator, man diese Methode, aus gemessenen Azimuthen die Zeit zu bestimmen, noch mit Vortheil anwenden kann. In diesem letzteren Falle aber werden die am Pole gelegenen Sterne sich immer am Horizonte befinden und desshalb schwer zu beobachten sein, jedoch macht dies nichts aus, denn unter dem Aequator wird das Azimuth der Sterne, deren Declinationen klein sind, sich sehr langsam ändern, so dass man einen solchen Stern statt des Polarsterns bei der Azimuthbestimmung brauchen kann; verbindet man alsdann mit diesem Sterne einen andern, dessen Declination bedeutend grösser sein muss, so wird man immer die Zeitbestimmung mit einer genügenden Genauigkeit machen können.

Anmerkung über den Einfluss der täglichen Aberration.

144. Wenn α die gerade Aufsteigung und δ die Declination eines Sterns bezeichnen, so ist es bekannt, dass die täg-

liche Aberration die gerade Aufsteigung des Sterns um den kleinen Bogen:

$$\mathfrak{d}\alpha = 0'',31 \cos\varphi \sec\delta \cos(s-\alpha)$$

und die Declination um den kleinen Bogen:

$$\mathfrak{d}\delta = 0'',31 \cos\varphi \sin\delta \sin(s-a)$$

vergrössert, wo s die in Graden ausgedrückte Sternzeit der Beobachtung ist. Häufig vernachlässigt man diese Correction wegen ihrer Kleinheit; um aber ihren Einfluss auf das Azimuth A und die Zenithdistanz z zu bestimmen, wollen wir $s-\alpha = t$ setzen, und (bei nördlicher Polhöhe) die Azimuthe vom Norden nach Osten von 0° bis 360° zählen; dann erhält man durch die Differenziation der Gleichungen (2) und (3) § 6, S. 17 nach z, A, t und δ die folgenden Ausdrücke:

$$\sin A \cos z\, \mathfrak{d}z + \cos A \sin z\, \mathfrak{d}A = -\cos\delta \cos t\, \mathfrak{d}t + \sin\delta \sin t\, \mathfrak{d}\delta$$
$$\cos A \cos z\, \mathfrak{d}z - \sin A \sin z\, \mathfrak{d}A = +\cos\delta \cos\varphi\, \mathfrak{d}\delta$$
$$+\sin\varphi \cos t \sin\delta\, \mathfrak{d}\delta + \sin\varphi \cos\delta \sin t\, \mathfrak{d}t.$$

Es sei der Kürze wegen $0'',31 \cos\varphi = \lambda$; setzt man dann statt $\mathfrak{d}\alpha$ und $\mathfrak{d}\delta$ ihre obigen Werthe, so erhält man, indem man zugleich $\mathfrak{d}t = -\mathfrak{d}\alpha$ setzt:

$$\sin A \cos z\, \mathfrak{d}z + \cos A \sin z\, \mathfrak{d}A = \lambda - \lambda \cos^2\delta \sin^2 t$$
$$= \lambda - \lambda \sin^2 z \sin^2 A$$
$$\cos A \cos z\, \mathfrak{d}z - \sin A \sin z\, \mathfrak{d}A =$$
$$= +\lambda \sin t \cos\delta (\cos\varphi \sin\delta - \sin\varphi \cos t \cos\delta);$$
$$\cos A \cos z\, \mathfrak{d}z - \sin A \sin z\, \mathfrak{d}A = \lambda \sin t \cos\delta \sin z \cos A$$
$$= -\lambda \sin^2 z \cos A \sin A.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$\mathfrak{d}z = \lambda \cos z \sin A; \text{ und } \sin z\, \mathfrak{d}A = \lambda \cos A.$$

Hieraus erhellt es, dass die Correction des Azimuths, welche vom Einflusse der täglichen Aberration herrührt, bei $A = 90°$ oder 270° verschwindet; und eben so sieht man auch, dass in

diesem letzteren Falle die Zeit des Durchgangs durch die Verticalebene im Osten und Westen auf ganz gleiche Weise von der täglichen Aberration afficirt wird, so dass der Unterschied der Durchgangszeiten eines Sterns im Osten und Westen durch den ersten Vertical ganz unabhängig von der täglichen Aberration sein wird. Es ist daher bei der Berechnung der Breite eines Orts aus dem Unterschiede der Durchgänge eines Sterns durch den ersten Vertical nicht nöthig, auf den Einfluss der täglichen Aberration Rücksicht zu nehmen. Bei nördöstlichen Azimuthen beträgt die Correction wegen täglicher Aberration:

$$+\lambda\frac{\cos A}{\sin z}, \text{ wo } \lambda = 0'',31 \cos\varphi,$$

welche alsdann hinzuzulegen ist.

Im Meridian selbst äussert die tägliche Aberration keine Einwirkung auf die Zenithdistanz des Sterns, aber vor und nach dem Durchgange durch diese Ebene, bringt sie gleiche, aber entgegengesetzte Wirkung auf die Zenithdistanz hervor; wenn man daher die Breite aus Circummeridianhöhen bestimmt, so ist diese frei von täglicher Aberration; man kann sie sogar noch bei der Herleitung der Breite aus Polarsternbeobachtungen vernachlässsigen, denn für diesen Stern wird $\sin A$ immer sehr klein sein, und folglich die Correction δz einen beinahe verschwindenden Werth haben.

Wenn man aber aus der beobachteten Zenithdistanz eines Sterns in der Nähe des ersten Verticals $= z$ die Zeit bestimmen will, so muss man zu dieser Zenithdistanz z stets den kleinen Bogen $+\lambda \cos z \sin A$ hinzulegen.

Fünfter Abschnitt.

Von den verschiedenen Methoden der Längenbestimmung.

Allgemeine Erklärungen.

145. In den vorhergehenden Abschnitten ist gezeigt worden, auf welche Weise durch astronomische Beobachtungen die geographische Breite eines Orts, sowie der Fehler einer Uhr bestimmt werden kann, und wir wenden uns jetzt zu einer neuen Aufgabe, nämlich der Ermittlung der geographischen Längendifferenz zweier Orte.

Denken wir uns, dass der Stundenwinkel eines Gestirns oder irgend eines sonstigen Punkts der Himmelssphäre an zwei verschiedenen Beobachtungsorten in einem und demselben Augenblick bestimmt wird, so ist offenbar der Unterschied dieser Winkel dem Unterschiede der geographischen Längen beider Orte gleich. Derselbe kann sowohl in Graden als auch in Stunden ausgedrückt werden, 15 Grad auf eine Stunde gerechnet. Hier ist also die Stunde nur als eine Benennung des Bogens oder Winkels von 15 Grad zu verstehen, und hat mit der Zeitdauer nichts gemeinsam.

Da nun der in Zeit ausgedrückte Stundenwinkel der wahren Sonne gleich ist der wahren Zeit, derjenige der sogenannten mittleren Sonne gleich der mittleren Zeit, und derjenige des Frühlingspunkts gleich der Sternzeit, so wird offenbar die in Zeit ausgedrückte Längendifferenz zweier Orte gleich sein dem in einem bestimmten Augenblicke stattfindenden Unterschiede sowohl in der wahren Zeit, als auch in der mittleren und Sternzeit an den beiden Orten.

Folglich wird der Längenunterschied zweier Orte dadurch gefunden werden können, dass man zu einem bestimmten Zeitpunkte des einen Orts ermittelt, welche Zeit an dem andern Orte (nach wahrer, mittlerer oder Sternzeit) eine richtig zeigende Uhr angeben würde. Es giebt hierzu mehrere Wege, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

I. Bestimmung des Längenunterschieds mit Hülfe des electrischen Telegraphen.

146. Die Längenbestimmung durch den electrischen Telegraphen übertrifft alle übrigen Methoden an Genauigkeit, und wird in neuerer Zeit bei den zahlreichen und ausgedehnten Telegraphenlinien vielfach mit dem besten Erfolge angewandt. Sie wurde zuerst nach dem Vorschlage von S. C. Walker bei der Küstenvermessung in Nordamerika (Coast Survey 1856) angewandt und von Gould vervollständigt; bald darauf wurde sie in Europa eingeführt und es giebt jetzt nur wenige Sternwarten, deren Länge nicht auf electrischem Wege ermittelt ist. Von grossartigen Unternehmungen dieser Art sind zu erwähnen die Bestimmung der Längendifferenz zwischen Newyork in Nordamerika und Valentia in Irland mit Hülfe der submarinen

Kabels, welche im Jahre 1866 unter Leitung von Gould ausgeführt wurde, sowie die in den letzten Jahren von Officieren des russischen Generalstabs unternommene Längenbestimmung zwischen den Grenzen des europäischen Russland und den Küsten des Amurlandes.

Aus dem in § 145 Gesagten geht hervor, dass, wenn an zwei Orten je eine gute Uhr aufgestellt ist, deren Stände und Gänge durch Beobachtungen an Ort und Stelle auf das Genaueste bestimmt werden, die Längendifferenz dieser Orte ermittelt werden kann, wenn ein Weg gefunden wird, die beiden Uhren direct mit einander zu vergleichen. Dies kann nun mit Hülfe des electrischen Telegraphen auf mancherlei Weise geschehen, und zwar besteht der einfachste Weg darin, dass nach Verabredung in bestimmten Zwischenzeiten, z. B. bei jeder vollen Stunde der einen Uhr ein Beobachter ein Zeichen auf einem Telegraphenapparate giebt, welches sich an dem andern Orte durch Ausschlagen eines Galvanoskops oder Anziehung des Ankers eines Electromagneten bemerklich macht. Wird dann an dem zweiten Orte genau die Uhrzeit notirt, zu welcher die Signale eintreffen, so erhält man, unter Berücksichtigung der für die betreffenden Zeiten an beiden Orten anzubringenden Uhrcorrectionen, unmittelbar den Längenunterschied. Derselbe ist allerdings etwas fehlerhaft, weil der galvanische Strom eine gewisse Zeit gebraucht, um von der Abgangsstation nach der Empfangsstation zu gelangen; die Signale werden demnach etwas später beobachtet, als sie gegeben wurden. Diesen Fehler, mit welchem die Längenbestimmung behaftet ist und der nur bei sehr grossen Entfernungen merklich werden kann, ist man im Stande noch völlig zu eliminiren, dadurch, dass man sowohl Uhrsignale von der ersten Station nach der zweiten, als auch von der zweiten nach der ersten sendet, und es ist klar, dass eine Verzögerung der Signale durch die Leitung, welche in beiden Fällen genau gleich wirken muss, in dem einen Falle die Längendifferenz um ebenso viel vergrössert, als in dem andern Falle verkleinert. Das

Mittel beider Bestimmungen wird demnach von dem erwähnten Fehler frei sein.

Dagegen wird eine Verspätung der Signale ebenfalls bewirkt durch die Trägheit der Apparate auf der Empfangsstation, welche nicht in demselben Momente den galvanischen Strom anzeigen, in welchem er sie durchläuft. Diese Trägheit hängt ab sowohl von der Beschaffenheit der Apparate, als auch von der Stärke des galvanischen Stroms. Wegen der ersteren Ursache ist es vortheilhaft, nach einer vollständigen Serie von Beobachtungen die galvanischen Apparate beider Stationen mit einander zu vertauschen, und wegen der zweiten Ursache ist es sehr wünschenswerth, dass bei allen Austauschungen von Signalen die Stärke des galvanischen Stroms möglichst nahe dieselbe bleibt. Dies wird am einfachsten bewirkt durch Einschaltung künstlicher Widerstände (Rheostaten) in die Leitung.

Anstatt zweier Uhren kann man sich auch einer einzigen bedienen, welche auf einer der beiden Stationen aufgestellt ist. Zu der Anstellung dieser Art von Beobachtungen bedarf man sogenannter galvanischer Registrirapparate oder Chronographen. Dieselben giebt es von verschiedener Einrichtung, doch dienen sie alle dazu, sowohl die Schläge der Pendeluhr, wie auch die Durchgänge von Sternen durch die Spinnefäden eines Passageninstruments so aufzuzeichnen, dass man nachträglich, ohne nöthig zu haben, während der Beobachtungen der Gestirne auf die Schläge der Uhr zu achten, die Zeit jedes Fadenantritts genau ablesen kann. Die einfachsten Chronographen haben die Einrichtung der sehr allgemein beim Telegraphiren benutzten Morse'schen Schreibapparate, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass an dem Chronographen nicht ein, sondern drei nebeneinander befindliche Schreibstifte angebracht sind, von denen der mittlere auf einem sich durch ein Uhrwerk von einer Walze abwickelnden Papierstreifen in Folge galvanischer Verbindung mit einer Pendeluhr in jeder vollen Secunde einen Punkt aufzeichnet, während die beiden andern durch telegraphische Leitung

in galvanischer Verbindung mit je einem Contactschlüssel sich befinden, welche bei den Passageninstrumenten der beiden Stationen angebracht sind.

Auf beiden Stationen werden dieselben Sterne am Passageninstrument beobachtet. Sobald der eingestellte Stern einen Spinnefaden passirt, drückt der Beobachter auf den Contactschlüssel, wodurch ein galvanischer Strom geschlossen wird, der bewirkt, dass der eine Seitenstift des Chronographen auf dem Papierstreifen ein Zeichen abdrückt, dessen Lage gegen die unterdessen fortwährend durch den Mittelstift aufgezeichneten, den Secunden der Pendeluhr entsprechenden Zeichen genau die Zeit des Sterndurchgangs erkennen lässt. Auf diese Weise werden sämmtliche Fadenantritte auf beiden Stationen registrirt, und man erhält somit die nöthigen Daten, um nach gehöriger Reduction wegen Fehler der beiden Passageninstrumente, den Fehler der Pendeluhr gegen die beiden auf den Beobachtungsstationen herrschenden Zeiten zu ermitteln. Der Unterschied dieser beiden Uhrfehler, corrigirt wegen des Ganges der Uhr während der Zeit, welche die Sterne scheinbar gebrauchen, um von dem Meridiane des einen Orts nach dem des andern Orts zu gelangen, ist nichts anderes als die Längendifferenz beider Orte.

In den früheren Abschnitten ist gezeigt worden, in welcher Weise die Beobachtungen am Passageninstrumente angestellt werden müssen, um die möglichst zuverlässigen Resultate bei der Bestimmung des Uhrfehlers zu erhalten. Dieselben Vorschriften sind hier ebenfalls zu befolgen, und wir werden uns daher im Folgenden darauf beschränken können, diejenigen Vorschriften auseinanderzusetzen, welche bei der telegraphischen Längenbestimmung zu befolgen sind und in dem Früheren noch nicht ihre Erläuterung gefunden haben. Dieselben sollen zwei Fehlerquellen beseitigen, von denen die eine in den Beobachtern und die zweite in den benutzten Apparaten liegt.

Die Beobachtungen, welche wir mit Hülfe unserer Sinneswerkzeuge anstellen, besitzen niemals eine absolute Zuverlässig-

keit, sondern sind immer mehr oder weniger mit Fehlern behaftet.

Diese Fehler können wir in zwei Arten eintheilen, von denen die eine hauptsächlich dadurch entsteht, dass unsere Nerven zu ihrer Erregung einer gewissen Zeit bedürfen. Bei Registrirungen von Sterndurchgängen wird dieser Fehler sich aus zweien zusammensetzen. Der eine von ihnen hat darin seine Ursache, dass der Antritt des Sterns an einen Spinnefaden dem Beobachter nicht in demselben Momente zum Bewusstsein kommt, in welchem er wirklich stattfindet, und der zweite darin, dass von dem Augenblicke, wo man den Antritt wahrnimmt, bis dahin, wo mit der Hand das Signal gegeben wird, eine, wenn auch sehr kurze Zeit verstreicht. Die Fehler dieser Art sind abhängig von der Individualität des Beobachters und dem benutzten Instrumente; sie sind mit der Zeit veränderlich, doch wird man die Aenderungen wahrscheinlich für ziemlich grosse Zeiträume als der Zeit proportional ansehen können. Man nennt diese Fehler persönliche Fehler oder persönliche Gleichungen; sie werden bei der telegraphischen Längenbestimmung ohne jeden Einfluss sein, sobald sie bei beiden Beobachtern von gleichem Betrage sind; dagegen wird in jedem andern Falle die Differenz der Fehler, welche jeder der beiden Beobachter bei dem Signalisiren der Fadenantritte begeht, mit ihrem vollen Betrage auf die Längendifferenz einwirken. Um aus dem definitiven Resultate den Fehler zu eliminiren, ist es nothwendig, dass die Beobachter, nach Vollendung einer vollständigen Reihe von Beobachtungen, die Stationen vertauschen. Damit die der Zeit proportionalen Aenderungen der persönlichen Fehler aus dem Endresultate verschwinden, ist es nützlich, die Beobachtungen in der Weise symmetrisch anzustellen, dass eine Schlussserie wieder in der ersten Anordnung der Beobachter stattfindet. Bezeichnet man den einen Beobachter mit A, den andern mit B; die eine Station mit I, die andere mit II, so würde eine voll-

ständige Längenbestimmung aus vier Beobachtungsserien in folgender Anordnung bestehen:

Erste Serie:	Beobachter	*A*	auf	Station	I,
	„	*B*	„	„	II,
Zweite Serie:	„	*A*	„	„	II,
	„	*B*	„	„	I,
Dritte Serie:	„	*A*	„	„	II,
	„	*B*	„	„	I,
Vierte Serie:	„	*A*	„	„	I,
	„	*B*	„	„	II.

Wenn die benutzten Passageninstrumente transportabel sind, ist es vortheilhaft, dass jeder Beobachter immer dasselbe Instrument benutzt.

Die zweite Art der oben erwähnten Fehler hat darin ihre Ursache, dass unser Auge und unsere Hand keine absolut vollkommenen Werkzeuge sind, wodurch bewirkt wird, dass die Beobachtungen bald etwas zu früh, bald etwas zu spät signalisirt werden. Diese Art von Fehlern nennt man zufällige. Man kann annehmen, dass bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen die Fehler nahezu ebenso häufig nach der einen wie nach der andern Seite fallen werden, so dass ihre abgebraische Summe verhältnissmässig klein wird. Nimmt man dann aus allen Beobachtungen das Mittel, so ist letzteres noch mit einem Fehler behaftet, der gleich der algebraischen Summe der Fehler der einzelnen Beobachtungen, dividirt durch die Anzahl der Beobachtungen ist. Es ist also klar, dass das Beobachtungsresultat um so weniger von zufälligen Fehlern beeinflusst wird, um so grösser die Anzahl der Beobachtungen ist.

Eine andere Fehlerquelle liegt in den Chronographen und zugehörigen Apparaten, und ist vorhin schon erwähnt worden. Wenn nämlich ein galvanischer Strom den Draht eines Electromagneten durchläuft, so wird nur in dem Falle der Eisenkern in genau demselben Momente magnetisch, wenn er absolut weich

ist. In den meisten Fällen vergeht eine gewisse Zeit, bis der Magnetismus so stark ist, dass die Trägheit des Ankers überwunden wird. Es ist daher nothwendig, soviel wie möglich die Uebertragung vermittelst der Electromagnete einzuschränken, und auf allen Zwischenstationen direct die Leitungen verbinden zu lassen, mit Ausschluss aller sogenannten Relais oder Uebertrager; ferner bei allen Beobachtungen möglichst dieselbe Stromstärke anzuwenden, und endlich den Registrirapparat abwechselnd auf der einen und auf der andern Station aufzustellen. Ist man in der Lage, auf jeder Station einen derartigen Apparat aufstellen zu können, so wird im Verlaufe der Beobachtung ein Austausch der beiden Chronographen, am besten in Verbindung mit dem Wechsel der Beobachter und Passageninstrumente, nothwendig sein.

II. Längenbestimmung durch Chronometerübertragungen.

147. Die grossen Verbesserungen, welche in den letzten Jahrzehnten in der Construction von Chronometern gemacht worden sind, sowie die schnelle und sichere Verbindung, welche jetzt zwischen entfernten Orten der Erde stattfindet, haben es möglich gemacht, Unterschiede der geographischen Längen von Orten durch den Transport von Chronometern, mit einer Genauigkeit zu bestimmen, die nur durch die Bestimmung vermittelst des electrischen Telegraphen übertroffen wird. In Folge der schönen Resultate, welche Schumacher im Jahre 1821 bekannt machte, wurde diese Methode zur Bestimmung des Längenunterschiedes mehrerer Sternwarten angewandt. Unter den wichtigsten Unternehmungen dieser Art kann diejenige genannt werden, welche in den Jahren 1843 und 1844 zur Bestimmung der Länge der Sternwarte zu Pulkowa ausgeführt wurde. Die

Abhandlung von Struve, welche im Jahre 1844 unter dem Titel erschien: „*Expédition Chronométrique exécutée par ordre de Sa Majesté L'Empereur Nicolas I entre Poulkova et Altona pour la détermination de la longitude géographique relative de l'Observatoire centrale de Russie*", enthält eine vortreffliche Behandlung aller bei der Längenbestimmung eines Orts durch Chronometer vorkommenden Fragen, und daher werden wir uns bemühen, die hauptsächlichsten Vorschriften aus dieser Abhandlung auszuziehen. Eine ebenso strenge, wie auch elegante Auflösung der hierher gehörenden Aufgabe hat auch Airy gegeben in der „*Determination of the longitude of Valentia in Ireland, by transmission of Chronometers*" *).

Wir wollen nun mit dem einfachsten Falle anfangen, und annehmen, dass der Reisende nur Ein Chronometer hat; befindet er sich z. B. in St. Petersburg und vergleicht sein Chronometer mehrere Tage nach einander mit dem Himmel, so wird er wissen, um wie viel sein Chronometer an einem bestimmten Tage, zu einer bestimmten Stunde, Minute u. s. w. mehr oder weniger als die mittlere St. Petersburger Zeit (oder auch St. Petersburger Sternzeit) zeigte, und auch zugleich wissen, um wie viel sein Chronometer zu dieser Zeit in einem Tage voreilte oder sich verspätete. Nimmt man nun den Gang des Chronometers als gleichförmig an, so wird es leicht sein, zu jeder künftigen Chronometerzeit die entsprechende St. Petersburger mittlere (oder auch Stern-) Zeit zu bestimmen, und wenn daher der Reisende St. Petersburg verlässt und an einen anderen Ort gelangt, dessen Länge er zu finden wünscht, so wird er an diesem neuen Orte nur nöthig haben, durch directe Beobachtungen die mittlere oder Stern-Zeit zu bestimmen, die einer beliebigen Angabe des Chronometers entspricht. Der Unterschied zwischen dieser und der gleichzeitig stattfindenden St. Petersburger Zeit, welche mit Hülfe des bekannten Standes

*) Appendix to the Greenwich Astronomical Observations (1845).

und Ganges des Chronometers gefunden wird, drückt alsdann die Länge des Beobachtungsorts gegen St. Petersburg aus.

Dieser Unterschied wird etwas genauer werden, wenn wir die Berechnung mit dem mittleren Gange des Chronometers, d. h. (mit demjenigen, welcher in der Mitte zwischen dem ersten und letzten Beobachtungsorte stattfand), reduciren. Diese Methode der Längenbestimmung wird viel auf Schiffen gebraucht; aber sie ist nicht sehr zuverlässig, weil die Erfahrung lehrt, dass, wenn die Chronometer auf Reisen sind, sie oft einen andern Gang annehmen, als wenn sie in Ruhe sind.

Die grösste Schwierigkeit liegt immer darin, den Gang des Chronometers während der Reise zu bestimmen; wenn die Umstände es gestatten, so besteht das beste Mittel hierzu darin, die Uhrcorrection zuerst an dem Anfangspunkte der Reise, dann an dem zu bestimmenden Orte zu ermitteln und gleich darauf so schnell als möglich nach dem Anfangspunkte zurückzureisen, und an diesem wiederum die Uhrcorrection zu finden. Wir wollen nun der Kürze wegen annehmen, dass der Anfangspunkt P sei, hingegen der zu bestimmende Ort A, und die westliche Länge des Orts A von P, mit λ bezeichnen. Nimmt man nun an, dass zur Zeit t am Orte P die Uhrcorrection des Chronometers $= p$ war, darauf bei der Ankunft in A zur Zeit t', diese Correction $= a$, und endlich wiederum nach der Rückkehr, in P zur Zeit t'', die Uhrcorrection $= p'$, so können wir als Zeiteinheit einen Tag annehmen, und erhalten alsdann den mittleren täglichen Gang des Chronometers während der Reise: $= m$ $= \frac{p'-p}{t''-t}$, woraus wir folgern können, dass:

$$\lambda = p + m(t'-t) - a, \text{ oder } \lambda = p' - m(t''-t') - a.$$

Hat der Reisende mehrere Chronometer zu seiner Disposition, so kann er mit Hülfe eines jeden von ihnen auf ganz dieselbe Weise die Länge λ bestimmen. In diesem Falle muss er aber nicht blos alle Chronometer unter einander bei ihrer Berichtigung durch astronomische Beobachtungen, sondern auch

täglich während der Reise vergleichen, um etwa grössere vorkommende zufällige Unregelmässigkeiten im Gange einiger Chronometer zu entdecken.

Beispiel. Im Jahre 1836 wurde es nothwendig, den Längenunterschied zwischen Novotscherkask und Kagalnik, einem kleinen Dorfe am Ufer des Azowschen Meeres, zu finden; hierzu wandte man die Chronometer: Haut Nr. 11, Kessels Nr. 1294 und Kessels Nr. 1290 an, von denen das erstere nach Sternzeit, die beiden letzteren aber nach mittlerer Zeit gingen. Vor und nach der Reihe fand man zu Novotscherkask aus astronomischen Beobachtungen und durch Vergleichung der Chronometer folgende Resultate:

Vor der Reise (in Novotscherkask):

Die Uhrcorrection der Chronometer für $11^h 33^m 14^s$ nach Haut Nr. 11.

Haut Nr. 11 gegen Sternzeit	Tägl. Gang	Kessels Nr. 1294 gegen mittl. Zeit	Tägl. Gang	Kessels Nr. 1290 gegen mittl. Zeit	Tägl. Gang
am 12. Sept. $+0^h 54^m 54^s,4$	$+1^s,40$	$+0^h 34^m 37^s,0$	$-5^s,36$	$+1^h 48^m 9^s,3$	$-1^s,60$
am 15. Sept. $p = +0\ 54\ 58,6$		$p = +0\ 34\ 20,1$		$p = +1\ 48\ 4,3$	

Nach der Reise (wieder in Novotscherkask):

am 18. Sept. $p' = +0^h 55^m 2^s,7$	$+1^s,20$	$p' = +0^h 34^m 4^s,4$	$-5^s,70$	$p' = +1^h 43^m 24^s,2$	$-1^s,00$
am 20. Sept. $+0\ 55\ 2,1$		$+0\ 33\ 53,0$		$+1\ 48\ 22,2$	

Folglich war der Gang unterwegs:

$+1^s,37$	$-5^s,23$	$+6^s,63$

Am 17. September 1836 wurden zu Kagalnik, als das Chronometer Haut Nr. 11 $18^h 50^m 54^s,5$ zeigte, folgende Uhrcorrectionen gefunden:

28*

Haut Nr. 11 gegen Sternzeit	Kessels Nr. 1294 gegen mittlere Zeit	Kessels Nr. 12 gegen mittlere
$a = +0^h 51^m 54^s,4$	$a = +0^h 31^m 0^s,6$	$a = +1^h 45^m$ 1

Das Zeichen (+) zeigt an, dass die Chronometer zu waren. Aus dem Vorhergehenden sieht man, dass die b ersten Chronometer ihren Gang unterwegs ziemlich gut b halten haben; das letztere aber zeigt eine bedeutende Aende seines Ganges an; die tägliche Vergleichung der Chronor bewies jedoch, dass Kessels Nr. 1290 diesen veränderlichen mit geringer Abweichung während der ganzen Dauer der] beibehielt.

Hier ist nun:

$$t''-t = 3^{Tage}\,; \quad t''-t' = 0^{Tage}\, 16^h 42^m 19^s,5 = 0,69606$$

folglich hat man für die westliche Länge λ, Kagalniks Novotscherkask:

nach Haut Nr. 11	nach Kessels Nr. 1294	nach Kessels Nr. 1:
$\lambda = 0^h 3^m 7^s,35$	$0^h 3^m 7^s,44$	$0^h 3^m 8^s,7.$

Auf diese Weise finden wir die Länge Kagalniks nach Chronometern ziemlich gut unter einander übereinstimm wenn wir aber diese Länge nach Kessels Nr. 1290 mit Gange, welchen dieses Chronometer vor oder nach der Reise berechnet hätten, so würde die auf diese Weise abgeleitete L gänzlich unrichtig gewesen sein.

Bei einer so kleinen Zahl von Chronometern ist es nicht möglich, die relative Zuverlässigkeit der mit Hülfe eines jeden Chronometers abgeleiteten Länge anders zu bestimmen, als dass man unter verschiedenen Umständen die mittlere tägliche Ungleichförmigkeit des Chronometers mittelst umfassender astronomischer Beobachtungen ermittelt. Wenn wir den täglichen mittlern Gang des Chronometers aus Beobachtungen berechnen, die einen bedeutenden Zeitraum umfassen, und wenn wir den Unterschied zwischen diesem mittleren täglichen Gange und demjenigen

ı, welchen das Chronometer an verschiedenen Tagen wirkatte, so wird die Mittelzahl aus den gefundenen Unteren die mittlere tägliche Ungleichförmigkeit des Chronoı sein. Angenommen, dass zwischen zwei aufeinander folı Beobachtungen, aus welchen der tägliche Gang des ɔmeters hergeleitet wurde, t Tage verflossen waren, und ɛzeichnen den Unterschied zwischen diesem Gange und dem ren täglichen allgemeinen Gange durch d, so erhalten wir, die Chronometerungleichförmigkeiten zufällig sind, nach S. 238 für den wahrscheinlichen Werth der täglichen chförmigkeit $\alpha' = d\sqrt{t}$.

ie Veränderung des Ganges eines Chronometers auf Reisen nan durch Vergleichung dieses Chronometers mit mehreren ı Chronometern entdecken, und diese Veränderungen muss 'sdann bei Berechnung der Gewichte in Betracht ziehen, man die Gewichte überhaupt als umgekehrt proportional ı Quadraten der wahrscheinlichen täglichen Ungleichförɛn ansehen kann.

ɛzeichnen wir die einzelnen Chronometer mit A, B, C . . . ɛtzen voraus, dass A mit B, mit C u. s. w. immer ɛelben Tageszeit an mehreren Tagen miteinander verglichen Daraus lässt sich der relative tägliche Gang von B, . w. gegen A für verschiedene Tage bestimmen, auch die en relativen täglichen Gänge von A, C u. s. w. gegen B, von A, B . . . . gegen C u. s. w. finden. Es ist nun leicht, noch den mittleren Gang von B gegen A, von C gegen A, . . . von C gegen B u. s. w. zu berechnen. Zieht man den mittleren täglichen Gang von B gegen A von den einzelnen täglichen Gängen von B gegen A ab, so erhält man die täglichen Abweichungen der wirklichen Gänge vom mittleren Gange. Auf ähnliche Weise werden die Abweichungen im Gange von C gegen A, von C gegen B u. s. w. vom mittleren Gange berechnet. Für jede zwei Chronometer findet man daraus die mittlere Abweichung. Um eine weitläufige Rechnung zu ver-

meiden, kann man sich mit folgender genäherten Bestimmung der Gewichte begnügen. Es seien

$$(a+b),\ (a+c),\ \ldots\ (a+m)$$
$$(b+a),\ (b+c),\ \ldots\ (b+m)$$

u. s. w. die mittleren Abweichungen der relativen täglichen Gänge von B, C, ... M gegen A, von A, C, ... M gegen B u. s. w. Bezeichnen wir durch α, β, γ ... die numerischen Grössen der mittleren Schwankungen der täglichen Gänge der Chronometer A, B, C... gegen die mittlere Zeit, oder gegen Sternzeit und nehmen wir zunächst an, dass die verschiedenen Chronometer von gleicher Güte sind, so können wir

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(a+b), \ldots = \tfrac{1}{2}(a+c) = \ldots + \tfrac{1}{2}(a+m),$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(a+b), \ldots = \tfrac{1}{2}(b+c) = \ldots\ \tfrac{1}{2}(b+m)$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}(a+c), \ldots = \tfrac{1}{2}(b+c) = \ldots\ \tfrac{1}{2}(b+m)$$

u. s. w. annehmen. Ist n die Zahl der Chronometer, so ist

$$\alpha = \frac{(a+b)+(a+c)+\ldots+(a+m)}{2(n-1)}$$
$$\beta = \frac{(a+b)+(b+c)+\ldots+(b+m)}{2(n-1)}$$

u. s. w.

Sollte ein Chronometer eine zu grosse Abweichung im Vergleich zu anderen Chronometern ergeben, so wird es am besten sein, dasselbe bei der Bestimmung der Gewichte der anderen Chronometer auszuschliessen.

Die so berechneten Werthe von α, β, γ ... werden noch sehr ungenau sein, da sie auf der Annahme beruhen, dass alle Chronometer gleich gut sind. Wenn wir diese ungenauen Werthe durch α', β', γ' ... bezeichnen, so werden:

$$\alpha'' = \tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'}, \ldots = \tfrac{1}{2}(a+c)\cdot\frac{\alpha'}{\alpha'+\gamma'} = \ldots$$
$$\beta'' = \tfrac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{\beta'}{\alpha'+\beta'}, \ldots = \tfrac{1}{2}(b+c)\cdot\frac{\beta'}{\beta'+\gamma'} = \ldots$$

u. s. w. genauere Werthe geben; es lässt sich auf dieselbe Weise weiter fortfahren, um für α, β . . . genauere Werthe zu erhalten.

Hat man α, β, γ . . . gefunden, so werden

$$\frac{k}{\alpha^2}, \frac{k}{\beta^2}, \frac{k}{\gamma^2}, \ldots$$

die Gewichte ausdrücken, welche den Bestimmungen des Längenunterschiedes gehören, die sich auf den Transport der Chronometer A, B, C . . . unter sonst gleichen Umständen gründen; k bedeutet für alle Chronometer eine constante Zahl, die willkührlich je nach Bequemlichkeit der Rechnung zu wählen ist.

Es wird nicht immer möglich sein, nach dem früheren Anfangspunkte, auf welchen man die Länge des neuen Beobachtungsorts beziehen will, zurückzukehren; wenn aber dieser letztere zwischen anderen Orten liegt, deren Längen vom Anfangspunkte der Zählung gut bestimmt sind, und der Reisende an allen diesen Orten beobachtet, so kann er den Gang seiner Chronometer während der Reise bestimmen, indem er die Uhrcorrectionen an zwei oder mehreren Orten untersucht, deren Längen bekannt sind. Wenn die Längen mehrerer Orte zu finden sind, so muss man, um den Gang der Chronometer während der Reise zu bestimmen, entweder nach dem Anfangspunkte, oder nach einem der früheren, nicht weit vom Anfangspunkt gelegenen Orten zurückreisen und dort wieder neue Beobachtungen anstellen; ihre Vergleichung mit den vorher angestellten giebt den mittleren Gang des Chronometers während der Reise, und darauf kann man mit Hülfe dieses Ganges die gesuchten Längen ableiten. Hierbei muss man sich aber so viel als möglich bemühen, nur sehr kurze Zeit an jedem Orte zu verweilen, und überhaupt die Reise schnell und bequem zu beendigen.

Wenn man bemerkt, dass ein Chronometer seinen Gang beständig nach einer Seite hin ändert, und diese Aenderung ausserdem gleichförmig zu sein scheint, so kann man darauf Rück-

sicht nehmen, indem man den Werth der täglichen Veränderung des Ganges erforscht, und hierdurch den Stand und Gang des Chronometers so ableitet, wie es die gleichförmig veränderliche Bewegung erfordert; § 94, S. 239.

148. Wir wollen annehmen, dass ein Beobachter nach der Ankunft von einem Orte P an einen andern Ort A diesen letztern nach einigen Tagen wieder verlässt, aber dass er dabei sogleich nach seiner Ankunft an diesem Ort seine Chronometer mit dem Himmel verglichen hatte, und dasselbe auch kurz vor seiner Abreise aus diesem Orte A gethan hat; in diesem Falle muss man die Länge auf solche Weise herleiten, dass der Gang, welchen das Chronometer in der Ruhe annahm, keinen Einfluss auf die Längenbestimmung hat, und hierzu hat nun Struve folgende Rechnungsmethode vorgeschlagen. Es seien für die

nachfolgenden Zeiten: . . . . t . . . t' . . t'' . . t'''
die zugehörigen Chronometerfehler p . . a . . a' . . p';

wobei wir annehmen, dass p und p' am Orte P, dagegen a und a' am Orte A bestimmt würden; es sei ferner λ die westliche Länge des Orts A von P, und endlich sei angenommen, dass das Chronometer denselben Gang während der Reise von P nach A und während der Reise von A nach P gehabt hatte, so ist:

$$m = \frac{a+\lambda-p}{t'-t} = \frac{p'-a'-\lambda}{t'''-t''}.$$

Setzt man nun $t'-t = \tau$ und $t'''-t'' = \tau''$, so folgt:

$$\lambda = \frac{\tau(p'-a')+\tau''(p-a)}{\tau+\tau''}$$

Berechnet man zuerst:

$$p'+a-a' = q \text{ und } (q-p)\frac{\tau}{\tau+\tau''} = r;$$

so wird:

$$\lambda = \frac{\tau(q-a)+\tau''(p-a)}{\tau+\tau''} = \frac{\tau(q-p)+(\tau+\tau'')(p-a)}{\tau+\tau''},$$

oder auch:

$$\lambda = p + r - a.$$

149. Wir wollen nun untersuchen, wie gross der Fehler in der Längenbestimmung nach der vorhergehenden Methode sein wird, wenn der Gang des Chronometers anstatt zufällig und ganz unabhängig von allen übrigen zu sein, einem bestimmten Gesetze der gleichförmigen Beschleunigung oder Verzögerung unterworfen ist.

Wenn wir annehmen, dass man aus Beobachtungen gefunden hätte:

zu den Zeiten . . . . t . . t' . . t'' . . t''',
die entsprechenden Uhrcorrectionen p . . a . . p' . . a',

und es seien p und p' auf den Ort P, dagegen a und a' auf den Ort A bezogen. Wir wollen nun ferner durch μ die tägliche Beschleunigung des Chronometers am Ende der Zeit t, und durch 2β die tägliche Zunahme des Werths μ am ersten Tag nach der Zeit t bezeichnen. Wenn wir alsdann die unbekannte β als Null ansehen, so werden wir in dieser unrichtigen Annahme durch einfache Einschaltung zwischen p und p' die Uhrcorrection $= (p)$ berechnen, welche am Orte P zur Zeit t' stattfinden würde, wenn der Gang des Chronometers gleichförmig wäre; aber nach § 94, S. 239 wissen wir, dass der wahre Werth der Uhrcorrection kleiner als (p) um die Grösse $= \beta\tau\tau'$, wo $\tau = t' - t$ und $\tau' = t'' - t'$ sein wird. Unter derselben Annahme der Gleichförmigkeit des Ganges können wir ebenso durch Interpolation durch a und a' die Uhrcorrection, welche der Zeit t'' am Orte A entspricht, $= (a)$ finden, und bezeichnen wir $t''' - t''$ durch τ'', so werden wir ähnlich wie vorher den Fehler, welcher bei der Berechnung von (a) begangen ist, $= \beta\tau'\tau''$ erhalten; nun ist aber $\lambda = (p) - a$ und $\lambda = p - (a)$, folglich werden wir im ersten Falle λ etwas zu gross, im zweiten aber etwas zu klein finden, und wenn $\tau = \tau''$, so wird der Fehler gleich und entgegengesetzt sein; hieraus sieht man, dass, wenn

man zwischen P und A, und A und P viele aufeinanderfolgende Reisen in beinahe gleichen Zeiträumen anstellt, so wird überhaupt das Mittel solcher Längen, welche aus der Interpolation wechselweiser Beobachtungen in P und in A hergeleitet werden, beinahe gänzlich unabhängig von der Beschleunigung des Chronometerganges sein.

Wenn die Compensirung der Chronometer untersucht ist, so kann man den Längenunterschied genauer bestimmen, vorausgesetzt, dass das Thermometer in dem Local, in welchem sich die Chronometer befinden, täglich nach je 6 oder 8 Stunden abgelesen wurde. Es sei L der gesuchte Längenunterschied zwischen zwei Orten A und B (B westlich gerechnet); wir nehmen an, dass die Chronometer von A nach B, dann von B nach A zurücktransportirt wurden und dass die astronomischen Beobachtungen und Chronometervergleichungen, welche in A und B ausgeführt waren, Folgendes für eins der Chronometer ergeben haben:

	in A, . . .	in B, . . .	wieder in A,
zur Zeit	T, . . .	$T+\tau$, . . .	$T+\tau+\tau'$,
die Uhrcorrection	a, . . .	b, ...	a'.

Aus den Thermometerablesungen lässt sich leicht die mittlere Temperatur eines jeden Tages ableiten; es seien r', r'',... $r^{(\tau)}$, $r^{(\tau+1)}$, . . ., $r^{(\tau+\tau')}$ die mittleren Temperaturen des 1sten, 2ten, . . . (τ)ten, $(\tau+1)$ten, . . ., $(\tau+\tau')$ten Tages nach T; dann entspricht der Reise in Verlauf von $\tau+\tau'$ die mittlere Temperatur R, wo

$$R=\frac{r'+r''+\ldots+r^{(\tau)}+r^{(\tau+1)}+\ldots+r^{(\tau+\tau')}}{\tau+\tau'}$$

ist. Nennen wir m den täglichen Gang des Chronometers in der constanten Temperatur R, so können seine täglichen Gänge $m', m'', \ldots, m^{(\tau+\tau')}$ bei den Temperaturen r', r'' . . . $r^{(\tau+\tau')}$ durch folgende Gleichungen dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
m' &= m+p(r'-R)+q(r'-R)^2,\\
m'' &= m+p(r''-R)+q(r''-R)^2,\\
&\;\;\vdots\\
m^{(\tau)} &= m+p(r^{(\tau)}-R)+q(r^{(\tau)}-R)^2,\\
m^{(\tau+1)} &= m+p(r^{(\tau+1)}-R)+q(r^{(\tau+1)}-R)^2,\\
&\;\;\vdots\\
m^{(\tau+\tau')} &= m+p(r^{(\tau+\tau')}-R)+q(r^{(\tau+\tau')}-R)^2;
\end{aligned}
$$

wo p und q die bekannten Compensirungscoefficienten sind (§ 95, S. 243). Addirt man alle diese Gleichungen zusammen und bemerkt, dass

$$
\begin{aligned}
m'+m''+\ldots+m^{(\tau+\tau')} &= a'-a,\\
r'+r''+\ldots+r^{(\tau+\tau')} &= (\tau+\tau').R
\end{aligned}
$$

ist, so erhält man

$$a'-a=(\tau+\tau')m+q\{(r'-R)^2+(r''-R)^2+\ldots+(r^{(\tau+\tau')}-R)^2\}.$$

Nun bedeutet $b-L$ die Uhrcorrection in A zur Zeit $T+\tau$, und es ist einleuchtend, dass die Summe

$$m'+m''+\ldots+m^{(\tau)}=b-L-a$$

sein muss; addirt man also die Gleichungen für $m', m'', \ldots m^{(\tau)}$ zusammen, so kommt

$$
\begin{aligned}
b-L-a=\tau.m+p.\{(r'-R)+(r''-R)+\ldots+(r^{(\tau)}-R)\}\\
+q.\{(r'-R)^2+(r''-R)^2+\ldots+(r^{(\tau)}-R)^2\}.
\end{aligned}
$$

Durch die Eliminirung von m aus den Gleichungen für $a'-a$ und für $b-L-a$, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&(\tau+\tau')(b-L-a)-\tau(a'-a)=\\
&=(\tau+\tau')p\{(r'-R)+(r''-R)+\ldots+(r^{(\tau)}-R)\}\\
&\quad+\tau' q\{(r'-R)^2+(r''-R)^2+\ldots+(r^{(\tau)}-R)^2\}\\
&\quad-\tau q\{(r^{(\tau+1)}-R)^2+(r^{(\tau+2)}-R)^2+\ldots+(r^{(\tau+\tau')}-R)^2\}
\end{aligned}
$$

Es sei

$$(\tau+\tau')(b-l-a)-\tau(a'-a)=0$$

oder

$$l=b-a+\frac{\tau}{\tau+\tau'}\cdot(a'-a);$$

l drückt also den Längenunterschied aus, wenn auf die Glieder, welche vom Mangel der genauen Compensirung des Chronometers abhängen, keine Rücksicht genommen wird. Zieht man die Gleichungen, welche L und l enthalten, eine von der andern ab, so hat man

$$L=l-p\{(r'-R)+(r''-R)+\ldots+(r^{(\tau)}-R)\}$$
$$-\frac{q}{t+\tau'}\cdot\left\{\begin{array}{l}\tau'[(r'-R)^2+(r''-R)^2+\ldots+(r^{(\tau)}-R)^2]\\ -\tau[(r^{(\tau+1)}-R)^2+(r^{(\tau+2)}-R)^2+\ldots+(r^{(\tau+\tau')}-R)^2]\end{array}\right\}$$

Sind die Chronometerexpeditionen in guter Jahreszeit ausgeführt, so werden die Verbesserungsglieder, welche p und q enthalten, wenig ausmachen und können mit Nutzen nur dann in Betracht genommen werden, wenn p und q sicher bestimmt sind und die Untersuchung der Compensirung nicht zu lange vor oder nach der Chronometerexpedition angestellt wurde.

Auf eine ganz ähnliche Weise wird der Längenunterschied berechnet, wenn der Einfluss des Wärmewechsels nicht vermittelst der häufigen Thermometerablesungen, sondern durch die häufigen Bestimmungen des täglichen Ganges eines uncompensirten Chronometers abgeleitet ist. Wir haben die dabei angewandten Formeln schon angeführt (S. 242); sie haben dieselbe Gestalt, wie die oben erwähnten Ausdrücke und können also auf dieselbe Weise zur Auflösung der Aufgabe benutzt werden.

150. Man darf nicht annehmen, dass jede Reise die Länge mit gleicher Zuverlässigkeit ergiebt, denn je schneller und bequemer die Reise vor sich geht, um so grösseres Zutrauen verdient das Resultat. Es ist klar, dass sich die Längenbestimmung hier auf die Interpolation verschiedener Stände des Chronometers

gründet; und wenn wir daher ihre Fehler als vollkommen zufällig annehmen, so haben wir § 94, S. 239 gesehen, dass das Gewicht $= g$, oder der Grad des Zutrauens, den die aus einer vollständigen Reise abgeleitete Länge verdient, durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$g = k \frac{(\tau + \tau')}{\tau\tau'},$$

wo k eine constante Zahl ist, welche man willkührlich für die ganze Berechnung wählen kann, und τ und τ' Zeitintervalle sind, deren Bedeutung wir im vorhergehenden Paragraphen erwähnt haben. Wenn wir statt eines zufälligen einen gesetzmässigen Fehler des Chronometers § 94, S. 240 voraussetzen wollen, welchen Struve bei einigen astronomischen Uhren empirisch abgeleitet hat, so erhalten wir für das Gewicht einer Längenbestimmung den Ausdruck:

$$g = k.\left(\frac{\tau + \tau'}{\tau\tau'}\right)^2.$$

Uebrigens ist diese Bestimmung der Gewichte und viele andere Bestimmungsweisen, welche man vorgeschlagen hat, mehr oder weniger willkührlich, denn jedes Chronometer hat seine Eigenthümlichkeit, welche sehr schwer oder wohl gar nicht in Rechnung zu ziehen ist, wozu noch die verschiedenen Umstände, die sich auf der Reise ereignen, hinzukommen. Zur Berechnung der Gewichte hat Struve endlich folgende Formel angenommen:

$$g = \frac{K}{T\sqrt{\tau\tau''}},$$

wo T die Zeitdauer einer ganzen Reise bezeichnet, τ die Zwischenzeit der Beobachtungen am Anfangspunkte und Endpunkte der Reise und τ'' dasselbe zwischen der letzten Beobachtung am Endpunkte und am Anfangspunkte nach der Zurückkunft.

Indem wir nun einen der vorhergehenden Ausdrücke zur Bestimmung der einzelnen Gewichte annehmen, wollen wir die

aus den verschiedenen Reisen gefundenen Längen durch λ', λ'', λ''' ...., ihre zugehörigen Gewichte aber durch g', g'', g''' .... bezeichnen, und erhalten alsdann nach der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die wahrscheinlichste Länge λ den bekannten Ausdruck:

$$\lambda = \frac{\lambda' g' + \lambda'' g'' + \lambda''' g''' + \ldots\ldots}{g' + g'' + g''' + \ldots\ldots}$$

Setzt man hierauf $\lambda' - \lambda = v'$, $\lambda'' - \lambda = v''$ u. s. w. und bezeichnet durch v den mittleren, durch ε aber den wahrscheinlichen Fehler in der Bestimmung von λ, so erhalten wir:

$$v = \pm \sqrt{\frac{g' v'^2 + g'' v''^2 + \ldots\ldots + g^{(n)} v^{(n)2}}{(g' + g'' + \ldots\ldots + g^{(n)})(n-1)}}; \quad \varepsilon = 0{,}6745\, v;$$

wo n die Anzahl der gefundenen Werthe λ', λ'', λ''' .... bezeichnet.

Auf ganz dieselbe Weise kann man nun die Länge nach jedem andern Chronometer berechnen, und ebenso ihren entsprechenden mittleren und wahrscheinlichen Fehler bestimmen; diese Fehler dienen dazu, den Grad des Zutrauens beurtheilen zu können, welchen man in eine, mit Hülfe irgend eines Chronometers gemachte Längenbestimmung setzen kann; die Gewichte dieser Bestimmungen selbst verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der entsprechenden mittlern Fehler. Bezeichnet man daher durch L', L'', L''' .... die wahrscheinlichen Längen, wie sie mit Hülfe des 1sten, 2ten, 3ten ..... Chronometers gefunden wurden, durch G', G'', G''' ..... ihre entsprechenden Gewichte, und durch w', w'', w''' ..... ihre mittleren Fehler, so erhalten wir:

$$G' = \frac{1}{w' w'}, \quad G'' = \frac{1}{w'' w''}, \quad G''' = \frac{1}{w''' w'''}, \ldots\ldots$$

und endlich für die wahrscheinlichste Länge selbst, wird man haben:

$$L = \frac{L' G' + L'' G'' + L''' G''' + \ldots}{G' + G'' + G''' + \ldots}.$$

Setzt man nun $L'-L = V'$, $L''-L = V''$ u. s. w., und bezeichnet alsdann ihren mittleren Fehler durch V, ihren wahrscheinlichen aber durch F, so findet man:

$$V = \pm\sqrt{\frac{G'V'^2 + G''V''^2 + \ldots\ldots}{(G'+G''+\ldots)(N-1)}};\quad F = 0{,}6745\, V;$$

wo N die Zahl der angewandten Chronometer bedeutet. Diese Rechnungsart wird dann ein zuverlässiges Resultat ergeben, wenn die Zahl der guten Chronometer keine zu geringe ist.

Der so berechnete Fehler wird kleiner als der wahre Fehler der Länge ausfallen; denn dieser letztere hängt noch von den Beobachtungsfehlern an beiden Orten ab, zwischen welchen der Längenunterschied gesucht wird.

Wenn zwischen den beiden gegebenen Orten sich noch viele andere Oerter befinden, an welchen man die Chronometer verglichen und Zeitbestimmungen gemacht hatte, so kann man die relative Länge aller dieser Oerter eben so bestimmen, wie wir es eben gezeigt haben.

151. Wie schon in § 145 erwähnt, haben die Erfahrungen bewiesen, dass verschiedene Beobachter die Zeit des Durchgangs eines Sterns durch Fäden, die im Brennpunkte irgend eines astronomischen Instruments aufgespannt sind, verschieden beobachten, und man nimmt hierbei an, dass der Unterschied zwischen denselben zwei Beobachtern für längere Zeit nahezu constant bleibt. Dieser Unterschied heisst die persönliche Gleichung zwischen den beiden Beobachtern. Wenn daher die Zeitbestimmungen, auf denen die Länge beruht, von verschiedenen Beobachtern gemacht worden sind, so muss man bei der Ableitung der Länge selbst auf diese persönlichen Gleichungen Rücksicht nehmen und alle Beobachtungen so reduciren, als ob sie von einem einzigen Beobachter gemacht worden wären.

Diese persönliche Gleichung kann man auf viele verschiedene Weisen, am einfachsten aber auf folgende Art finden. Man wählt einen dem Aequator nahen Stern, und zwei Beobachter

bemerken alsdann die Zeit seines Durchgangs durch die Verticalfäden eines im Meridiane fest aufgestellten Instruments; der eine von ihnen beobachtet den Stern an einigen der ersten Seitenfäden, der andere aber an den darauf folgenden, hierauf wählt man einen zweiten Stern und beobachtet in umgekehrter Ordnung, so dass derjenige, welcher vorher den Stern an den ersten Fäden beobachtete, ihn nunmehr an den letzten beobachtet, und umgekehrt. In kurzer Zeit wird man viele derartige Beobachtungen machen können, und da die Entfernungen der Seitenfäden vom Mittelfaden bekannt sind, so kann man alle Beobachtungen eines jeden Sterns, die von den beiden Beobachtern gemacht worden sind, auf den Mittelfaden reduciren; nimmt man darauf den Unterschied zwischen den auf diese Weise für jeden Beobachter berechneten Durchgängen der Sterne durch den Mittelfaden, so erhält man die persönliche Gleichung zwischen beiden Beobachtern.

Um den Längenunterschied unabhängig von der Genauigkeit der Lage der Sterne, die zur Zeitbestimmung gebraucht wurden, finden zu können, muss man an den Oertern, deren Längenunterschied gefunden werden soll, wo möglich dieselben Sterne beobachten. Wenn die Umstände es indessen nöthig machen, verschiedene Sterne zur Zeitbestimmung zu brauchen, so muss man die Fehler der geraden Aufsteigungen der beobachteten Sterne mit in Betracht ziehen.

Um die vorhergehenden Vorschriften zu erläutern, wollen wir nun ein Beispiel aus der Abhandlung Struves über die Länge der Pulkowaer Sternwarte entlehnen.

Das Dampfboot, welches wöchentlich eine Reise zwischen Kronstadt und Travemünde vollendet, gab die Möglichkeit an die Hand, im Laufe einiger Sommer funfzehn Reisen zwischen der Pulkowaer Sternwarte und Altona zu vollenden; bei der kleinen Entfernung von Travemünde nach Altona wurden die Chronometer und der Reisende in einem guten Reisewagen befördert. In Pulkowa wurden die Beobachtungen von vier Ob-

servatoren mit Hülfe verschiedener Durchgangsinstrumente gemacht; in Altona beobachteten eben so viele Astronomen an zwei Durchgangsinstrumenten. Bei diesen Reisen wurden sehr viele Chronometer benutzt, aber diejenigen von ihnen, welche ungenau gingen und bei welchen die Länge in verschiedenen Reisen mehr als 6^s in Zeit divergirend ausfiel, wurden ganz fortgelassen, so dass die endliche Länge auf 68 Chronometern beruht. Bei der Ankunft am Orte, wo Beobachtungen angestellt wurden, so wie auch bei der Abreise von dort, wurden alle Chronometer unter einander vermittelst eines Chronometers verglichen, welches 13 Mal in 6^s mittlerer Zeit schlug, und dieses selbst wurde vor dem Anfange und nach dem Ende der Vergleichungen mit einer astronomischen Pendeluhr, deren Uhrcorrection genau bekannt war, verglichen. Ausserdem wurden die Chronometer noch täglich unter einander verglichen, um etwa zufällige grössere Veränderungen in ihren Ständen zu entdecken.

Die Beobachtungen wurden nach einer besonders scharfen Methode angestellt, und Struve untersuchte die Personalgleichungen zwischen den verschiedenen Beobachtern aufs Genaueste, wodurch es ihm möglich wurde, alle Beobachtungen so scharf zu reduciren, als wenn er sie selbst angestellt hätte. Um das Gewicht g einer aus einer vollständigen Reise, hin und zurück, abgeleiteten Länge zu bestimmen, nahm Struve die Formel:

$$g = \frac{K}{T\sqrt{\tau\tau''}}$$

an, welche wir schon oben erwähnt haben (§ 150, S. 445); zur Bequemlichkeit der Rechnung nahm er dabei $K = 34560$ an, indem er für T, τ und τ'' als Zeiteinheit eine mittlere Stunde setzte, so dass also das Gewicht $g = 1$, bei $T = 288$ Stunden und $\tau = \tau'' = 120$ Stunden stattfindet.

Wir wollen nun zuerst ein Zahlenbeispiel angeben, um zu zeigen, wie man die Länge aus einer vollständigen Reise mittelst

nur eines Chronometers berechnet; die nachherfolgende Tafel enthält die Beobachtungen des Standes des Chronometers Haut Nr. 31 gegen mittlere Zeit.

Zeit in Pulkowa	Uhrcorrection des Chronometers in Pulkowa	Zeit in Altona	Uhrcorrection des Chronometers in Altona
$t=$ 1843. Mai 19. $21^h,54$	$p=$ $+0^h\,6^m\,38^s,10$	$t'=$ 1843. Mai 24 $22^h,66$	$a=$ $-1^h\,14^m\,39^s,92$
$t'''=$ Mai 31. $0^h,00$	$p'=$ $+0^h\,7^m\,9^s,58$	$t''=$ Mai 26. $10^h,72$	$a'=$ $=1^h\,14^m\,36^s,77$

Hier ist:

$$\tau = t'-t = 5^{\text{Tage}}\,1^h.12 = 121^h.12,\quad \tau'' = t'''-t'' = 109^h,28$$

$$T = t'''-t = 266^h.46;\quad \tau+\tau'' = 230^h,40,$$

$$g = \frac{K}{T\sqrt{\tau\tau''}} = \frac{34560}{266,46\sqrt{121,12\times109,28}} = 1,13$$

$$\begin{aligned}
p' &= +0^h\;\;7^m\;\;9^s,58\\
a &= -1\;\;14\;\;39,92\\
a' &= -1\;\;14\;\;36,77\\
\hline
q=p'+a-a' &= +0^h\;\;7^m\;\;6^s,43\\
p &= +0\;\;6\;\;38,10\\
\hline
q-p &= +0^h\;\;0^m\,28^s,33
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\tau(q-p)}{\tau+\tau''} = +\;14^s,89\\
p+r &= 0^h\;\;6^m\,52,99\\
a &= -1\;\;14\;\;39,92\\
\hline
p+r-a &= +1^h\,21^m\,32^s,91 = \lambda
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise macht man nun die Berechnung für jedes Chronometer und für jede Reise. In dem nun folgenden Beispiele wird die Länge aus zwei Chronometern: Dent Nr. 1774 und Haut Nr. 31 vollständig berechnet werden. Bezeichnet man nach Struve die Länge, wenn sie aus den Grenzbeobachtungen in Pulkowa und aus den mittleren in Altona berechnet wurde, durch *P*, dagegen, wenn sie aus den Grenzbeobachtungen in Altona und aus den mittleren in Pulkowa abgeleitet wurde, durch *A*, wobei die an *P* und *A* angehängten Ziffern die Nummer der

Reise, und n die Anzahl aller mit den angegebenen Chronometern gemachten Reisen bezeichnen, woraus endlich die wahrscheinlichste Länge $= L$ folgt, so hat man folgende Tafel:

	g' = Gewicht	Chronometerlänge nach Dent Nr. 1774.	v oder Abweichung von L	$v^2 g'$	Chronometerlänge nach Haut Nr. 31.	v oder Abweichung von L	$v^2 g'$
P^{I}	1,13				$1^h 21^m 32^s,91$	+ 0,30	0,102
A^{I}	1,06				33 ,13	+ 0,52	0,306
P^{II}	1,10	$1^h 21^m 32^s,51$	+ 0,05	0,002	33 ,36	+ 0,75	0,619
A^{II}	1,02	32 ,83	+ 0,37	0,139	33 ,12	+ 0,51	0,265
P^{III}	1,14	32 ,09	— 0,37	0,154	32 ,55	— 0,06	0,004
A^{III}	1,05	32 ,25	— 0,21	0,046	31 ,56	— 1,05	1,158
P^{IV}	1,19	31 ,69	— 0,77	0,706	32 ,70	+ 0,09	0,010
A^{IV}	0,96	32 ,77	+ 0,31	0,092	34 ,16	+ 1,55	2,306
P^{V}	1,09	32 ,79	+ 0,33	0,119	32 ,23	— 0,38	0,157
A^{V}	0,80	32 ,54	+ 0,08	0,005	31 ,65	— 0,96	0,737
P^{VI}	1,00	32 ,94	+ 0,48	0,230	33 ,38	+ 0,77	0,608
A^{VI}	1,10	31 ,93	— 0,53	0,309	31 ,97	— 0,64	0,451
P^{VII}	1,20	32 ,34	— 0,12	0,017	33 ,16	+ 0,55	0,363
A^{VII}	1,09	32 ,95	+ 0,49	0,262	31 ,78	— 0,83	0,751
P^{VIII}	0,76	31 ,86	— 0,60	0,273	30 ,92	— 1,69	2,171
A^{VIII}	0,41	33 ,77	+ 1,31	0,703			

$L = 1^h 21^m 32^s,46$; $\Sigma(v^2 g') = 0,057$

$n = 14$; $\Sigma g' = 13,91$

$G = \frac{(n-1)}{\Sigma v^2 g'} \times \Sigma g' = 59,15$

$\varepsilon = \pm 0^s,09$

$L = 1^h 21^m 32^s,61$

$\Sigma(v^2 g') = 10,008$

$n = 15$, $\Sigma g' = 15,69$

$G = 21,95$

$\varepsilon = \pm 0^s,14.$

Hieraus kann man die wahrscheinlichste Länge nach beiden Chronometern ableiten:

$$L = \frac{(1^h 21^m 32^s,46)\, 59,15 + (1^h 21^m 32^s,61)\, 21,95}{59,15 + 21,95}\, 1^h 21^m 32^s,50$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler $= \mp 0^s,066.$

III. Allgemeine astronomische Methoden zur Längenbestimmung.

152. Die allgemeinste Methode, die Länge von Oertern zu bestimmen, besteht darin, von verschiedenen Oertern der Erdoberfläche die Positionen solcher Gestirne zu ermitteln, welche ausser ihrer scheinbaren täglichen Bewegung noch eine starke Eigenbewegung besitzen und zu denen namentlich der Mond und die Trabanten des Jupiters gehören. Die Positionen erhält man entweder durch directe Messung vermittelst Winkelinstrumenten, oder, und im Allgemeinen mit weit grösserer Schärfe, durch Beobachtung der Zeit, zu welcher diese Gestirne in Folge ihrer Bewegung entweder durch andere Gestirne Verfinsterungen oder Bedeckungen erleiden, oder dieselben an andern Himmelskörpern hervorbringen. Die verschiedenen Arten der hieraus hervorgehenden Methoden der Längenbestimmung werden in den folgenden Capiteln behandelt werden.

1. Berechnung der Länge aus Mondfinsternissen und aus den Verfinsterungen der Jupiters-Trabanten.

153. Wenn der Mond zur Zeit seiner Opposition mit der Sonne oder um die Zeit des Vollmonds sich in demjenigen Theile seiner Bahn befindet, der sehr nahe an der Ecliptik ist, so kann er mehr oder weniger von dem Schattenkegel, welchen die Erde wirft, getroffen werden und in Folge dessen auf einige Zeit verfinstert erscheinen. Da der Mond an und für sich ein dunkler Körper ist und nur auf seiner Oberfläche von der Sonne erleuchtet wird, so wird derjenige Theil des Mondkörpers, welcher in den Schatten tritt, seines Lichts gänzlich beraubt werden und dunkel erscheinen. Den Anfang der Mondfinsternisse wird man also an allen Orten, denen der Mond alsdann sichtbar ist, in einem und demselben physischen Augenblicke wahrnehmen, und ebenso wird das Ende der Finster-

niss an allen Orten, denen diese Erscheinung sichtbar ist, in demselben physischen Augenblicke bemerkt werden; folglich wird der Unterschied der Stern- oder Sonnenzeiten, welche man unter verschiedenen Meridianen beim Anfange oder Ende der Mondfinsterniss zählt, unmittelbar die Längendifferenz dieser Meridiane selbst ausdrücken; und sollten vielleicht an einem Orte, dessen Länge genau bekannt, keine Beobachtungen angestellt worden sein, so ist man beim heutigen Zustande der Mond- und Sonnentafeln im Stande, diesen Mangel dadurch zu ersetzen, dass man die Zeit des Anfanges und Endes der Mondfinsterniss für denjenigen Meridian berechnet, auf welchen sich die Tafeln beziehen. Auf diese Weise ergeben die Mondfinsternisse eines der einfachsten Mittel zur Längenbestimmung eines Orts, und in alten Zeiten wurde auch diese Methode der Längenbestimmung ausschliesslich benutzt.

Es ist jedoch leicht einzusehen, dass diese sonst so einfache Methode sehr ungenau ist. Ehe der Mond in den Kernschatten tritt, muss er erst den Halbschatten passiren, welcher in dem Masse dunkler wird, als er sich dem Kernschatten nähert; folglich wird das Licht der Sonne, welches der Mond reflectirt, nur allmählich schwächer, und man wird den Anfang und das Ende der Finsterniss selbst nie ganz genau bemerken können; der Fehler in dieser Beobachtung beträgt oft zwei Zeitminuten und sogar zuweilen noch mehr, wenn mit freiem Auge beobachtet wird. Um diesen Fehler zu verringern, beobachtet man mit einem Fernrohre die Eintritte und Austritte der verschiedenen Flecke, welche sich auf der Mondscheibe befinden, in den Schatten, und bestimmt alsdann aus diesen Beobachtungen ebenfalls die Länge; aber die Erfahrung lehrt, dass auch in diesem Falle die Zuverlässigkeit der Resultate eine sehr geringe ist.

Statt der Mondfinsternisse kann man ebenso einfach und mit mehr Vortheil die Verfinsterungen der Jupitertrabanten in den Schatten des Jupiters zur Längenbestimmung anwenden;

weil sie nämlich sich häufiger ereignen und genauer beobachtet werden können. In diesem Falle nämlich wird der Fehler, welcher von dem Halbschatten herrührt, wegen der raschen Bewegung der Jupitertrabanten geringer als bei Mondfinsternissen ausfallen; und namentlich ist dieses der Fall bei den Beobachtungen des ersten, oder dem Jupiter zunächst liegenden Trabanten. Bei diesem übersteigt der Beobachtungsfehler selten 30 Zeitsecunden, und häufig ist er kleiner. Weit weniger genau sind die Beobachtungen des zweiten Trabanten, welcher weiter als der erste vom Hauptkörper absteht; noch ungenauer sind die Beobachtungen des dritten, noch weiter vom Jupiter entfernten Trabanten, so dass der Fehler hier schon 2—3 Minuten erreicht; am ungenauesten sind die Beobachtungen des vierten, am weitesten vom Jupiter abstehenden Trabanten, welche zuweilen sogar 3—4 Minuten betragen.

Je lichtstärker das Fernrohr ist, welches man zu den Beobachtungen braucht, um so später wird man den Eintritt, und desto früher wird man den Austritt des Trabanten aus dem Schatten des Jupiters beobachten; auch die Geübtheit des Beobachters hat in diesem Falle einen nicht unbedeutenden Einfluss. Uebrigens kann man annehmen, dass, wenn die Beobachter mit gleich guten Fernröhren ausgerüstet sind, sie gegenseitig die Eintritte und ebenso viel zu frühe als die Austritte zu spät beobachten werden, und wenn man daher das Mittel aus den Längen nimmt, die aus dem Eintritte und Austritte, welche an verschiedenen Orten mit denselben Fernröhren und von denselben Beobachtern gefunden worden, hergeleitet wurden, so wird dieses Mittel uns eine wahrscheinlichere Länge geben, als wenn wir nur aus dem Eintritte oder nur aus dem Austritte für sich die Länge hergeleitet hätten. In allen Fällen ist es gut, folgende Vorschriften zu befolgen.

1) Muss man vorzüglich nur den ersten Trabanten beobachten, dessen Verfinsterungen sich auch häufiger als die der anderen Trabanten ereignen.

2) Bei diesen Beobachtungen darf man keine andere als lichtstarke achromatische Fernröhre anwenden, deren Focallänge nicht kleiner als 3 bis 4 Fuss, und deren Objectiv eine freie Oeffnung von wenigstens 3 Zoll hat; um so grösser das Fernrohr ist, desto besser werden die Beobachtungen ausfallen.

3) Muss man nur unter den günstigsten Umständen beobachten, wenn das Gestirn vollkommen ruhig im Fernrohre erscheint, und stets muss man vermeiden, diejenigen Verfinsterungen zu beobachten, die sich um die Zeit der Dämmerung ereignen, sowie auch solche, welche bei zu kleinen Höhen des Jupiters über dem Horizonte stattfinden.

4) Man kann diejenigen Verfinsterungen der Jupiterstrabanten, welche sich zur Zeit der Opposition, oder sich auch drei bis vier Tage vor oder nach der Opposition des Jupiters ereignen, nicht mit Vortheil gebrauchen, denn alsdann geschieht der Eintritt oder Austritt des Trabanten so nahe am hellen Rande des Jupiters selbst, dass man ihn nur sehr schwer beobachten kann.

5) Man muss erst bestimmen, welcher von den vier hellen Punkten, die den Planeten begleiten, der Trabant ist, dessen Verfinsterung in den Schatten des Jupiters wir zu beobachten beabsichtigen, und ganz besonders wichtig ist es, den Ort des Austritts des Trabanten aus dem Schatten zu kennen, damit man bei Zeiten seine Aufmerksamkeit auf diesen Ort richten kann. Zu diesem Zwecke findet man in den astronomischen Ephemeriden Mittel angegeben, wodurch man schnell und bequem die scheinbare Lage der Trabanten finden kann; auch findet man die Anleitung hierzu in jeder Ephemeride umständlich auseinandergesetzt. Die Zeit der Verfinsterung in der Ephemeride ist immer für denjenigen Ort angegeben, auf welchen die Ephemeride selbst sich bezieht; legt man darauf zur Zeit der Ephemeride die in Zeit ausgedrückte Länge des Beobachtungsorts hinzu, wenn sie östlich ist, oder zieht sie davon ab, wenn die Länge westlich ist, so erhält man die Zeit der Verfinsterung am Beobachtungs-

orte auf den Meridian dieses Orts bezogen. Vor der Opposition des Jupiters ist sein Schatten nach Westen, dagegen nach der Opposition nach Osten gerichtet, mithin wird im ersten Falle die Verfinsterung westlich, im zweiten Falle aber östlich vom Jupiter stattfinden. In astronomischen Fernröhren stellt sich alles umgekehrt dar, als mit freiem Auge gesehen, welches man wohl beachten muss.

6) Die Längenbestimmungen, welche aus Jupiters Trabantenverfinsterungen gefolgert werden, kann man nur als hinreichend genähert ansehen, wenn man keine grosse Genauigkeit verlangt, denn sonst muss man zu anderen besseren Methoden seine Zuflucht nehmen.

Wenn man eine solche Verfinsterung beobachtet hat, und keine dazu entsprechende an einem andern Orte findet, so kann man in diesem Falle die in der Ephemeride angegebene Zeit der Verfinsterung, welche sich auf den Meridian der Ephemeride bezieht, statt der correspondirenden benutzen.

Beispiel. Am 26. März 1827 ereignete sich der Eintritt des ersten Trabanten in den Schatten des Jupiters

nach der Beobachtung in Altona um $11^h 41^m 32^s,8$ mittlere Altonaer Zeit,
nach der Connaissance des temps um $11\ 10\ 54,0$ mittlere Pariser Zeit.
Oestliche Länge Altonas von Paris $= 0^h 30^m 38^s,8$

Am 20. Mai 1827 fand man den Austritt des ersten Jupitertrabanten aus dem Schatten

nach den Altonaer Beobachtungen um $10^h 36^m 16^s,4$ mittlere Altonaer Zeit,
nach der Connaissance des temps um $10\ \ 5\ 52,0$ mittlere Pariser Zeit.
Oestliche Länge Altonas von Paris $= 0^h 30^m 24^s,4$.

Nimmt man das Mittel aus beiden Bestimmungen, so erhält man die östliche Länge Altonas von Paris $= 0^h 30^m 31^s,6$, welche nur um einige Zeitsecunden von der wahren abweicht.

2. Berechnung der Länge aus den Sonnenfinsternissen und aus den Bedeckungen der Sterne und Planeten durch den Mond.

154. Die Sonnenfinsternisse ereignen sich dann, wenn der Mond zur Zeit seiner Conjunction mit der Sonne, oder zur Zeit

des Neumonds, in dem Theile seiner Bahn sich befindet, welcher sehr nahe an der Ecliptik ist; der Mond ist alsdann zwischen der Erde und der Sonne gelegen und entzieht unserm Anblicke dadurch einen grössern oder kleinern Theil der letztern. Auf dieselbe Weise treten zuweilen die untern Planeten, Mercur und Venus, in ähnliche Conjunctionen mit der Sonne; ihr verfinsterter Theil hat alsdann die Gestalt eines kleinen runden schwarzen Fleckes; solche Erscheinungen werden „Durchgänge der Planeten vor der Sonnenscheibe“ genannt. In ähnlicher Weise ereignen sich zuweilen Conjunctionen des Mondes mit den Sternen oder Planeten, so dass diese alsdann von dem Mondskörper bedeckt werden. Da der Mond klein und sehr nahe bei der Erde ist, so wird er in demselben physischen Augenblicke von Beobachtern, die sich an verschiedenen Punkten auf der Erdoberfläche befinden, auch in verschiedenen Richtungen gesehen werden, und es kann daher leicht geschehen, dass irgend ein Gestirn, oder ein Theil desselben, einem Beobachter durch den Mond verfinstert erscheint, dagegen einem andern Beobachter an einem andern Orte entweder gar nicht verfinstert, d. h. in seinem vollen Lichte, oder doch wenigstens zu einer andern Zeit verfinstert erscheint. Hieraus sieht man nun, dass es aus den Beobachtungen einer solchen Erscheinung nicht anders möglich sein wird, die Längenbestimmung von Orten herzuleiten, als dass man auf den Einfluss Rücksicht nimmt, welcher in der Zeit dieser Erscheinung an verschiedenen Orten durch die Aenderung in der Lage des Gestirns hervorgebracht wird. Hierzu giebt es nun verschiedene Methoden, wovon die erste schon von Kepler angegeben und darauf von Lalande und Bohnenberger vervollständigt wurde. Die zweite Methode aber ist rein analytisch und rührt von Lagrange her; sie wurde aber so bedeutend von Bessel umgearbeitet und verbessert, dass man sie jetzt mit Recht die Besselsche Methode nennt. Eine andere elegante analytische Methode, die Finsternisse zu berechnen, ist von P. A. Hansen vorgeschlagen, welche zuerst in den Astrono-

mischen Nachrichten, Bd. XV, Nr. 339—342 angegeben und später in den Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. IV umständlich erläutert ist.

Erste Methode.

155. Diese Methode beruht darauf, aus den Beobachtungen der Verfinsterung eine solche Erscheinung herzuleiten, welche für alle Beobachter auf der Oberfläche der Erde in demselben physischen Augenblick stattfinden wird; eine solche Erscheinung ist nun die wahre Conjunction des verfinsterten und verfinsternden Körpers; wenn diese Conjunction sich auf die Ecliptik bezieht, so entspricht sie demjenigen Augenblicke, in welchem die wahren oder vom Centrum der Erde aus gesehenen Längen beider Gestirne einander gleich sein werden, und heisst die wahre ecliptische Conjunction der beiden Gestirne; bezieht sie sich aber auf den Aequator, so entspricht sie demjenigen Augenblicke, wenn die beiden Gestirne gleiche wahre gerade Aufsteigung haben, und heisst dann die wahre äquatoriale Conjunction der beiden Gestirne. Mit den heutigen astronomischen Ephemeriden ist es bequemer, die wahre äquatoriale Conjunction als die wahre ecliptische Conjunction zu berechnen.

In den folgenden Untersuchungen wollen wir mit der Berechnung der Verfinsterungen der Sonne durch den Mond beginnen und darauf zeigen, wie man andere Arten von Verfinsterungen berechnen kann.

Alle Sonnenfinsternisse sind entweder partiell, d. h. es wird nur ein Theil der Sonne vom Monde bedeckt, oder sie sind total, welches sich dann ereignet, wenn der scheinbare Winkelhalbmesser des Mondes grösser als der der Sonne ist, und zugleich die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte beider Gestirne bei der Mitte der Verfinsterung sehr nahe an einander liegen; in diesem Falle wird die ganze Sonne verfinstert erscheinen, und der Beobachtungsort muss dann vom Schattenkegel des Mondes

getroffen werden. Wenn aber bei der Mitte der Verfinsterung die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte beider Gestirne einander sehr nahe sind, aber der scheinbare Winkelhalbmesser des Mondes kleiner als der der Sonne ist, so erreicht der Schattenkegel des Mondes den Ort des Beobachters nicht, und dieser kann alsdann die Verfinsterung nur ringförmig sehen, d. h. der Mond wird sich auf der Sonnenscheibe als eine schwarze Kreisscheibe darstellen, um welche herum ein heller Lichtring erscheint. Bei totalen und ringförmigen Finsternissen muss man folgende vier verschiedene Momente beobachten; 1) den Anfang der Verfinsterung überhaupt, oder die erste äussere Berührung der Ränder beider Gestirne; 2) den Anfang der totalen Verfinsterung, und im Falle einer ringförmigen Verfinsterung den Anfang der Ringbildung, welcher der ersten innern Berührung der Ränder entspricht; 3) die letzte innere Berührung der Ränder, und 4) das Ende der Verfinsterung überhaupt oder die letzte äussere Berührung der Ränder. Die Fig. 4, Taf. V bezieht sich auf den Anfang einer totalen Sonnenfinsterniss; L ist der Mittelpunkt des Monds und S der Mittelpunkt der Sonne; hier ist der scheinbare Halbmesser des Mondes grösser als der scheinbare Halbmesser der Sonne, und die erste innere Berührung der Ränder findet immer auf der Ostseite der Sonne statt. Die Fig. 5 bezieht sich auf die erste innere Berührung bei einer ringförmigen Sonnenfinsterniss; S ist das Centrum der Sonne und L das Centrum des Mondes; aber hier ist der scheinbare Halbmesser des Monds kleiner als der der Sonne, und der erste Anfang der Ringbildung ereignet sich immer auf der Westseite der Sonne. Auf der entgegengesetzten Seite der Sonne findet die letzte innere Berührung statt. Die erste äussere Berührung der Ränder (Fig. 3) des Monds und der Sonne ereignet sich immer auf der Westseite der Sonne, die letzte äussere Berührung der Ränder dagegen auf ihrer Ostseite. Bei der Berechnung dieser Finsternisse haben wir nur die relative scheinbare Bewegung des Monds und der Sonne in Betracht zu ziehen, und daher brau-

chen wir nicht die Parallaxen des Monds und der Sonne in gerader Aufsteigung und Abweichung u. s. w. für sich besonders zu berechnen, sondern man kann gleich den Unterschied dieser Parallaxen, oder die relative Parallaxe, wie er sonst auch genannt wird, berechnen und sich hierzu der früher angegebenen Formeln in § 19—20, S. 33—36 bedienen; man kann sogar in den meisten Fällen ohne merklichen Fehler die relative Parallaxe des Mondes dadurch genau herleiten, dass man in den Formeln zur Berechnung der Parallaxe in AR und Declination beim Monde, statt der Horizontalparallaxe des Monds selbst, den Unterschied dieser und der Sonnenhorizontalparallaxe braucht.

Wir wollen nun annehmen, dass man den Anfang der Finsterniss an irgend einem Orte zur mittleren Sonnenzeit t beobachtet hätte, und dass $L+x$ die geographische Länge (in Zeit) des Beobachtungsorts von demjenigen Meridiane ist, auf welchen sich die Ephemeride bezieht; hierbei nehmen wir L als die genäherte bekannte Länge des Orts und x als die noch zu findende Correction an, welche man zu L hinzufügen muss, um die genaue Länge herzuleiten; alsdann wird $t \pm (L+x)$ die mittlere Zeit unter dem Meridiane der Ephemeride in demjenigen Augenblicke ausdrücken, wenn der Beobachter die Zeit t zählt; (+) ist zu nehmen, wenn der Beobachtungsort sich westlich, und (—), wenn der Beobachtungsort sich östlich vom Meridiane der Ephemeride befindet.

Durch Interpolation können wir aus der Ephemeride für die Zeit $t \pm L$ die folgenden Werthe entnehmen:

	des Mondes,	*der Sonne*
die wahre gerade Aufsteigung des Centrums	α	A
„ „ „ Declination „ „	δ	D
den wahren Halbmesser	r	R
die Aequatorial-Horizontalparallaxe . . .	$\Pi☾$ . . .	$\Pi☉$

Bezeichnen wir nun die geographische Breite des Beobachtungsorts durch φ, die geocentrische durch φ' und die Stern-

zeit am Beobachtungsorte beim Anfange der Finsterniss durch s, so können wir nach § 19—20, S. 33—36 die Horizontalparallaxe des Mondes am Beobachtungsorte $= \pi☾$, oder auch den Unterschied der Horizontalparallaxen beider Gestirne $= \pi = \pi☾ - \pi\odot$, an diesem Orte leicht bestimmen, und finden dann:

die relative Parallaxe des Mondes in gerader Aufsteigung $= p$
" " " " " " Declination . . $= q$
die Summe der scheinbaren Winkelhalbmesser
beider Gestirne $= k' = r' + R'$.

Für die innere Berührung der Gestirne ist $k' = r' - R'$ bei totalen, und $k' = R' - r'$ bei ringförmigen Sonnenfinsternissen (R' kann immer gleich R gesetzt werden).

Die scheinbare Declination des Mondes ist $\delta, = \delta + q$.

Was die Zeichen betrifft, so können wir annehmen, dass p und q positiv sind, wenn die scheinbare gerade Aufsteigung und Abweichung des Monds grösser als die wahren sind.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, aus den angestellten Beobachtungen der Finsterniss 1) den Unterschied der wahren geraden Aufsteigung, der Sonne $= \odot$ und des Mondes $= ☾$ zur Zeit der Beobachtung zu bestimmen, 2) die wahre Conjunction für den Meridian des Beobachters zu finden und 3) den Fehler der Länge des Beobachtungsorts $= x$, welcher vorläufig noch unbekannt ist, zu ermitteln.

Wäre die Länge des Orts genau bekannt und die Tafeln der Gestirne ohne Fehler, so würde $x = 0$, $☾ = \alpha$ und $\odot = A$ gefunden werden; aber da x und die Fehler der Sonnen- und Mondstafeln, immer sehr klein sind, so wird man bei der Berechnung der Parallaxen p und q keinen merklichen Fehler begehen, wenn man statt $\odot$ und $☾$ die Werthe A und α setzt; bezeichnet man daher durch $☾'$ und $\odot'$ die genauen scheinbaren geraden Aufsteigungen der Mittelpunkte des Mondes und der Sonne zur Zeit der Beobachtung, und durch α' und A' ihre ge-

näherten aus den Tafeln mittelst der ungenauen Länge L des Orts berechneten Werthe, so hat man:

$$p = \alpha' - \alpha - (A' - A) = ☾' - ☾(☉' - ☉).$$

Beim Anfange oder Ende der Finsterniss überhaupt scheinen sich beide Gestirne äusserlich zu berühren (Fig. 3, Taf. V), und es wird dann der scheinbare Abstand ihrer Mittelpunkte $= k' = r' + R'$, oder gleich der Summe der scheinbaren Winkelhalbmesser des Mondes und der Sonne werden. Denkt man sich nun das sphärische Dreieck PLS, welches vom sichtbaren Pole des Aequators P und von den scheinbaren Mittelpunkten des Mondes L und der Sonne S gebildet wird; bezeichnen wir ferner die scheinbare Abweichung des Mondes durch $\delta_{,}$, die scheinbare Abweichung der Sonne durch $D_{,}$, den Winkel $SPL = a'$, und setzen $a' = (☉' - ☾')$, wo alsdann a' positiv beim Anfange und negativ beim Ende der Verfinsterung anzunehmen ist: so erhalten wir $PS = 90° - D_{,}$; $PL = 90° - \delta_{,}$, $LS = k' = r' + R'$, und erhalten aus dem Dreieck PLS alsdann:

$$\cos k' = \sin D_{,} \sin \delta_{,} + \cos \delta_{,} \cos D_{,} \cos a',$$

oder

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} k' = \sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,}) + \cos D_{,} \cos \delta_{,} \sin^2 \tfrac{1}{2} a'.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\cos D_{,} \cos \delta_{,} &= \tfrac{1}{2}[\cos(D_{,} + \delta_{,}) + \cos(D_{,} - \delta_{,})] \\ &= \cos^2 \tfrac{1}{2}(\delta_{,} + D_{,}) - \sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,});\end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned}\sin^2 \tfrac{1}{2} k' = \sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,}) + \sin^2 \tfrac{1}{2} a' \cos^2 \tfrac{1}{2}(\delta_{,} + D_{,}) - \\ - \sin^2 \tfrac{1}{2} a' . \sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,}).\end{aligned}$$

Zur Zeit einer Verfinsterung können die Werthe $\tfrac{1}{2} a'$ und $\tfrac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,})$ niemals 17′ übersteigen, und wenn der eine von ihnen 17′ erreicht, so wird der andere sehr klein; den grössten Werth hat das Glied $\sin^2 \tfrac{1}{2} a' \sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,})$, wenn $\tfrac{1}{2} a' = \tfrac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,})$ ist; aber alsdann sind $\tfrac{1}{2} a'$ und $\tfrac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,})$ kleiner als 12′; das Product $\sin^2 \tfrac{1}{2} a' \sin^2 \tfrac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,})$ ist also im

Vergleich gegen die andern Glieder als verschwindend anzusehen; ebenso kann man auch statt der Sinusse sehr kleiner Bögen diese Bögen selbst anwenden und erhält daher, wenn man $b' = \delta_{,} - D_{,} = \delta' - D$, und $d' = \frac{1}{2}(\delta_{,} - D_{,})$ oder beinahe $= \frac{1}{2}(\delta' + D)$ setzt:

$$k'^2 = b'^2 + a'^2 \cos^2 d' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1);$$

der Unterschied zwischen dem aus dieser letzten Gleichung gefundenen und dem wahren Werthe von k' wird niemals 0″,004 in Bogen übersteigen; daher hat man mit grosser Annäherung:

$$a' = \pm \frac{\sqrt{(k'+b')(k'-b')}}{\cos d'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wo $b' = \delta' - D = \delta + q - D$; $d' = \frac{\delta' + D}{2} = \frac{\delta + D + q}{2}$.

Für den Anfang der Finsterniss muss man (+) nehmen; weil dann $a' = ☉' - ☾'$ und $☉' > ☾'$ ist. Bezeichnet man durch a den Unterschied der wahren geraden Aufsteigungen der Sonne und des Mondes, oder setzt man $a = ☉ - ☾$, so ist die relative Parallaxe $p = ☾' - ☾ - (☉' - ☉) = ☾' - ☉' - (☾ - ☉)$, und folglich $p = -a' + a$; also für den Anfang der Verfinsterung hat man:

$$a = a' + p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Wir müssen jetzt die Geschwindigkeiten der wahren Bewegungen der Mittelpunkte der Gestirne in gerader Aufsteigung berechnen und sie für die Mitte des Zeitraums zwischen dem Anfange der Finsterniss und der wahren Conjunction der Gestirne bestimmen. Es sei die Bewegung in einer mittlern Stunde für die Zeit der erwähnten Mitte beim Monde $= m$ Secunden in Bogen, und bei der Sonne $= n$ Secunden in Bogen. In einer mittlern Stunde sind 3600 mittlere Zeitsecunden enthalten; bezeichnet nun t die mittlere Zeit beim Anfange der Finsterniss, als die Differenz $☉ - ☾ = a$ war, und τ die mittlere Zeit der wahren Conjunction beider Gestirne, welche

man unter dem Meridiane des Beobachters zählte, als $a = 0$ war, so wird $\tau - t$ in Secunden aus der Proportion: $\tau - t : 3600'' = a : m - n$ bestimmt; nun ist $a = a' + p$; wir erhalten also:

$$\tau = t + \frac{3600''}{m-n}(a'+p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus der astronomischen Ephemeride lässt sich die mittlere Zeit T berechnen, welche zur Zeit der wahren Conjunction unter dem Meridiane der Ephemeride stattfindet; wenn nun $L + x$ die wahre westliche, vom erwähnten Meridiane abgezählte Länge des Beobachtungsorts bezeichnet, so wird:

$$L + x = T - \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Wenn $T - \tau$ negativ wird, so ist die Länge östlich.

Zur Bestimmung von $m - n$ kann man die vorher berechneten Werthe von α und A benutzen; denn zur Zeit $t \pm L$ unter dem Meridiane der Ephemeride ist der Unterschied der wahren geraden Aufsteigungen beider Gestirne $= A - \alpha$, dagegen wird zur Zeit T unter demselben Meridiane derselbe Unterschied $= 0$; folglich hat man: $m - n = \frac{A - \alpha}{T - (t \pm L)}$, wo $A - \alpha$ in Secunden und $T - (t \pm L)$ in Stunden und Theilen einer Stunde ausgedrückt ist.

Auf ähnliche Weise leitet man die Länge aus der Beobachtung des Endes der Finsterniss ab; man braucht in diesem Falle nur in der Gleichung (2) das Zeichen (—) zu nehmen, weil alsdann ☾$' > \odot'$ ist.

Wenn die Finsterniss noch an einem zweiten Orte auf der Erde, dessen Länge genau bekannt ist, beobachtet ist, so kann man aus den dort angestellten Beobachtungen die mittlere Zeit $\tau_{,}$, welche an diesem Orte bei der wahren Conjunction beider Gestirne gezählt wurde, ebenso, wie wir es eben gezeigt haben, berechnen; dann ist $\tau - \tau_{,}$ der Längenunterschied zwischen beiden Beobachtungsorten. Die auf diese Weise bestimmte Länge ist weit zuverlässiger, als wenn man die aus der Beobachtung

abgeleitete Zeit der wahren Conjunction mit der aus den Tafeln berechneten $= T$ vergleicht; denn dieses T ist von den Fehlern abhängig, mit denen die Tafeln behaftet sind.

Am besten lässt sich die geographische Länge aus den Beobachtungen der innern Berührungen ableiten; man muss in diesem Falle bei totalen Finsternissen $k' = r' - R'$, und bei ringförmigen $k' = R' - r'$ setzen. Bei der ersten innern Berührung ist die scheinbare gerade Aufsteigung des Mondes in beiden Fällen kleiner als die scheinbare gerade Aufsteigung der Sonne; bei der letzten innern Berührung findet das Gegentheil statt.

156. Wenn die Beobachtungen vollkommen genau wären, und die Tafeln der Gestirne, sowie die bei der Berechnung angenommene Länge des Orts keine Fehler enthielten, so müsste man aus dem Anfang und Ende der Finsterniss dieselbe Zeit der wahren Conjunction erhalten. Die erwähnten verschiedenen Fehler werden eine vollkommene Uebereinstimmung nicht gestatten; da sie indessen immer klein sein werden, so lässt sich der Einfluss, welchen sie auf die Zeit der wahren Conjunction hervorbringen, immer durch die Differenzialrechnung bestimmen. Es seien die Werthe a', b', p' und die relative stündliche Bewegung beider Gestirne in gerader Aufsteigung $= m - n$ auf die oben erwähnte Weise und in Bezug auf die Zeit des Anfangs der Verfinsterung $= t'$ berechnet, ebenso mögen a'', b'', p'', und $m_{,} - n_{,}$ dieselbe Bedeutung für das Ende der Finsterniss $= t''$ haben; wenn nun τ' die aus der Beobachtung des Anfangs der Finsterniss, und τ'' die aus der Beobachtung des Endes abgeleitete Zeit der wahren Conjunction beider Gestirne bezeichnen, so ist:

$$\tau' = t' + h(a' + p'), \text{ wo } h = \frac{3600''}{m - n},$$

$$\tau'' = t'' + h_{,}(a'' + p''), \text{ wo } h_{,} = \frac{3600}{m_{,} - n_{,}}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Meistens wird τ' etwas verschieden von τ'' ausfallen; nimmt man aber an, dass die Werthe von a' und p' kleine Fehler $\delta a'$ und $\delta p'$ enthalten, welche von den oben erwähnten Ursachen herrühren, so können die wahren Werthe von a' und p' durch $a'+\delta a'$ und $p'+\delta p'$ ausgedrückt werden; nehmen wir an, dass die wahren Werthe von a'' und p'', $a''+\delta a''$ und $p''+\delta p''$ seien, und bezeichnen durch $\delta\tau'$ und $\delta\tau''$ die Correctionen, welche zu den berechneten Zeiten τ' und τ'' zuzulegen sind, um die genaue Zeit der wahren Conjunction aus der Beobachtung des Anfanges und Endes der Finsterniss zu erhalten, so muss $\tau'+\delta\tau' = \tau''+\delta\tau''$ werden. Die heutigen Tafeln der Sonne und des Mondes geben die wahre relative stündliche Bewegung dieser beiden Gestirne oder $m-n$ u. s. w. schon so genau, dass die Correctionen in τ' und τ'' nur von $\delta a'$, $\delta p'$ und $\delta a''$, $\delta p''$ abhängen können; die Werthe h und $h_{,}$ erleiden also keine Aenderung, und man kann anstatt der Gleichung (6) folgende annehmen:

$$\tau'+\delta\tau' = \tau'+h(\delta a'+\delta p'); \ \tau''+\delta\tau'' = \tau''+h_{,}(\delta a''+\delta p'') \quad (7)$$
$$\tau'+\delta\tau' = \tau''+\delta\tau''.$$

Setzen wir $\frac{1}{2}(\delta'+D) = d'$, und bemerken dabei, dass d' immer kleiner ist als 24°, so wird der Fehler in $a'\cos d'$, welcher von einer Ungenauigkeit in d' herrührt, bei der Kleinheit von a' unbedeutend sein, und daher erhält man durch Differenzirung der Gleichung (1):

$$k'\delta k' = b'\delta b'+\cos^2 d'.a'\delta a';$$

setzt man zu Abkürzung:

$$\frac{k'}{a'\cos d'} = \sec\psi'; \ \frac{b'}{a'\cos d'} = tg\psi' \quad . \ . \ . \ . \quad (8)$$

so erhalten wir:

$$\delta a' = (\sec\psi'.\delta k' - tg\psi'.\delta b')\sec d' \quad . \ . \quad (9).$$

Aus der Gleichung (8) ersieht man, das ψ' der Winkel am Sonnencentrum ist, welcher zwischen den beiden Bögen ein-

geschlossen ist, von denen der eine senkrecht auf dem Declinationskreise des Mondes steht und durch den Mittelpunkt der Sonne geht, der andere aber die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte beider Gestirne verbindet; um dieses zu erläutern, sei in Fig. 3 LS der Bogen, welcher die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte beider Gestirne, der Sonne S und des Mondes L verbindet, der Bogen QL der Declinationskreis, welcher durch das Centrum des Mondes geht, und QS der senkrechte Bogen zu QL; nun sind aber die Bögen LS, LQ und QS zur Zeit einer Verfinsterung so klein, dass man das rechtwinklige Dreieck LQS als ebenes betrachten kann; setzt man $LS = k'$, $LQ = D - \delta'$, $QS = a' \cos \delta'$, so wird $\sec QSL = \frac{k'}{a' \cos \delta'}$, mithin muss in Folge der Gleichung (8) $QSL = \psi'$ sein. Der Ausdruck (9) beweist, dass bei sonst gleichen Werthen von $\delta k'$ und $\delta b'$ der Fehler $\delta a'$ um so kleiner werden wird, als ψ' selbst kleiner ist; den geringsten Einfluss üben die Fehler $\delta k'$ und $\delta b'$ auf $\delta a'$ und auf $\delta \tau'$ aus, wenn $\psi' = 0$ wird, d. h. wenn während der Mitte der Verfinsterung die Mittelpunkte beider Gestirne scheinbar zusammenfallen, wenn also die Verfinsterung central ist. Es folgt daraus, dass die geographischen Längen, welche aus gut beobachteten totalen oder ringförmigen Sonnenfinsternissen abgeleitet werden, zuverlässiger sind, als die, welche aus der Beobachtung partieller Finsternisse folgen. Der Fehler kann besonders gross werden, wenn nur ein kleiner Theil der Sonne bedeckt wird und ψ' daher nahe an 90° ist.

Wir wollen jetzt die Bedeutung der einzelnen Fehler $\delta k'$, $\delta b'$ und $\delta p'$ u. s. w. untersuchen, und zugleich zeigen, auf welche Weise man den Fehler in den Tafeln der Gestirne und die Correction der Länge des Orts, welche bei der ersten Berechnung gefunden wurde, bestimmen kann.

Der scheinbare Mondhalbmesser verändert sich sehr langsam mit der Zeit, und obgleich er von der Parallaxe des Mondes abhängt, so wird doch ein kleiner Fehler in dieser Parallaxe

keinen merklichen Einfluss auf seine Bestimmung hervorbringen; alles dieses kann man mit weit grösserem Rechte vom Sonnenhalbmesser behaupten; und daher kann man annehmen, dass, wenn k die Summe oder Differenz der wahren, dagegen k' die Summe oder Differenz der scheinbaren Halbmesser des Mondes und der Sonne ist, alsdann $\delta k' = \delta k$ ist, oder dass der Fehler in k' gleich dem Fehler in k sein wird.

Wir wollen nun $\delta - D$, oder den Unterschied der wahren Declinationen des Mondes und der Sonne $= b$ setzen, indem wir ganz wie vorher den Unterschied $\delta' - D'$ der scheinbaren Declinationen dieser beiden Gestirne durch b' bezeichnen wollen; alsdann hängt der Fehler $\delta b'$ 1) von δb oder dem Fehler von b ab, welcher von der Ungenauigkeit der Tafeln herrührt; 2) hängt $\delta b'$ davon ab, dass die wahre Declination beider Gestirne mit einer ungenauen Zeit $t' \pm L$ berechnet ist, während man dazu die genaue Zeit $t' \pm (L + x)$ hätte nehmen sollen; bezeichnet man deshalb den Unterschied in der wahren Bewegung des Mondes und der Sonne in Declination während *einer mittlern Zeitsecunde* durch λ und drückt x in mittlern Zeitsecunden aus, so wird der gesuchte von dieser Ursache herrührende Fehler in $\delta b'$ durch λx ausgedrückt werden; 3) hängt $\delta b'$ noch von der Ungenauigkeit im angenommenen Unterschiede der Horizontalparallaxen des Mondes $= \pi☾$ und der Sonne $= \pi\odot$ ab; es sei dieser angenommene Unterschied $\pi☾ - \pi\odot = \pi$, der wahre $= \pi + \delta\pi$, und es sei der für den Anfang der Verfinsterung berechnete Unterschied der Parallaxen in Declination $= q'$, aber der wahre $= q' + \delta q'$, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass $\delta\pi : \pi = \delta q' : q'$ ist, und wird bis auf Grössen der ersten Ordnung bei der Kleinheit von $\delta\pi$ und $\delta q'$ ohne Weiteres: $\delta q' = \frac{q'}{\pi} \cdot \delta\pi$ setzen können. Auf diese Weise wird der vollständige Ausdruck des Fehlers $\delta b'$

$$\delta b' = \delta b + \lambda . x + \frac{q'}{\pi} \delta\pi$$

werden.

Die Ungenauigkeit im Unterschiede der Horizontalparallaxen der Gestirne $= \delta\pi$ bringt ebenso in p' einen Fehler hervor, welchen wir durch $\delta p'$ bezeichnen wollen, und dessen Werth $\delta p' = \frac{p'}{\pi} \cdot \delta\pi$ ist.

Die Horizontalparallaxe verändert sich so ausserordentlich langsam mit der Zeit, dass ein Fehler in der angenommenen Länge des Beobachtungsorts von ein bis zwei Zeitminuten keinen merklichen Einfluss auf die Berechnung der Werthe p' und q' hervorbringt, und wir können daher den Einfluss der kleinen Fehler, welche in p' und q' von einer unrichtig angenommenen Länge herrühren, gänzlich vernachlässigen. Setzt man nun der Kürze wegen:

$$\delta b + \lambda . x = \delta B$$

und substituirt die Werthe von $\delta k'$, $\delta b'$ und $\delta p'$ in die Gleichung (9), so wird endlich:

$$\delta a' = \left(sec\,\psi' . \delta k - tg\,\psi' . (\delta B + \frac{q'}{\pi} \cdot \delta\pi\right) sec\,d';$$

und aus Gleichung (7) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tau' + \delta\tau' &= \tau' + h\left(sec\,\psi' . \delta k - tg\,\psi' (\delta B + \frac{q'}{\pi} \cdot \delta\pi)\right) sec\,d' + h\frac{p'}{\pi} . \delta\pi \\ &= \tau' + h\,sec\,d'\,sec\,\psi' . \delta k - h\,sec\,d'\,tg\,\psi'\,\delta B + \\ &\qquad + \left(\frac{h\,p'}{\pi} - h\,sec\,d' . tg\,\psi' \frac{q'}{\pi} \cdot\right) \delta\pi \end{aligned}$$

wo $tg\,\psi' = \frac{b'}{a' \cos d'}$, und $a' = \odot' - ☾'$ ist.

Auf ähnliche Weise findet man für das Ende der Verfinsterung:

$$\begin{aligned} \tau'' + \delta\tau'' &= \tau'' + h_{,}\,sec\,d''\,sec\,\psi'' . \delta k - h_{,}\,sec\,d''\,tg\,\psi'' . \delta B + \\ &\qquad + \left(\frac{h_{,}p''}{\pi} - h_{,}\,sec\,d''\,tg\,\psi'' \cdot \frac{q''}{\pi}\right) \delta\pi \end{aligned}$$

wo a'', b'', $h_{\prime\prime}$, ψ'', p'' und q'' die entsprechenden Werthe von a', b', h, ψ', p' und q' für das Ende der Finsterniss sind; ähnlich wie vorher hat man $tg\,\psi'' = \frac{b''}{a''\cos d''}$, und $a'' = \odot'' - ☾''$; wobei ψ von 0° bis 360° zu nehmen ist, von Westen durch Norden nach Osten.

Nun muss aber $\tau' + \delta\tau' = \tau'' + \delta\tau''$ werden, und setzt man für diese beiden Ausdrücke ihre eben gefundenen Werthe, so erhalten wir eine Bedingungsgleichung, welche die drei unbekannten Werthe δk, δB und $\delta\pi$ enthält; hieraus sieht man, dass die Beobachtung des Anfangs und Endes einer Finsterniss an nur einem Orte zur Bestimmung der Fehler der Elemente der Berechnung nicht hinreicht; aber wenn ähnliche Beobachtungen an drei verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche angestellt werden, deren Länge gut bestimmt ist, so erhalten wir diejenige Zahl von Bedingungsgleichungen, welche nothwendig ist, um die Fehler δk, δb, $\delta\pi$ zu bestimmen; sind die Längen der verschiedenen Beobachtungsorte nicht genau genug bekannt, so muss man zuerst δk, δb und $\delta\pi$ vernachlässigen, darauf die Länge der Orte genauer bestimmen, und alsdann wiederum alle Berechnungen wiederholen, indem man diese Fehler genähert sucht, und dadurch eine noch genauere Länge ableitet. Wenn man keine genügende Zahl von Beobachtungen hat, so muss man den kleinsten der Fehler δk, δB und $\delta\pi$ vernachlässigen; der grösste von ihnen wird meistens δB sein; die beiden andern sind immer sehr klein.

Bei totalen und ringförmigen Finsternissen hat man ausser den Beobachtungen der äussern Berührung noch die Beobachtungen der innern Berührung der Ränder; aber für die innere Berührung nimmt δk eine andere Bedeutung an, denn in diesem Falle wird $\delta k = \delta r - \delta R$ für totale, und für ringförmige $\delta k = \delta R - \delta r$; während wir für die äussern Berührungen stets $\delta k = \delta r + \delta R$ haben, wo δr und δR die Fehler in den angenommenen Halbmessern r und R für Mond

und Sonne bedeuten. Wenn sowohl die beiden äussern als auch die beiden innern Berührungen der Ränder beobachtet wurden, so kann man durch Vergleichung der vier beobachteten Phasen der Finsterniss drei Bedingungsgleichungen ableiten, welche aber die vier unbekannten Werthe δr, δR, δB und $\delta \pi$ enthalten werden, und folglich wird es zu ihrer Auflösung nöthig sein, entweder eine dieser Unbekannten, z. B. $\delta \pi$, zu vernachlässigen, oder hiermit die Beobachtungen derselben Finsterniss an einem andern Orte auf der Erdoberfläche zu verbinden.

157. Sind viele Beobachtungen an verschiedenen Orten von bekannter Länge angestellt worden, so kann man durch Verbindung dieser Beobachtungen unter einander die Bedingungsgleichungen zusammensetzen, aus welchen man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten auffinden kann; es wird dann auch möglich sein, die geographische Länge aller zweifelhaft bestimmten Punkte, an welchen die Finsterniss beobachtet wurde, zu ermitteln.

Es sei L die bekannte, auf den Meridian des astronomischen Jahrbuchs bezogene östliche Länge eines Orts, an welchem alle vier Phasen der Finsterniss beobachtet wurden; der Kürze halber nehmen wir für die erste Phase folgende Bezeichnungen an:

$$\tau' - L = C,\ h \sec\delta' \sin\psi' = H,$$
$$h \sec\delta' \operatorname{tg}\psi' = M;\ \frac{hp'}{\pi} - h \sec\delta' \operatorname{tg}\psi' = N;$$

wäre die Länge westlich, so müsste man $\tau' + L = C$ annehmen.

Mögen C', H', M', N'; C'', H'', M'', N''; C''', H''', M''', N''' ähnliche Bedeutungen für die zweite, dritte, vierte Phase haben; C, C', C'', C''' drücken die unverbesserte Zeit der wahren Conjunction, wie sie unter dem Meridiane des astronomischen Jahrbuchs gezählt und aus der Beobachtung der ersten, zweiten, dritten und vierten Phase abgeleitet wird, ohne auf die Fehler der Tafeln Rücksicht zu nehmen. Um die wegen dieser Fehler

verbesserte Zeit, die wir V nennen wollen, befriedigend bestimmen zu können, müssen wir die ungleiche Zuverlässigkeit der verschiedenen Beobachtungen in Betracht ziehen. Sogar mit Hülfe eines guten Fernrohrs von 60maliger Vergrösserung wird man die Zeit der ersten und letzten Phase kaum genauer als auf 2 oder 3 Secunden angeben können; der Anfang der Finsterniss (erste Phase) wird meistens um mehr als 3 Secunden zu spät bemerkt; die zweite und dritte Phase (die innern Berührungen der Ränder) lassen sich aber viel genauer (bis auf $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{3}$ Secunde) beobachten. Es ist also nöthig, die Gewichte der Beobachtungen wenigstens annähernd zu berücksichtigen.

Wenn wir $W = \frac{C + C' + C'' + C'''}{4}$, $v = V - W$ setzen und von zufälligen Beobachtungsfehlern abstrahiren, so kommt

für die Phase die Bedingungsgleichung . . . . Gewicht

$$\text{I} \quad v = C - W + H\delta r + H\delta R + M\delta b + N\delta\pi \ \ldots \ g,$$
$$\text{II} \quad v = C' - W + H'\delta r - H'\delta R + M'\delta b + N'\delta\pi \ \ldots \ g',$$
$$\text{III} \quad v = C'' - W + H''\delta r + H''\delta R + M''\delta b + N''\delta\pi \quad g'',$$
$$\text{IV} \quad v = C''' - W + H'''\delta r + H'''\delta R + M'''\delta b + N'''\delta\pi \, g''';$$

für den zweiten und dritten Ort erhält man ähnliche Gleichungen nebst ihren Gewichten; für Punkte, wo einige Phasen nicht beobachtet wurden, fehlen die entsprechenden Gleichungen.

Werden alle vorhandenen Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, so erhält man die wahrscheinlichsten Werthe von v, δr, δR, δb und $\delta\pi$. Bei dieser Berechnung*) kann man, wenn die Umstände der Beobachtungen

*) Jede Bedingungsgleichung wird mit dem Produkte multiplicirt aus dem Coefficienten der ersten Unbekannten mit ihrem Zeichen und dem dieser Gleichung entsprechenden Gewicht; die Summe aller so multiplicirten Gleichungen giebt die erste definitive Gleichung. Jede Gleichung wird dann mit dem Produkte multiplicirt aus dem Coefficienten der zweiten Un-

unbekannt bleiben, $g = 1$, $g' = 10$, $g'' = 10$ und $g''' = 1$ annehmen.

Ist v gefunden, so hat man $V = W + v$ oder die wahrscheinlichste Zeit, welche unter dem Meridiane des astronomischen Jahrbuchs während der wahren Conjunction der Gestirne gezählt wird. Aus Beobachtungen, welche an einem Ort von zweifelhafter Länge gemacht sind, werden auf dieselbe Weise, wie oben erläutert ist, die Bedingungsgleichungen berechnet; die Correctionen δr, δR, δb, $\delta \pi$, welche aus den Beobachtungen an Punkten von bekannter Länge abgeleitet sind, werden in diese Bedingungsgleichungen eingesetzt; dann lässt sich δB finden und wird die verbesserte Ortszeit W der wahren Conjunction berechnet; nun ist $W - V$ die östliche, oder $V - W$ die westliche zu bestimmende Länge dieses Orts.

158. Um den Verlauf einer Sonnenfinsterniss an irgend einem gegebenen Orte der Erde gut beobachten zu können, muss man die Ortszeiten des Anfanges und des Endes der Finsterniss und ihre Grösse vorausberechnen, sowie auch die Punkte, an welchen der Ein- und Austritt stattfinden. Wir werden weiter unten die vorzügliche Methode Hansens zur vorläufigen Vorausberechnung erwähnen, aber diese Methode ist nur dann bequem, wenn man das Berliner astronomische Jahrbuch zur Hand hat; dort werden alle Hülfswerthe angegeben, welche man bei Anwendung der Hansen'schen Methode braucht. Wir wollen hier zeigen, wie die Sonnenfinsternisse mit Hülfe des Nautical Almanac voraus berechnet werden. Dieser letztere ist für den Meridian von Greenwich eingerichtet, und man findet in ihm die mittlere Greenwicher Zeit des frühesten Anfanges und des spätesten Endes der Sonnenfinsterniss auf der Erde über-

---

bekannten mit ihrem Zeichen und dem entsprechenden Gewicht; die Summe aller so multiplicirten Gleichungen giebt die zweite definitive Gleichung; so verfährt man weiter und bekommt so viele definitive Gleichungen, als die Zahl der Unbekannten beträgt.

haupt; ferner die Grenzen, zwischen welchen auf der Erdoberfläche die Verfinsterung stattfindet.

Daraus kann man meistens schliessen, ob die Finsterniss am gegebenen Orte sichtbar sein wird; wenn dies der Fall ist, so findet man die Elemente zu ihrer Berechnung in einer Tabelle des Nautical Almanac. Diese Elemente sind: die mittlere Greenwicher Zeit der wahren Conjunction des Mondes mit der Sonne; die gerade Aufsteigung und die Declination des Mondes und der Sonne zu dieser Zeit; ihre Bewegungen in einer Stunde mittlerer Zeit; ihre Halbmesser und Aequatorial-Horizontal-Parallaxen. Die geographische Breite φ, die geocentrische Breite φ' und die von Greenwich gezählte, in Zeit ausgedrückte Länge L des gegebenen Orts sind bekannt; die entsprechende Horizontal-Parallaxe des Mondes ist $\pi☾ = \Pi☾ - \frac{\Pi☾}{295} \sin^2\varphi$, wo $\Pi☾$ die Aequatorial-Parallaxe des Mondes und $\frac{1}{295}$ die Abplattung der Erde bedeuten. Für die Berechnung der Sonnenfinsterniss wird eine beliebige Greenwicher mittlere Zeit T gewählt, so aber, dass T der Zeit der wahren Conjunction nahe ist; man kann z. B. für T die Stunde nehmen, welche der Mitte der Finsterniss in Greenwich am nächsten ist, oder welche nahezu in der Mitte zwischen dem frühesten Anfang und dem spätesten Ende der Finsterniss auf der Erde überhaupt liegt. Wenn man das Verzeichniss der Orte, an welchen die Finsterniss sichtbar wird, mit der Breite und Länge des gegebenen Orts vergleicht, so wird man bemerken können, ob der gegebene Ort näher oder weiter von dem Ort des frühesten Anfanges als von dem Ort des spätesten Endes der Finsterniss liegt; darauf kann man für T die Zeit wählen, welche etwas näher zur Zeit des frühesten Anfanges oder etwas weiter von derselben liegt als die Mitte zwischen den Zeiten des frühesten Anfanges und spätesten Endes der Finsterniss auf der Erde.

Wird $\tau = T \pm L$ gesetzt, wo (+) der östlichen und (—) der westlichen Länge L entspricht, so ist τ die mittlere Zeit

am gegebenen Orte in demselben Augenblick, in welchem die mittlere Zeit T unter dem Meridiane des Astronomischen Jahrbuchs gezählt wird. Aus dem Nautical Almanac lassen sich folgende für die Zeit T gültigen Elemente finden:

1) Die wahre gerade Aufsteigung α und Declination δ des Mondes; die gerade Aufsteigung A und die Declination D der Sonne.

2) Die Bewegungen in einer mittlern Stunde

	in gerader Aufsteigung	in Declination
für den Mond . . .	$\triangle \alpha$, ...	$\triangle \delta$,
für die Sonne . . .	$\triangle A$, ...	$\triangle D$,

3) Die wahren Winkelhalbmesser:
des Mondes $= r$; der Sonne $= R$,

4) Die Aequatorial-Horizontalparallaxen
des Mondes $= \Pi☾$, der Sonne $= \Pi\odot$.

Da die Länge L bekannt ist, so kann man mit Hülfe des Nautical Almanac die Sternzeit s finden, welche am gegebenen Ort zur mittleren Zeit τ gezählt wird. Verwandelt man s in Bogen, so können die relativen Parallaxen des Mondes in gerader Aufsteigung ϑ und in Declination ω nach den genäherten Formeln berechnet werden:

$$\vartheta = \alpha' - \alpha = \pi \cos\varphi' \sin(s - A); \quad \pi = \Pi☾ - \Pi\odot,$$
$$\omega = \delta' - \delta = \pi \cos\varphi' \cos(s - A) \sin D - \pi \sin\varphi' \cos D,$$

wo α die wahre, α' die scheinbare gerade Aufsteigung, δ die wahre, δ' die scheinbare Declination des Mondes zur Sternzeit s, oder zur mittleren Ortszeit τ bezeichnen.

Nun ist eine Stunde mittlerer Zeit $= 1^{St.} 0^m 9^s{,}86$ Sternzeit; verwandelt man $1^{St.} 0^m 9^s{,}86$ in Bogen, so ergiebt sich $15° 2' 27'',8$; aber die mittlere Bewegung der Sonne in gerader Aufsteigung in einer Stunde mittlerer Zeit beträgt genau $2' 27'',8$; also wenn wir die kleine Veränderung der Sonnendeclination im Verlauf von einer Stunde vernachlässigen, oder D als constant annehmen,

so werden die stündlichen Zunahmen $\Delta\vartheta$ und $\Delta\omega$ der relativen Parallaxen ϑ und ω durch die Formeln:

$$\Delta\vartheta = +2\sin 7^\circ 30'.\pi\cos\varphi'\cos(s-A)\sec D,$$
$$\Delta\omega = -2\sin 7^\circ 30'.\pi\cos\varphi'\sin(s-A)\sin D,$$

ausgedrückt.

Zur mittlern Ortszeit ist $\alpha - A + \vartheta$ der Unterschied der scheinbaren geraden Aufsteigungen, und $\delta - D + \omega$ ist der Unterschied der scheinbaren Declinationen des Mondes und der Sonne. Nehmen wir eine Stunde der mittlern Zeit als Zeiteinheit an und betrachten die relative scheinbare Bewegung des Mondes gegen die Sonne als nahezu gleichförmig, so werden

$$\alpha - A + \vartheta + (\Delta\alpha - \Delta A + \Delta\vartheta).t,$$
$$\delta - D + \omega + (\Delta\delta - \Delta D + \Delta\omega).t,$$

die Unterschiede der scheinbaren geraden Aufsteigungen und der Declinationen des Mondes und der Sonne zur mittlern Ortszeit $\tau + t$ darstellen. Wenn aber $\tau + t$ die Zeit des Anfanges oder des Endes der Sonnenfinsterniss bezeichnet, so muss dann auch die scheinbare Distanz zwischen den Mittelpunkten des Mondes und der Sonne der Summe ihrer scheinbaren Halbmesser gleich sein; da nun der wahre Halbmesser des Mondes nie mehr als 16″,5, meistens aber noch weniger vom scheinbaren abweicht; so können wir bei der Berechnung der partiellen Sonnenfinsternisse jene Distanz durch $r + R$ annähernd ausdrücken. Man hat folglich t aus der Gleichung

$$\{\alpha - A + \Theta + (\Delta\alpha - \Delta A + \Delta\vartheta).t\}^2.\cos^2 D$$
$$+ \{\delta - D + \omega + (\Delta\delta - \Delta D + \Delta\omega).t\}^2$$
$$= (r + R)^2$$

zu berechnen. Setzt man ferner

$$\lambda = 2\sin 7^\circ 30'; \quad u = \pi\cos\varphi'\sin(s-A),$$
$$v = \pi\cos\varphi'\cos(s-A),$$
$$(\alpha - A)\cos D + u = m\sin M,$$
$$\delta - D + v\sin D - \pi\sin\varphi'\cos D = m\cos M,$$

$$(\Delta\alpha - \Delta A)\cos D + \lambda.\nu = n\sin N,$$
$$\Delta\delta - \Delta D - \lambda.u\sin D = n\cos N,$$
$$r + R = k,$$

so ergiebt sich:

$$m^2 + 2m.n.\cos(M-N).t + n^2.t^2 = k^2.$$

Wenn wir einen Hülfswinkel ψ einführen, so dass

$$\sin\psi = \frac{m}{k}\sin(M-N)$$

ist, so kommt

$$t = -\frac{m}{n}\cos(M-N) \mp \frac{k}{n}\cos\psi.$$

Man erhält also zwei Werthe für t; nennen wir die beiden Werthe t' und t'', welche in Theilen einer mittlern Stunde ausgedrückt sind, so werden $\tau + t'$ und $\tau + t''$ die mittlere Ortszeit des Anfangs und des Endes der Finsterniss angeben; die kleinere Zeit gehört dem Anfange und die grössere dem Ende. Man kann m und n immer positiv annehmen und danach die Winkel M und N bestimmen; auch kann man ψ so wählen, dass $\cos\psi$ positiv wird; alsdann können die beiden Werthe von t durch

$$-\frac{m}{n}\frac{\sin(M-N+\psi)}{\sin\psi} \text{ und } +\frac{m}{n}\frac{\sin(M-N-\psi)}{\sin\psi}$$

dargestellt werden. Der Werth von t, welcher der Mitte der Finsterniss entspricht, ist

$$(t) = -\frac{m}{n}\cos(M-N);$$

in diesem Falle muss $\psi = \pm 90°$ sein und die scheinbare Distanz zwischen den Mittelpunkten des Mondes und der Sonne wird die kleinste von allen Distanzen sein, welche im Verlauf der Finsterniss vorkommen können. Die kleinste Distanz, welche wir durch d' bezeichnen wollen, ist aus der Gleichung, die k^2 ausdrückt, zu erhalten, wenn wir (t) statt t und d' statt k einsetzen; es ergiebt sich daraus

$$d' = \pm m\sin(M-N).$$

Der Mond wird nördlicher oder südlicher von der Sonne stehen, je nachdem die scheinbare nördliche Declination des Mondes grösser und die südliche kleiner als die Declination der Sonne zur Zeit $\tau + (t)$ ist, und umgekehrt.

Die ganze Rechnung ist mit Logarithmen von vier Decimalstellen auszuführen. Die zuerst erhaltenen Zeiten $\tau + t'$ und $\tau + \tau''$ des Anfanges und des Endes der Finsterniss, werden noch um mehrere Zeitminuten fehlerhaft sein; es kann sogar in der ersten Annäherung vorkommen, dass ψ einen imaginären Werth erhält, obgleich die Finsterniss möglich ist; in diesem Falle setzt man $\cos\psi = 0$. Ueberhaupt um die genaueren Bestimmungen zu bekommen, muss man bei der Berechnung des Anfanges der Finsterniss $\tau + t'$ statt τ, und bei der Berechnung des Endes $\tau + t''$ statt τ nehmen; sowohl für $\tau + t'$, als auch für $\tau + t''$, oder für die Greenwicher mittleren Zeiten $T \pm L + t'$ und $T \pm L + t''$ — wo (+) für die östliche und (—) für die westliche Länge zu brauchen ist — sind von neuem α, δ, A, D, r, Π☾, $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, sowie s zu berechnen; dann werden m, M, n, N und ψ bestimmt, endlich t, wie oben gezeigt ist, abgeleitet. Auf diese Weise erhält man viel genauer, als in der ersten Annäherung die mittleren Ortszeiten des Anfanges und des Endes der Finsterniss, auch eine genauere Grösse d'. Meistens kann man sich damit begnügen; wollte man eine grössere Genauigkeit erreichen, so muss man noch einmal die Rechnung wiederholen, indem man statt $\tau + t'$ und $T + t'$, $\tau + t' + t_{,}$ und $T + t' + t_{,}'$, auch $\tau + t'' + t''_{,}$ und $T + t'' + t''_{,}$ nimmt, wo $t'_{,}$ und $t''_{,}$ die genaueren, aus der zweiten Annäherung abgeleiteten Werthe bedeuten. Die Rechnung in der zweiten und dritten Annäherung wird mit Logarithmen von fünf Decimalstellen ausgeführt; statt des wahren Halbmessers r des Mondes wird der scheinbare r' genommen; bestimmt man den Winkel η aus der Gleichung

$$\cotg\eta = \cotg\varphi' . \cos(s - A),$$

so ist sehr nahezu

$$r' = r + r(\delta' - \delta'') \sin 1''.\, cotg(\delta - \eta).$$

Es bleibt noch der Punkt des Sonnenrandes anzugeben, an welchem die Ein- und Austritte stattfinden.

Bezeichnet man durch Q den Winkel, welcher am Mittelpunkte der Sonne von ihrem Declinationskreise mit dem Bogen des grössten Kreises gebildet wird, der die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes verbindet, und wird Q von Norden nach Osten und weiter in derselben Richtung von 0° bis 360° gezählt, so ist

$$tg\, Q = \frac{\{\alpha - A + \vartheta (\Delta\alpha - \Delta A + \Delta\vartheta).t\} \cos D}{\delta - D + \omega + (\Delta\delta - \Delta D + \Delta\omega).t}$$
$$= \frac{m \sin M + n \sin N.t}{m \cos M + n \cos N.t}.$$

Es sei

$$t = -\frac{m}{n} \cdot \frac{\sin(M - N + \psi)}{\sin \psi}$$

der Werth von t, welcher dem Anfange der Finsterniss gehört; setzt man diesen Werth in den Ausdruck von $tg\, Q$ und bemerkt, dass man hat

$$\sin M = \sin(M-N) \cos N + \cos(M-N) \sin N,$$
$$\cos M = \cos(M-N) \cos N - \sin(M-N) \sin N,$$
$$\sin(M - N + \psi) = \sin(M-N) \cos\psi + \cos(M-N) \sin\psi,$$

so kommt

$$tg\, Q = \frac{\sin(\psi - N)}{-\cos(\psi - N)} = tg(180° - \psi + N).$$

Wenn der Werth $t = +\frac{m}{n} \sin(M - N - \psi)$, welcher dem Ende der Finsterniss angehört, in dem Ausdruck von $tg\, Q$ substituirt wird, so ergiebt sich auf dieselbe Weise

$$tg\, Q = \frac{\sin(\psi + N)}{\cos(\psi + N)} = tg(\psi + N).$$

Man hat also für den Anfang

$$Q = 180^\circ + N - \psi$$

und für das Ende der Finsterniss

$$Q = N + \psi.$$

Wenn d' die kleinste scheinbare Distanz zwischen den Mittelpunkten der Sonne und des Mondes bedeutet, oder die, welche in der Mitte der Finsterniss stattfindet, so ist

$$\varepsilon = r' + R - d'$$

derjenige Theil des Sonnendurchmessers, welcher vom Monde in der Mitte der Finsterniss bedeckt wird. Gewöhnlich wird dieser Theil in Zwölfteln des Sonnendurchmessers ausgedrückt, oder in sogenannten Zollen, dann ist ε in Zollen gleich $6\,\frac{(r' + R - d')}{R}$.

Ganz auf dieselbe Weise werden die totalen und die ringförmigen Sonnenfinsternisse berechnet; es ist nur nöthig, für die totalen Finsternisse

$$k = r' - R$$

und für die ringförmigen

$$k = R - r'$$

zu setzen. Die Grösse der ringförmigen Sonnenfinsterniss ist

$$12 \cdot \frac{r'}{R} \text{ Zoll.}$$

159. Als erläuterndes Beispiel wollen wir hier die Fehler der Tafeln und den Längenunterschied zwischen St. Petersburg und Wien aus den Beobachtungen der totalen Sonnenfinsterniss am 7. Juli 1842 berechnen. An verschiedenen Orten Europas wurden viele Beobachtungen dieser Finsterniss gemacht, aber der Kürze wegen wollen wir uns begnügen, nur die Beobachtungen in Wien, wo die Finsterniss total, und die St. Petersburger Beobachtungen, wo die Finsterniss partiell war, anzuführen. In der nachfolgenden Tafel bezeichnen die in der zweiten Spalte

enthaltenen Zahlen 1, 2, 3 und 4 die Phasen der Verfinsterung; 1 und 4 entsprechen dem Anfange und Ende der Finsterniss überhaupt, oder ihrer ersten und letzten Phase, die Zahlen 2 und 3 beziehen sich auf den Anfang und das Ende der totalen Finsterniss; oder auf die erste und zweite innere Berührung der Ränder der Gestirne.

Beobachtungsort	Phase	Mittlere Zeit der Phase am Beobachtungsorte	Oestliche Länge des Beobachtungsorts von Berlin	Nördliche Breite des Beobachtungsorts = φ	Sternzeit im mittlern Mittage am Beobachtungsorte am 7. Juli 1842
In Wien	1	$17^h\,51^m\,52^s,0$	$0^h\,11^m\,56^s,6$	$48°\,12'\,35'',0$	$6^h\,59^m\,59^s,3$
	2	18 49 25,0			
	3	18 51 22,0			
	4	19 53 56,0			
In St. Petersburg	1	$19^h\;7^m\,15^s,2$	$1^h\;7^m\,40^s,5$	$59°\,56'\,31'',0$	$6^h\,59^m\,50^s,2$
	4	21 12 47,2			

Da die beiden Beobachtungsorte östlich von Berlin liegen, so müssen wir von den beobachteten mittleren Zeiten die Länge abziehen, um die ihnen entsprechenden mittleren Berliner Zeiten zu erhalten. Im Berliner Astronomischen Jahrbuche findet man alsdann die Oerter des Mondes von 12 zu 12 Stunden in mittlerer Zeit durchs ganze Jahr berechnet, und folglich müssen wir hier bei der Interpolation auf die vierten Differenzen Rücksicht nehmen; die Oerter der Sonne sind von 24 zu 24 Stunden gegeben, aber diese Oerter verändern sich weit langsamer, und man reicht vollständig mit den zweiten Differenzen aus. In den nun folgenden Tafeln bezeichnen α☾, δ☾, r☾ und π☾ für die entsprechende Phase die wahre gerade Aufsteigung, Abweichung, den wahren Halbmesser und die Aequatorial-Horizontalparallaxe des Mondes; $\alpha\odot$, $\delta\odot$, $r\odot$ und $\pi\odot$ bezeichnen ganz dasselbe für die Sonne; alles nach dem Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1842.

Phase der Verfinsterung		α☾	δ☾	α☉	δ☉
In Wien	1	105° 34′ 42″,10	+ 23° 17′ 25″,31	106° 52′ 20″,87	+ 22° 33′ 13″,45
	2	106 11 59 ,31	10 26 ,70	54 48 ,47	32 57 ,58
	3	106 13 14 ,98	10 12 ,40	54 53 ,47	32 57 ,04
	4	106 53 43 ,74	2 26 ,72	57 33 ,93	32 39 ,68
In St. Petersburg	1	105° 47′ 26″,92	+ 23° 15′ 3″,38	106° 53′ 11″,29	+ 22° 33′ 8″,05
	4	107 8 40 ,53	22 59 31 ,82	58 33 ,20	32 33 ,33

Phase der Verfinsterung		Sternzeit der Beobachtung	r☾	π☾	Wahre Bewegung in *AR* in einer Stunde mittlerer Zeit für Mond	für Sonne
In Wien	1	$0^h\,54^m\,47^s,38$	979″,90	59′ 55″,92	m = 38′ 50″,8	n = 2′ 33″,9
	2	1 52 29 ,83	980 ,23	57 ,17	49 ,0	33 ,9
	3	1 54 27 ,13	980 ,25	57 ,21	49 ,0	33 ,9
	4	2 57 11 ,40	980 ,60	58 ,51	46 ,8	33 ,8
In St. Petersburg	1	$2^h\,10^m\,13^s,77$	980″,00	59′ 56″,36	38′ 49″,5	2′ 33″,9
	4	4 16 6 ,42	980 ,72	59″,01	46 ,8	33 ,8

Für die ganze Dauer der Verfinsterung ist der wahre Winkelhalbmesser der Sonne = 945″,10 in Bogen, die Horizontalparallaxe der Sonne = 8″,44 angenommen.

Die angegebenen stündlichen Bewegungen m und n in gerader Aufsteigung beziehen sich auf die Mitte der Zeit zwischen der entsprechenden Phase und der wahren Conjunction des Mondes und der Sonne, welche in gerader Aufsteigung 1842, Juli 7, $19^h\,49^m\,0^s$ mittlere Berliner Zeit sich ereignete.

Wir wollen hier ein ausführliches Rechnungsbeispiel für die erste Phase der Verfinsterung in Wien geben, in Beziehung auf die andern Beobachtungen aber nur die Resultate der Berechnung hersetzen.

Die Beobachtungen selbst wurden nach mittlerer Zeit angestellt, und folglich müssen wir für alle erst vorher die entsprechenden Sternzeiten finden; bei der Beobachtung der ersten Phase in Wien war die entsprechende Sternzeit = $0^h\,54^m\,47^s,38$; verwandelt man sie in Grade, und bezeichnet sie durch s, so wird $s = 13°\,41'\,51'',0$.

Bezeichnet man ferner durch φ die geographische und durch

φ' die geocentrische Ortsbreite, und nimmt die wahrscheinliche Abplattung der Erde $= \frac{1}{300}$ an, so erhält man:

$$lg\left(\frac{299}{300}\right)^2 = 9,9970998$$

$$\varphi = 48°\,12'\,35'',0 \quad log\,tg\,\varphi = 0,0487607$$
$$\varphi' = 48°\,\,1'\,10'',4 \quad log\,tg\,\varphi' = 0,0458605$$

Die Horizontalparallaxe des Mondes

$$= \pi☾ = \Pi☾ - \frac{\Pi☾}{300} sin^2\varphi.$$

Für die erste Phase in Wien hat man:

$$59'\,55'',92 - 6'',67 = 59'\,49'',25 = \pi☾$$
Horizontalparallaxe der Sonne $= \quad 8\,,44 = \pi\odot$
Relative Horizontalparallaxe $= 59'\,40'',81 = \pi$

$\alpha☾ = 105°\,34'\,42'',10$	$\delta☾ = 23°17'25'',31$
$\alpha\odot = 106\;\;52\;\;20\;,87$	$\delta\odot = 22\;\;33\;\;13\;,46$ $\quad \frac{\pi☾}{\pi\odot} - 1 = 424$
$\alpha☾ - \alpha\odot = -1°17'\,38'',77$	$\delta☾ - \delta\odot = +\;44'\,11'',85$
folglich:	
$\alpha☾ = 105\;\;34\;\;42\;,10$	$\delta☾ = 23°\,17'\,25'',31$
$\frac{\alpha☾ - \alpha\odot}{424} = \quad -11\;,00$	$\frac{\delta☾ - \delta\odot}{424} = \quad +6\;,26$
$\alpha = 105°\,34'\,31'',10$	$\delta = 23°\,17'\,31'',57$
$s = \;\;13\;\;41\;\;51\;,00$	$2(\alpha - s) = 183°45'20''; 3(\alpha - s) = 275°38'$
$\alpha - s = \;\;91°\,52'\,40'',10$	

$log\,sin\,\pi = 8,239534$	$log\,P^2 = 6,20360$
$log\,cos\,\varphi' = 9,825346$	$log\,sin\,2\,(\alpha - s) = 8,81624_n$
$log\,sec\,\delta = 0,036920$	$comp.\,log\,sin\,2'' = 5,01340$
$log\,P = 8,101800$	$-1'',08\;\ldots\;0,03324_n$
$log\,sin\,(\alpha - s) = 9,999767$	$log\,P^3 = 4,3054$
$comp.\,log\,sin\,1'' = 5,314425$	$log\,sin\,3\,(\alpha - s) = 9,9979_n$
$+2606'',11\;\ldots\;3,415992$	$comp.\,log\,sin\,3'' = 4,8373$
	$-0'',14\;\ldots\;9,1406_n$

Folglich wird die relative Parallaxe in gerader Aufsteigung werden $= \alpha' - \alpha = p = +2606'',11 - 1'',08 - 0'',14 =$
$$= +2604'',89 = 43'\,24'',89.$$

$$\begin{aligned}
\log tg\,\varphi' &= 0{,}0458605 \\
\log\cos\tfrac{1}{2}(\alpha'-\alpha) &= 9{,}9999654 \\
\log\sec\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}-s\right) &= 1{,}4081660_{n} \\
\hline
\log tg\,\eta &= 1{,}4539919_{n}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{\alpha'-\alpha}{2} &= \quad 0^{\circ}\,21'\,42'',5 \\
\frac{\alpha'+\alpha}{2}-s &= \quad 92\;\;14\;\;22\;,5 \\
\hline
\eta &= \quad 92^{\circ}\;\;0'\,48'',5 \\
\delta &= \quad 23\;\;17\;\;31\;,6 \\
\hline
\eta-\delta &= \quad 68^{\circ}\,43'\,16'',9 \\
2(\eta-\delta) &= 137\;\;26 \\
3(\eta-\delta) &= 206\;\;10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin\pi &= 8{,}239534 \\
\log\sin\varphi' &= 8{,}871207 \\
comp.\log\sin\eta &= 0{,}000268 \\
\hline
\log Q &= 8{,}111009 \\
\log\sin(\delta-\eta) &= 9{,}969336_{n} \\
comp.\log\sin 1'' &= 5{,}314425 \\
\hline
-2481'',82 \;\ldots\; & 3{,}394770_{n}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log Q^{2} &= 6{,}22202 \\
\log\sin 2(\delta-\eta) &= 9{,}83016_{n} \\
comp.\log\sin 2'' &= 5{,}01340 \\
\hline
-11{,}63 \;\ldots\; & 1{,}06558_{n} \\
\log Q^{3} &= 4{,}3330 \\
\log\sin 3(\delta-\eta) &= 9{,}6440 \\
comp.\log\sin 3'' &= 4{,}8373 \\
\hline
+0'',06 \;\ldots\; & 8{,}8143
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die relative Parallaxe in Declination:

$$\delta'-\delta = q = -2481'',82-11'',63+0{,}06 = -41'\,33'',39.$$

Für die erste Phase in Wien wird $r\,☾ = 979'',90$

$$\begin{aligned}
\log(\delta-\delta') &= 3{,}39679 \;\ldots \\
\log\sin 1'' &= 4{,}68557 \\
\log cotg(\eta-\delta) &= 9{,}59044 \\
\log r\,☾ &= 2{,}99118 \\
\hline
+4'',61 \;\ldots\; & 0{,}66398
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log(\delta-\delta')^{2}\sin^{2}1'' &= 6{,}1647 \\
\log\tfrac{1}{2} &= 9{,}6990 \\
\log r\,☾ &= 2{,}9912 \\
\hline
0'',07 \;\ldots\; & 8{,}8549
\end{aligned}$$

Folglich wird der relative scheinbare Radius des Mondes

$$\begin{aligned}
r = 979'',90+4'',61-0'',07 &= \;\;984'',44 \\
\text{Sonnenhalbmesser} \;\ldots\ldots &= \;\;945\;,10 \\
\hline
\text{Summe der scheinbaren Halbmesser} &= 1929'',54 = k'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\delta+q = 23^{\circ}\,17'\,25'',31-0^{\circ}\,41'\,33'',39 &= +22^{\circ}\,35'\,51'',92 \\
\text{Declination der Sonne} \;\ldots = D \;\ldots\ldots &= +22\;\;33\;\;13\;,46 \\
\hline
\text{Unterschied} \;\ldots\ldots\; \delta'-D = b' \;\ldots\ldots &= +\;\;0^{\circ}\;\;2'\,38'',46 \\
\text{Halbe Summe} \ldots \frac{\delta'+D}{2} = d' \;\ldots\ldots &= +22\;\;34\;\;32\;,68
\end{aligned}$$

$k'+b' = 2088'',00 \; log = 3,319730$
$k'-b' = 1771\;,08 \; log = 3,248241$
Summe . . . $= 6,567971$
halbe Summe $= 3,283985$
$log\, sec\, d'$ . . . $= 0,034623$
$log\, a'$ . . . . $= 3,318608$

$\odot - ☾' = a' = +2082'',61$
$☾' - ☾ = p = +2604\;,89$
$a'+p = +4687'',50 = a$

Für die Zeit der Mitte zwischen der ersten Phase in Wien und der wahren Conjunction wird die wahre Bewegung in gerader Aufsteigung in einer mittleren Stunde werden:

für Mond . . . $m = 38'\,50'',8$
für Sonne . . . $n = 2\;33\;,9$
$m-n = 36'\,16'',9$
oder $m-n = 2176\;,9$

$log\, h = log \frac{3600''}{m-n} = 0,218447$
$log\, a = 3,670941$
in Zeit $7751^s,54 = 3,889388$

Mittlere Wiener Zeit der ersten Phase . . . . . $= 17^h\,51^m\,52^s,0$
Reduction auf die wahre Conjunction $= 7751^s,54 = 2\quad 9\quad 11\;,5$
Wahre Conjunction in mittlerer Wiener Zeit . . . $20^h\;1^m\;3^s,5$

Berechnet man jetzt den Einfluss der Fehler auf die Zeit der wahren Conjunction, so hat man:

$$\frac{b'}{a' \cos d'} = \frac{+158'',5}{+1923''} = tg\,\psi; \quad \psi = 4^\circ 39';$$

$$h \sec d' \sec \psi = +1^s,80; \quad h \sec d'\, tg\,\psi = +0^s,14$$

$$h\left(\frac{p}{\pi} - \sec d'\, tg\,\psi . \frac{q}{\pi}\right) = +1^s,29;$$

folglich wird die mittlere Wiener Zeit der wahren Conjunction

$$= 20^h\,1^m\,3^s,5 + 1^s,80\,\delta k - 0^s,14\,\delta B + 1^s,29\,\delta \pi$$

Führt man auf ähnliche Weise die Berechnung für die andern Phasen der Verfinsterung durch, so erhält man die in der Kürze in folgender Tafel zusammengestellten Resultate:

Phase		p	q	k'	b'	$a' = \odot - ☾$	$m-n$
In Wien	1	+ 2604'',89	− 2493'',39	1929'',54	+ 158'',46	+ 2082'',61	2176'',9
	2	2556,42	2275,04	42,25	− 25,92	+ 36,12	2175,1
	3	2552,18	2267,81	42,30	− 32,45	− 29,44	2175,1
	4	2325,78	2044,43	1935,47	− 257,39	− 2076,48	2173,0
In St. Petersburg	1	+ 1882'',50	− 2660'',68	1933'',10	− 145'',35	+ 2087'',04	2175'',6
	4	1347,95	2363,96	1937,24	− 745,24	− 1934,71	2173,0

Hieraus kann man nach der angeführten Methode aus jeder einzelnen beobachteten Phase der Finsterniss eine Gleichung für den Ausdruck der Zeit der wahren Conjunction bilden.

Zur Zeit der äussern Berührungen der Ränder der Gestirne wird $k = r + R$ werden; aber zur Zeit ihrer inneren Berührung bei der totalen Verfinsterung wird $k = r - R$; um nun unterscheiden zu können, wollen wir im ersten Falle den Fehler im Werthe von k durch δk, im zweiten Falle aber durch Δk bezeichnen, alsdann wird $\delta k = \delta r + \delta R$ und $\Delta k = \delta r - \delta R$; wo δr den Fehler im wahren Halbmesser des Mondes und δR den Fehler im wahren Halbmesser der Sonne bedeutet.

Bei dem heutigen Zustande der Mond- und Sonnentafeln können wir die Parallaxe dieser beiden Gestirne als genügend gut bestimmt ansehen; und daher wollen wir der Kürze halber bei dieser Berechnung $\delta \pi = 0$ annehmen; obgleich nun die Halbmesser dieser Gestirne ebensogut bestimmt sind, so haben doch nach der Meinung einiger Astronomen die Irradiation, Inflexion, oder überhaupt andere wenig ermittelte Ursachen einen solchen Einfluss auf den Werth der scheinbaren Halbmesser, wie sie aus den Beobachtungen folgen, dass man ihre Fehler in jedem einzelnen Falle, wenn es thunlich ist, besonders bestimmen muss.

Setzt man statt δk und Δk ihre gleichbedeutenden Werthe $\delta r + \delta R$ und $\delta r - \delta R$, so erhalten wir für die Zeit V der wahren Conjunction folgende Ausdrücke *nach mittlerer Wiener Zeit*:

	Phase:	Gewicht:
$V = 20^h 1^m \; 3^s{,}5 + 1{,}80\,\delta r + 1{,}80\,\delta R - 0{,}14\,\delta B$	(1)	1
$V = 20 \;\; 0 \;\; 56{,}0 + 2{,}27\,\delta r - 2{,}27\,\delta R + 1{,}39\,\delta B$	(2)	10
$V = 20 \;\; 0 \;\; 57{,}3 - 2{,}80\,\delta r + 2{,}80\,\delta R - 2{,}14\,\delta B$	(3)	10
$V = 20 \;\; 0 \;\; 49{,}0 - 1{,}81\,\delta r - 1{,}81\,\delta R - 0{,}24\,\delta B$	(4)	1

Die mittlere St. Petersburger Zeit V' der wahren Conjunction ist:

Phase: Gewicht:

$V' = 20^h\,56^m\,43^s{,}6 + 1{,}81\,\delta r + 1{,}81\,\delta R + 0{,}13\,\delta B$ (1) 1

$V' = 20^h\,56^m\,35^s{,}1 - 1{,}98\,\delta r - 1{,}98\,\delta R - 0{,}72\,\delta B$ (4) 1

Wenn wir die östliche Länge St. Petersburgs von Wien zu $0^h\,55^m\,42^s{,}2$ annehmen, die ziemlich genau ist, so können die Beobachtungen in Wien und in St. Petersburg zur Ermittelung der Fehler der Mond- und Sonnentafeln benutzt werden.

Es sei V die gesuchte mittlere Wiener Zeit der wahren Conjunction des Mondes und der Sonne in gerader Aufsteigung; diese Zeit ist nahezu $20^h\,0^m\,56^s{,}7 = W$; ziehen wir W von den Conjunctionszeiten ab, welche aus der Beobachtung der verschiedenen Phasen der Finsternisse in Wien abgeleitet sind, und setzen $V - W = v$, so entstehen vier Bedingungsgleichungen. Ziehen wir $0^h\,55^m\,42^s{,}2$ von den St. Petersburger mittleren Zeiten derselben Conjunction ab, um sie nach mittlerer Wiener Zeit auszudrücken, und ziehen noch W von diesen Differenzen ab, so erhalten wir zwei neue Bedingungsgleichungen. Wir finden also:

	Gewicht:	Phase:
$v = +6^s{,}8 + 1{,}80\,\delta r + 1{,}80\,\delta R - 0{,}14\,\delta B$	1	(1)
$v = -0{,}7 + 2{,}27\,\delta r - 2{,}27\,\delta R + 1{,}39\,\delta B$	10	(2)
$v = +0{,}6 - 2{,}80\,\delta r + 2{,}80\,\delta R - 2{,}14\,\delta B$	10	(3)
$v = -7{,}7 - 1{,}81\,\delta r - 1{,}81\,\delta R - 0{,}24\,\delta B$	1	(4)
$v = +4{,}7 + 1{,}81\,\delta r + 1{,}81\,\delta R + 0{,}13\,\delta B$	1	(1)
$v = -3{,}8 - 1{,}98\,\delta r - 1{,}98\,\delta R - 0{,}72\,\delta B$	1	(4)

Nach den Vorschriften der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekommt man folgende Gleichungen:

$$+24v = -1^s{,}00 - 5{,}48\,\delta r + 5{,}12\,\delta R - 8{,}47\,\delta B$$
$$-5{,}48v = +9^s{,}52 + 143{,}64\,\delta r - 116{,}22\,\delta R + 93{,}32\,\delta B$$
$$+5{,}12v = +74^s{,}90 - 116{,}22\,\delta r + 143{,}64\,\delta R - 89{,}63\,\delta B$$
$$-8{,}47v = -18^s{,}32 + 93{,}32\,\delta r - 89{,}63\,\delta R + 65{,}73\,\delta B.$$

$$0 = +9{,}291 + 142{,}39\,\delta r - 115{,}05\,\delta R + 91{,}39\,\delta B$$
$$0 = +75{,}110 - 115{,}05\,\delta r + 142{,}39\,\delta R - 87{,}82\,\delta B$$
$$0 = -18{,}640 + 91{,}39\,\delta r - 87{,}82\,\delta R + 62{,}81\,\delta B.$$

$$0 = +82{,}62 + 49{,}53\,\delta R - 13{,}93\,\delta B$$
$$0 = -24{,}60 - 13{,}93\,\delta R + 48{,}88\,\delta B.$$

$$0 = -22{,}27 + 44{,}96\,\delta B.$$

Es sind demnach

$$\delta B = +0'',495;\ \delta R = -1'',538;\ \delta r = -1'',627.$$

Substituirt man diese Werthe in die ursprünglichen Gleichungen, so wird die Conjunctionszeit folgendermassen ausgedrückt:

nach Wiener mittlerer Zeit:	Gewicht:	Phase:
$20^h\,0^m\,57^s,7$	1	(1)
56 ,5	10	(2)
56 ,5	10	(3)
54 ,6	1	(4).
$20^h\,0^m\,56^s,47$ wahrscheinlichster Werth.		

nach St. Petersburger mittlerer Zeit:	Gewicht:	Phase:
$20^h\,56^m\,37^s,9$	1	(1)
41 ,0	1	(4)
$20^h\,56^m\,39^s,4$ im Mittel.		

Die östliche Länge St. Petersburgs von Wien ist also

$$= 20^h\,56^m\,39^s,4 - 20^h\,0^m\,56^s,5 = 0^h\,55^m\,42^s,9.$$

Will man die Correction $\delta\pi$ der angenommenen Differenz der Parallaxen des Mondes und der Sonne berücksichtigen, so hätte die Conjunction stattgefunden um

$20^h\ 0^m\,56^s,5$ mittlere Wiener Zeit $+1{,}33\,\delta\pi$
20 56 39 ,4 mittl. St. Petersb. Zeit $+0{,}94\,\delta\pi$

Oestliche Länge St. Petersburgs von Wien $= 0^h\,55^m\,42^s,9 - 0{,}39\,\delta\pi$

Die Horizontalparallaxe der Sonne ist hier nahezu um 0″,28 gegen ihre neueren Bestimmungen zu klein angenommen. Man hat also $\delta\pi = -0'',28$ und die östliche Länge = $0^h 55^m 43^s,0$. Olufsen fand aus allen in Europa .gemachten Beobachtungen dieser Finsterniss für diese Länge = $0^h 55^m 41^s,9$.

Es bleibt noch übrig, den Fehler der Tafeln in gerader Aufsteigung zu bestimmen. Aus der vorhergehenden Rechnung folgt, dass die wahre Conjunction des Mondes und der Sonne um $20^h 0^m 56^s,5$ mittlere Wiener Zeit stattfand; nun liegt Wien $0^h 11^m 56^s,5$ östlich vom Meridiane Berlins, und folglich wird die wahre Conjunction um $19^h 49^m 0^s,0$ mittlere Berliner Zeit sich ereignen; für diese Zeit folgt aus den Tafeln:

Wahre gerade Aufsteigung

des Mondcentrums . . =	106°58′15″,8
des Sonnencentrums . =	106 57 51 ,9
Unterschied	23″,9

Nun sollten aber zur Zeit der wahren Aequatorialconjunction die geraden Aufsteigungen beider Gestirne einander gleich sein, und folglich sehen wir, dass die Tafeln zu dieser Zeit um 23″,9 in gerader Aufsteigung fehlerhaft waren; weil aber die neuesten Sonnentafeln weit genauer als die Mondtafeln sind, so kann man annehmen, dass am 7. Juli 1842 um $19^h 49^m 0^s,0$ mittlere Berliner Zeit die Mondtafeln die gerade Aufsteigung des Mondes um nahe 23″,9 in Bogen zu gross geben.

Wenn nur eine entsprechende Phase der Verfinsterung in St. Petersburg und Wien beobachtet worden wäre, so hätten wir mit der Vernachlässigung aller Fehler δr, δR, δB und $\delta\pi$ für die westliche Länge Wiens von St. Petersburg aus dem Anfange der Finsterniss die Länge = $0^h 55^m 40^s,1$, und aus dem Ende = $0^h 55^m 46^s,1$ erhalten, während die wahrscheinlichste Länge = $0^h 55^m 42^s,2$ zwischen beiden Bestimmungen liegt. Wenn man also die Länge aus entsprechenden Phasen der Verfinsterung herleitet, so wird diese ziemlich gut mit der wahren

übereinstimmen; leitet man dagegen die Länge aus Beobachtungen entgegengesetzter Phasen ab, so kann das erhaltene Resultat sehr ungenau werden; wäre z. B. in St. Petersburg nur der Anfang, und in Wien nur das Ende der Finsterniss beobachtet worden, so würden wir für die Länge Wiens von St. Petersburg $0^h\,55^m\,54^s,6$ finden, welche von der wahrscheinlichen um $12^s,3$ in Zeit abweicht.

Bei den nahezu centralen, oder überhaupt sehr grossen Sonnenfinsternissen wird man im Stande sein, die Länge mit bedeutender Annäherung daraus abzuleiten.

Die aus den Beobachtungen der kleinen partiellen Sonnenfinsternisse berechneten Längen können einen Fehler von 10^s in Zeit und mehr enthalten, weil die Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes sich nicht genau beobachten lassen.

160. Die Vorübergänge des Merkurs und der Venus vor der Sonnenscheibe werden ebenso berechnet, wie wir es in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt haben, nur muss man dabei alles, was dort von dem Monde gesagt ist, auf den Planeten beziehen. Uebrigens werden diese Erscheinungen, abgesehen davon, dass sie sich sehr selten ereignen, wegen der langsamen eigenen Bewegung der Planeten, und namentlich des Merkurs, nicht mit Vortheil zu genauen Längenbestimmungen gebraucht werden können.

Zuweilen ereignet es sich, dass der Mond einen Planeten bedeckt, und in diesem Falle kann man die Verfinsterung eben so berechnen, wie es bei den Sonnenfinsternissen gezeigt worden ist, nur dass man dann alles, was sich in den Formeln auf die Sonne bezieht, hierbei auf den Planeten beziehen muss.

Sternbedeckungen.

161. Die Beobachtung dieser Erscheinungen besteht darin, den Augenblick zu bestimmen, wenn ein Stern hinter dem Mondrande verschwindet und wieder zum Vorschein kommt; die erste Erscheinung heisst der Eintritt und entspricht dem Anfange, die zweite aber heisst der Austritt und entspricht dem Ende der Verfinsterung. Wenn der Mond in seinem ersten oder letzten Viertel sichelförmig erscheint, so wird in dem ersten Falle der Eintritt, in dem anderen der Austritt des Sternes am dunklen Rande des Mondes scharf beobachtet werden können, daher in diesem Falle die optische Stärke des Fernrohrs wenig Einfluss auf die Genauigkeit der Beobachtung haben wird. Ist aber der Mond nahezu voll, so muss man zur genauen Beobachtung des Ein- und Austritts des Sterns in oder aus dem hellen Mondrand sehr kräftige Fernröhre anwenden.

Aus den Beobachtungen einer Sternbedeckung kann man für jeden Beobachtungsort die Zeit der wahren äquatorialen Conjunction des Mondes und Sternes berechnen, darauf Bedingungsgleichungen bilden, um die Tafelfehler zu finden, und endlich dadurch die Länge des Beobachtungsorts selbst bestimmen; hierbei verfährt man ganz so wie bei der Berechnung der Sonnenfinsternisse; nur wird diese Berechnung dadurch einfacher werden, dass man in diesem Falle den Halbmesser, die Parallaxe und die stündliche Bewegung des Sternes $= 0$ setzen muss; folglich wird dann in unseren Formeln $R = 0$, $\pi\odot = 0$ und $n = 0$.

Uebrigens versteht es sich von selbst, dass, wenn der Ort des Sternes für eine gewisse Zeitepoche nach mittlerer gerader Aufsteigung und mittlerer Abweichung gegeben ist, man diesen mittleren Ort mit Rücksicht auf Präcession, Nutation, Aberration und eigene Bewegung erst auf den scheinbaren Ort reduciren muss, welcher im Moment der Bedeckung stattfindet, und zu ihrer Berechnung dient.

Dieses wollen wir durch ein Rechnungsbeispiel erläutern, indem wir die Länge des Dorfes Nicolaewka bestimmen, welches sich nicht weit vom Azowschen Meere in einer Entfernung von ungefähr vier Meilen von Azow befindet. Am 16. November 1836 beobachtete man in diesem Dorfe:

	mittlere Zeit in Nicolaewka
den *Eintritt* des Sterns τ^2 *Aquarii* in den Crand um	$6^h 54^m 53^s,9$
„ *Austritt* „ „ „ „ aus dem „ „	7 56 28,8

Die genäherte Länge des Beobachtungsorts war $= 2^h 38^m 35^s$ östlich von Greenwich; nördliche Breite $= 46° 58' 21''$.

Für den Anfang des Jahres 1830 findet man aus dem Pondschen Cataloge die mittlere gerade Aufsteigung von τ^2 *Aquarii* $= 22^h 40^m 54^s,14$; und seine mittlere Declination $= -14° 27' 19'',8$; alsdann findet man mittelst des Nautical Almanac, dass für den 16. November 1836 die scheinbare gerade Aufsteigung des Sternes $= A = 22^h 40^m 56^s,62$; seine scheinbare Abweichung $= D = -14° 27' 10'',4$ war, wo (—) gebraucht wird, weil die Declination des Sternes südlich, die Breite des Ortes aber nördlich ist.

Die Sternzeit im mittleren Mittage zu Nicolaewka am 16. November 1836 war ferner $= 15^h 41^m 54^s,9$, und folglich die Nicolaewkaer Sternzeit der Beobachtung

des Eintritts des Sternes $= 22^h 37^m 56^s,8$
des Austritts des Sternes $= 23^h 39^m 41^s,9$.

Die Länge Nicolaewkas ist östlich; folglich muss man, um die entsprechenden Zeiten für Greenwich zu erhalten, die Länge von den obigen mittleren Zeiten abziehen; die mittleren Greenwicher Zeiten sind also: beim Eintritte $= 4^h 16^m 18^s,9$ und beim Austritte $= 5^h 17^m 53^s,8$. Für diese Greenwicher Zeiten erhält man nun durch Interpolation aus dem Nautical Almanac für das Jahr 1836:

	Zur Zeit des Eintritts des Sternes	Zur Zeit des Austritts
Wahre gerade Aufsteigung des Mondcentrums	= 339° 57′ 22″,8 = α	340° 30′ 13″,3
Wahre Declination	= −13 35 57 ,3	−13 21 29 ,4
Wahrer Halbmesser des Mondes . .	= 0 15 51 ,5	0 15 51 ,1
Aequatorial - Horizontalparallaxe .	= 0 58 11 ,9	0 58 10 ,4

Die Abplattung der Erde $= \frac{1}{300}$, und die Breite des Orts $\varphi = 46° 58' 21''$ angenommen, finden wir nach der Formel:

$$tg\,\varphi' = \left(\frac{299}{300}\right)^2 . \, tg\,\varphi,$$

für die geocentrische Breite des Beobachtungsorts $\varphi' = 46° 46' 54''$.

		beim Austritte
Aequatorial - Horizontalparallaxe des Mondes	$\pi = 58' 11'',9$	
Reduction $= \frac{\pi \sin^2 \varphi}{300}$	$= 6 ,2$	
Horiz.-Parallaxe beim Eintritte	$\pi = 58' \; 5'',7$	$\pi = 58' 4'',2$

Die Sternzeit des Eintritts ist $22^h 37^m 56^s,8 = s$, die Sternzeit des Austritts $23^h 39^m 41^s,9 = s$; in Grade verwandelt, wird beim Eintritte die Sternzeit $s = 339° 29' 12'',0$; beim Austritte $s = 354° 55' 28'',5$; berechnet man darauf die Formeln (e), (f), (g) und (h) § 16—17, S. 30—32, so findet man:

für den Eintritt		*für den Austritt*	
$\alpha' - \alpha = p =$	+ 0° 0′ 20″,4	$p =$	− 7′0° 10′ 1′,7
$\delta' - \delta = q =$	− 0 50 55 ,4	$q =$	− 0 50 28 ,6
$\delta' =$	−14 26 52 ,6	$\delta' =$	−14 11 58 ,0
$\frac{\delta' + D}{2} = d' =$	−14 27 10 ,4	$d' =$	−14 19 34 ,0
$\delta' - D = b' =$	+ 0 0 17 ,8	$b' =$	+ 0 15 12 ,4
$r' =$	0 15 59 ,4	$r' =$	0 15 58 ,7
$m =$	+ 0 32 1 ,0	$m =$	+ 0 31 58 ,6

wo α', δ' und r' die scheinbare gerade Aufsteigung des Mondcentrums, seine scheinbare Declination und den scheinbaren Halbmesser des Mondes bezeichnen; α und δ die wahre gerade Aufsteigung und wahre Abweichung des Mondcentrums; D die Declination des Sternes und m die stündliche Bewegung des Mondes in wahrer gerader Aufsteigung, welche der Mitte der Zeit zwischen den Beobachtungen und der wahren Conjunction des Mondes mit dem Sterne entspricht. Die wahre Conjunction fand nach den Tafeln nahezu um $4^h\,48^m$ mittlere Greenwicher Zeit statt.

Beim Anfange und Ende der Sternbedeckung wird der scheinbare Winkelabstand des Mondcentrums vom Sterne gleich dem scheinbaren Halbmesser des Mondes werden; und daher:

$$a' = A - \alpha' = \pm \frac{\sqrt{(r'+b')(r'-b')}}{\cos d'},$$

wo A die in Graden ausgedrückte gerade Aufsteigung des Sterns ist; $(+)$ wird für den Eintritt und $(-)$ für den Austritt gebraucht; folglich haben wir:

für den Eintritt $a' = +16'\,30'',6$; *für den Austritt* $a' = -5'\,3'',8$.

Bezeichnet man alsdann durch T die genaue Zeit der wahren Zusammenkunft, und durch t die Zeit der Beobachtung, so wird:

$$T = t + \frac{3600''}{m}(a'+p) + \frac{3600''}{m} \sec d (\sec\psi\, \delta r - tg\,\psi . \delta B)$$
$$+ \frac{3600''}{m}\left(\frac{p}{\pi} - \frac{q}{\pi}\, tg\,\psi \sec d\right)\delta\pi;$$

wo $tg\,\psi = \frac{b'}{a' \cos d}$ und $\delta B = \delta b + n.x$.

Hier bedeuten δr, δb und $\delta\pi$ die Tafelfehler im Mondhalbmesser, in der wahren Declination des Mondes und Sternes und in der Mondparallaxe $= \pi$; die Grösse $n.x$ endlich bezeichnet den Fehler, welchen wir bei Berechnung des aus den Tafeln gefundenen Unterschieds $\delta - D$ begangen haben, und

hängt von x oder dem Fehler in der angenommenen Länge des Beobachtungsorts und von n oder der Veränderung der Monddeclination in einer mittleren Zeitsecunde ab; x wird positiv gezählt, wenn die angenommene östliche Länge des Beobachtungsorts grösser als die wahre östliche Länge des Orts, oder wenn die angenommene westliche Länge kleiner als die wahre westliche Länge ist; n wird positiv sein, wenn der Mond sich dem sichtbaren Pol des Aequators nähert.

In unserem Beispiel wird für den Eintritt $\psi = +1° 4'$, und für den Austritt $\psi = 107° 52'',5$; setzt man nun in T die entsprechenden numerischen Werthe ein, so erhält man für die Beobachtung des

$$\begin{array}{lrl} \textit{Eintritts}: & T = & 7^h 26^m 28^s,6 + 1,94\, \delta r - 0,04\, \delta B + 0,04\, \delta \pi; \\ \textit{Austritts}: & T = & 7\ \ 27\ \ 39\ ,8 - 6,32\, \delta r + 6,02\, \delta B + 5,56\, \delta \pi; \\ \hline \text{folglich}: & 0 = & 0^h\ \ 1^m 11^s,2 - 8,26\, \delta r + 6,06\, \delta B + 5,52\, \delta \pi. \end{array}$$

Wenn dieselbe Sternbedeckung an anderen Orten beobachtet worden wäre, so würden wir viele Bedingungsgleichungen finden können, aus deren Auflösung dann, ebenso wie in § 159, S. 488 die Werthe der Fehler δr, δB und $\delta \pi$ gefunden werden könnten; aber es fand sich hierzu keine entsprechende Beobachtung; und daher haben wir nur eine Gleichung mit drei unbekannten Grössen, von denen wir also zwei vernachlässigen müssen. Da man δr und $\delta \pi$ im allgemeinen kleiner als δB annehmen kann, so wollen wir diese beiden Werthe vernachlässigen, und erhalten alsdann aus obiger Gleichung: $1^m 11^s,2 = -6,06\, \delta B$, mithin $\delta B = -11^s,75$; und setzt man darauf diesen Werth für δB in die Ausdrücke für T, so erhält man für die mittlere Zeit der wahren Conjunction zu Nicolaewka:

$$\begin{array}{rl} T = & 7^h 26^m 29^s,0 + 1,94\, \delta r + 0,04\, \delta \pi \\ = & 7\ \ 26\ \ 29\ ,0 - 6,32\, \delta r + 5,56\, \delta \pi \\ \hline \text{Mittelwerth} = & 7^h 26^m 29^s,0 - 2,19\, \delta r + 2,80\, \delta \pi. \end{array}$$

Die mittlere Greenwicher Zeit der wahren Conjunction kann man nun aus den Tafeln berechnen; aber damit diese nicht vom

Fehler der Tafeln in gerader Aufsteigung abhängt, muss man vorher diesen Fehler der Tafeln bestimmen; aus Mangel an entsprechenden Beobachtungen der Sternbedeckung an guten Sternwarten müssen wir unsere Zuflucht zu den Meridianbeobachtungen des Mondes nehmen. In keiner uns bekannten Sammlung von Beobachtungen haben wir eine Beobachtung der geraden Aufsteigung des Mondes für den 16. November 1836 finden können, aber aus den in Kopenhagen und Hamburg angestellten Meridianbeobachtungen (Astronomische Nachrichten, No. 354 u. s. w.) finden wir, dass der Nautical Almanac die geraden Aufsteigungen des Mondcentrums zu gross gab:

um $0^s,85$, nach den Beobachtungen in Hamburg, am 15. November 1836,
um $0^s,93$, nach den Beobachtungen in Kopenhagen, am 15. November 1836,

folglich: um $0^s,89$, als Mittelwerth, am 15. November 1836,
ferner: um $0^s,36$, nach den Beobachtungen in Kopenhagen, am 18. November 1836.

Obgleich man mit Genauigkeit nicht annehmen darf, dass die Fehler der Mondtafeln sich im Laufe von 3 Tagen der Zeit proportional ändern, so kann man doch dieses wenigstens genähert annehmen, und hat dann für den Fehler dieser Tafeln am 16. November 1836 den Werth $= -0^s,71$; der Nautical Almanac giebt für den 16. November 1836 um $5^h 0^m 0^s$ mittlere Greenwicher Zeit

$AR☾$	$= 22^h 41^m 22^s,74$
wahrscheinlicher Tafelfehler	$= \quad -0,71$
wahrscheinliche gerade Aufsteigung des Mondes	$= 22^h 41^m 22^s,03$
gerade Aufsteigung des Sternes	$= 22 \; 40 \; 56,62$
Unterschied	$= 0^h \; 0^m 25^s,41$

Für die Mitte des Zeitintervalls zwischen $5^h 0^m$ mittlerer Greenwicher Zeit und der wahren Conjunction findet man die wahre stündliche Bewegung des Mondes in gerader Aufsteigung

gleich $127^s,91$; also braucht der Mond, um sich in gerader Aufsteigung um $25^s,41$ zu bewegen, $715^s,15$ oder $11^m 55^s,15$, und daher wird die mittlere Zeit der wahren Conjunction sein:

in Greenwich um $5^h 0^m 0^s - 11^m 55^s,15$	$=$	$4^h 48^m\ 4^s,85$
in Nicolaewka um	$=$	$7\ 26\ 29,00$
die gesuchte Länge Nicolaewka's . .	$=$	$2^h 38^m 24^s,15$

Wir haben die Länge Nicolaewka's $= 2^h 38^m 35^s$ östlich von Greenwich angenommen, und folglich ist diese Länge um $+10^s,85$ grösser als die wahre; zu der damaligen Zeit der Beobachtungen näherte sich der wahre Ort des Mondcentrums dem Nordpole des Aequators um $0'',23$ in einer Zeitsecunde, und daher ist in diesem Falle $x = +10^s,85$ und $n = +0,23$; nun haben wir oben gesehen, dass $\delta B = \delta b + n.x = -11^s,75$, und folglich wird $\delta b = -14^s,25$; es ist jedoch wahrscheinlich, dass der Austritt des Sternes zu spät beobachtet wurde, auch können die Rechnungselemente nicht ganz zuverlässig sein, und daher ist die Bestimmung von δb unsicher.

Karlini's Methode zur Berechnung von Stern-Bedeckungen.

162. Wenn sowohl der Eintritt als auch der Austritt eines Sternes beobachtet wird, so kann man daraus die Länge durch die vortreffliche Methode von Karlini leicht bestimmen*); bei dieser Methode braucht man die vorläufige Länge des Beobachtungsorts mit erheblich geringerer Annäherung zu kennen,

*) Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde von Zach, 1808.

welche bei der vorhergehenden auseinandergesetzten Methode nöthig war, und ferner braucht man nicht den scheinbaren Halbmesser der Mondes zu bestimmen, weil man den Einfluss der Parallaxe nicht für das Mondcentrum, sondern für denjenigen Punkt des scheinbaren Mondrandes bestimmt, welcher mit dem scheinbaren Orte des Sternes zusammenfällt. Wir werden diese Methode etwas genauer durchführen, als es von ihrem Urheber geschah, und sie ferner in Beziehung auf den *Aequator* geben.

Es seien: A und D die scheinbare gerade Aufsteigung und Abweichung des Sternes; berechnet man darauf die Horizontalparallaxe des Mondes $= \pi$ für die geocentrische Breite des Beobachtungsorts $= \varphi'$, die der geographischen Breite des Orts $= \varphi$ entspricht, und setzt man ferner:

	für den Eintritt:	für den Austritt:
die wahre gerade Aufsteig. des Mondcentrums	$= \alpha$ . . .	$\alpha + m$
die wahre Declination	$= \delta$ . . .	$\delta + n$
den wahren Halbmesser des Mondes . .	$= r$	$r_{,}$
die Horizontalparallaxe	$= \pi_{,}$ . . .	$\pi_{,,}$

so kann man diese Werthe aus der Ephemeride mit Hülfe der nur beiläufig bekannten Länge des Beobachtungsorts, welche übrigens um 2^m oder selbst mehr fehlerhaft sein kann, finden; bestimmt man dabei α, $\alpha + m$, δ und $\delta + m$ durch eine scharfe Interpolation, so werden zwar α und δ durch den Fehler in der angenommenen Länge einen Fehler enthalten, aber dieser Fehler wird für den Eintritt und Austritt constant sein, so dass man immer im Stande sein wird, m und n mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen; ebenso werden r, $r_{,}$, $\pi_{,}$ und $\pi_{,,}$ trotz des Fehlers in der Länge gut bestimmt sein, da diese Grössen sich sehr langsam ändern.

A und D bestimmen die *scheinbare* Lage desjenigen Punktes am Rande des Mondes, welcher den Stern beim Eintritte oder Austritte bedeckt; setzt man daher die *wahre* gerade Aufsteigung dieses Punktes des Mondrandes $= A - \Theta$, und seine *wahre* Ab-

weichung $= D - \omega$, so haben wir in den Paragraphen über Parallaxe § 15—17, S. 28—32 gesehen, dass Θ und ω bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$\sin\Theta = \frac{\sin\pi\cos\varphi'\sin(A-s)}{\cos(D-\omega)}, \quad . \quad . \quad tg\,\eta = \frac{tg\,\varphi'\cos\frac{1}{2}\Theta}{\cos(A-\frac{1}{2}\Theta-s)}$$

$$\sin\omega = \frac{\sin\pi\sin\varphi'\sin(D-\eta)}{\sin\eta},$$

wo s die Sternzeit der Beobachtung in Graden ausgedrückt bedeutet; π ist der Werth der Horizontalparallaxe des Mondes zur Zeit der Beobachtung. Wenn man in die letzte Formel den Ausdruck für $tg\,\eta$ einführt, so kann man bequem auf folgende Weise ω und Θ berechnen; man hat nämlich:

$$\sin\omega = -\sin\pi\sin\varphi'\cos D$$
$$+\sin\pi\cos\varphi'\sin D\cos(A-s-\tfrac{1}{2}\Theta)\sec\tfrac{1}{2}\Theta$$
$$\sin\Theta = \frac{\sin\pi\cos\varphi'\sin(A-s)}{\cos(D-\omega)};$$

wenn man berechnet

$$\mu = \pi\sin\varphi'\cos D + \pi\cos\varphi'\sin D\cos(A-s)$$
$$\lambda = \pi\cos\varphi'\sin(A-s).\sec(D-\mu),$$

so ist

$$\omega = \mu\sqrt[3]{\frac{\cos\pi}{\cos\mu}} + \tfrac{1}{2}\sin 1''.\lambda^2.\sin D\cos(D-\mu)$$
$$\Theta = \lambda\sqrt[3]{\frac{\cos\pi}{\cos\lambda}} - \tfrac{1}{2}\sin^2 1''.\lambda^3.\sin D\sin(D-\mu).$$

Der Strenge wegen müsste man die Horizontalparallaxe nicht für den Mondmittelpunkt, sondern für den beobachteten Punkt des scheinbaren Randes nehmen; indessen kann man beide mit einander ohne erheblichen Fehler verwechseln, da der Unterschied dieser Parallaxen selten 0″,2 übersteigen und meistens noch kleiner sein wird; man kann sich also die Weitläufigkeit der Rechnung dieses Unterschiedes ersparen.

Denken wir uns an der Himmelskugel die scheinbare und die wahre Scheibe des Mondes abgebildet. Da die geraden Linien,

die vom Mittelpunkte der Erde und vom Auge des Beobachters zum Sterne gehen, als parallele Linien zu betrachten sind, so ist der wahre Winkelhalbmesser des Mondes sehr nahezu gleich dem Bogen des grössten Kreises, der den wahren Ort des Mondmittelpunktes mit dem wahren Ort des Sternes verbindet, dessen Eintritt oder Austritt vom Beobachter bemerkt wurde. Der Unterschied zwischen diesem Bogen und dem Halbmesser des Mondes kann höchstens 0″,05 betragen; wir werden diesen kleinen Unterschied vernachlässigen.

Wir wollen jetzt annehmen (Fig. 6, *b*), dass L der wahre Ort des Mondmittelpunktes ist; s der Ort des Sternes zur Zeit des Eintritts in den scheinbaren Mondrand; AB der Aequator, LP und Sp die Declinationskreise, welche den Aequator in den Punkten P und p schneiden; Sq ein Bogen des grössten Kreises, welcher senkrecht auf LP steht; dann wird $Pp = A - \Theta - \alpha$ sein; $LP = \delta$, $Sp = D - \omega$ und sehr nahezu $LS = r$, $Lq = \delta - (D - \omega)$. Es sei der Winkel $SLq = \varepsilon$; dann folgt:

$$Pp = \frac{Sq}{\cos Sp} = \frac{LS.\sin\varepsilon}{\cos(D-\omega)} = \frac{r\sin\varepsilon}{\cos(D-\omega)};\ Lq = r.\cos\varepsilon.$$

Wir haben also:

$$\alpha = A - \Theta - \frac{r.\sin\varepsilon}{\cos(D-\omega)} \text{ und } \delta = D - \omega + r\cos\varepsilon \quad . \quad (1).$$

Bezeichnen wir die wahre *AR* und Declination des Mondmittelpunktes bei dem Austritte des Sternes durch $\alpha + m$ und $\delta + n$; die Grössen Θ, ω, r und ε aber, welche dem Austritte entsprechen, durch Θ', ω', r' und ε'; so bekommen wir, da der Austritt am westlichen Rande des Mondes stattfindet, folgende Gleichungen:

$$\alpha + m = A - \Theta' + \frac{r'\sin\varepsilon'}{\cos(D-\omega')};\ \delta + n = D - \omega' + r\cos\varepsilon' .. (2).$$

Ziehen wir α von $\alpha + m$ und δ von $\delta + n$ ab, so folgt aus den Gleichungen (1) und (2):

$$\left.\begin{aligned} m &= \Theta - \Theta' + \frac{r' \sin \varepsilon'}{\cos (D - \omega')} + \frac{r \sin \varepsilon}{\cos (D - \omega)} \\ n &= \omega - \omega' + r' \cos \varepsilon' - r \cos \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Es sei $\frac{1}{2}(r + r') = \varrho$; $\frac{\omega' + \omega}{2} = \beta$; da nun $r' - \varrho$ oder $\varrho - r$ nie $\frac{1}{8}$ Secunde und $\frac{\omega' - \omega}{2}$ nie 4 Minuten übersteigen; so können wir sehr leicht die Winkel ε und ε' aus den Gleichungen (3) berechnen, indem wir statt r' und r die Grösse ϱ, und statt $\cos(D - \omega')$ und $\cos(D - \omega)$ den Werth $\cos(D - \beta)$ einführen, was ohne merklichen Fehler geschehen kann; auf diese Weise werden wir sehr nahezu haben*):

$$\begin{aligned} (m + \Theta' - \Theta) \cos (D - \beta) &= \varrho . 2 \sin \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon') \cos \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon') \\ n + \omega' - \omega &= \varrho . 2 \sin \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon') \sin \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon') \end{aligned}$$

folglich:

$$tg \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon') = \frac{n + \omega' - \omega}{(m + \Theta' - \Theta) . \cos (D - \beta)}$$

und:

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon') &= \frac{n + \omega' - \omega}{2 \varrho \sin \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon')} \quad \ldots \ldots \quad (A) \\ &= \frac{(m + \Theta' - \Theta) \cos (D - \beta)}{2 \varrho \cos \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon')} \end{aligned}$$

---

*) Wollte man die Approximation weiter treiben, was kaum der Mühe werth ist, so muss man an den genäherten Werth von $\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')$ die Correction:

$$\begin{aligned} &- (r' - r) . \frac{\cos^2 \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon') . cotg \frac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon')}{2 \varrho \sin 1''} [1 + tg \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon')] \\ &\qquad + \frac{\omega' - \omega}{4} tg (D - \beta) \sin (\varepsilon - \varepsilon') cotg \tfrac{1}{2} (\varepsilon + \varepsilon') \end{aligned}$$

anbringen; zu dem Werthe von $\frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon')$ aber die Correction

$$- \frac{(r' - r)}{2 \varrho \sin 1''} cotg \tfrac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon')$$

hinzulegen.

Um zu ermitteln, in welchem Quadranten man die Winkel $\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon')$ und $\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')$ zu nehmen hat, müssen wir bemerken, dass in unserer Figur eine positive (nördliche für die nördliche Hemisphäre der Erde) Declination des Mondes vorausgesetzt wird, und dass die Winkel ε und ε' zwischen 0° und 180° eingeschlossen sind; alsdann muss ε oder ε' ein spitzer Winkel sein, wenn $\delta+\omega>D$ oder $\delta+n+\omega'>D$ ist; ein stumpfer aber im entgegengesetzten Falle. Eine genäherte Kenntniss von δ, welches man bei der Berechnung von n mit Hülfe der vorläufig bekannten Länge des Beobachtungsorts aus den Ephemeriden findet, entscheidet also, in welchen Quadranten ε oder ε' zu nehmen sind.

Die Winkel ε und ε' werden von dem Punkte des Mondrandes abgezählt, welcher dem Aequator am nächsten liegt; ist also die Declination des Mondes eine negative (südliche für die nördliche Hemisphäre der Erde), so müssen wir in unseren Formeln $180°-\varepsilon$ und $180°-\varepsilon'$, statt ε und ε' nehmen; in diesem Falle wird folglich:

$$\alpha = A-\Theta-\frac{r\sin\varepsilon}{\cos(D-\omega)}; \qquad \delta = D-\omega-r\cos\varepsilon;$$

$$\alpha+m = A-\Theta'+\frac{r'\sin\varepsilon}{\cos(D-\omega')}; \quad \delta+n = D-\omega'-r'.\cos\varepsilon';$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(r'+r); \qquad \beta = \tfrac{1}{2}(\omega+\omega');$$

$$tg\tfrac{1}{2}(\varepsilon'-\varepsilon) = \frac{n+\omega'-\omega}{(m+\Theta'-\Theta)\cos(D-\beta)};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon'+\varepsilon) = \frac{(m+\Theta'-\Theta)\cos(D-\beta)}{2\varrho\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'-\varepsilon)} = \frac{n+\omega'-\omega}{2\varrho\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'-\varepsilon)} \quad . \; . \quad (B)$$

sein; wo ε oder ε' also ein spitzer Winkel sein muss, wenn $\delta+\omega$ oder $\delta+n+\omega'$ numerisch grösser als D ist; dagegen ist ε oder ε' ein stumpfer Winkel, wenn $\delta+\omega$ oder $\delta+n+\omega'$ numerisch kleiner als D ist. Bei diesen Berechnungen sind fünfstellige Logarithmen vollkommen ausreichend.

Zur Zeit der wahren äquatorialen Conjunction des Mondes mit dem Sterne muss die wahre *AR* des Mondmittelpunktes gleich A oder gleich der *AR* des Sternes sein; ist also α die

für die mittlere Zeit t des Eintrittes nach obiger Methode bestimmte AR des Mondes, μ die wahre stündliche Bewegung des Mondes in AR für die Mitte des Zeitraumes geltend, zwischen dem Eintritte und der mittleren Conjunctionszeit τ des Beobachtungsorts, so wird:

$$\tau = t + \frac{(A - \alpha)}{\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (C)$$

sein. Der Unterschied zwischen dieser Conjunctionszeit τ und der mittleren Zeit, die an einem anderen Orte bei derselben wahren Conjunction gezählt wird, giebt nun die geographische Längendifferenz beider Orte. Berechnet man aus den Ephemeriden oder aus den Mondtafeln, mit Hülfe der genauen Länge der Beobachtungsörter die wahre AR und Declination α☾ und δ☾ des Mondes für die wahre Conjunctionszeit, so erhält man die zu dieser Zeit stattfindenden Tafelfehler $A - \alpha$☾ und $\delta + \nu(\tau - t) - \delta$☾, wo ν die wahre stündliche Bewegung des Mondes in Declination bedeutet, welche für die Zeit $\frac{\tau + t}{2}$ gilt; man bekommt auf diese Weise die Unterschiede zwischen den Fehlern der Mondtafeln und den Fehlern der bei der Rechnung angenommenen Position des Sternes.

Die Hauptresultate sind ganz unabhängig von dem eigentlichen Fehler in Bezug auf die Declination des Mondes oder des Sternes und hängen nur von der Richtigkeit des angenommenen Halbmessers des Mondes r, der Mondparallaxe π und, wenn keine correspondirende Sternbedeckung an einem anderen Orte beobachtet worden ist, noch von der Richtigkeit der angenommenen geraden Aufsteigungen des Mondes α und des Sternes A ab. Wenn δr und $\delta \pi$ die Correctionen von r und π bedeuten, so wird die entsprechende Correction von τ durch die Gleichung $\delta \tau = \frac{\delta (A - \alpha)}{\mu}$ bestimmt, und die Grösse $\delta (A - \alpha)$ durch die Differentiation der Gleichungen (1) und (3) in Bezug auf $(A - \alpha)$, Θ, ω, Θ', ω', r, r', ε und ε' gefunden. Eine leichte Rechnung ergiebt

dann, dass derjenige Theil des $\delta(A-\alpha)$, welcher von $\delta\pi$ und δr abhängt, sich folgendermassen ausdrücken lässt:

$$\delta(A-\alpha) = \frac{\delta\pi}{\pi \sin(\varepsilon+\varepsilon')}\left\{\Theta . \sin\varepsilon \cos\varepsilon' + \Theta' . \cos\varepsilon \sin\varepsilon' + \right.$$
$$\left. + \frac{(\omega'-\omega)\cos\varepsilon . \cos\varepsilon'}{\cos(D-\beta)}\right\} + \frac{\delta r . \sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\varepsilon')}{\cos(D-\beta) . \cos\frac{1}{2}(\varepsilon+\varepsilon')},$$

wo $\beta = \frac{1}{2}(\omega'+\omega)$ gesetzt ist. Wenn viele Beobachtungen des Eintritts und Austritts an verschiedenen Orten gemacht wurden, deren geographische Längen gut bekannt sind, so kann man auch die Verbesserungen δr und $\delta\pi$ der angenommenen Werthe von r und π suchen, indem man Bedingungsgleichungen von der Form: $\tau + \delta\tau - (\tau' + \delta\tau') = l$ bildet; wo l der Längenunterschied zweier Beobachtungsorte, τ die Conjunctionszeit des einen und τ' die des anderen bedeutet.

Beispiel. Zur Erläuterung des Vorhergehenden wollen wir nach Karlini's Methode dasselbe Beispiel berechnen, welches wir schon § 161, S. 492 angeführt haben. Am 16. November 1836 wurde nämlich im Dorfe Nicolaewka, dessen nördliche geographische Breite $= 46^\circ 58' 21''$ und genäherte östliche Länge von Greenwich $= 2^h 38^m 35^s$ ist, der *Eintritt* des Sternes τ^2 *Aquarii* in den Mondrand um $6^h 54^m 53^s,9$, der *Austritt* desselben um $7^h 56^m 28^s,8$ mittlere Nicolaewkaer Zeit beobachtet.

Wir behalten hier alle früher angenommenen Elemente der Berechnung unverändert bei und nehmen also an, dass $\varphi' = 46^\circ 46' 54''$; die *AR* des Sternes, oder $A = 340^\circ 14' 9'',3$; seine Declination $D = -14^\circ 27' 10'',4$, ferner hat man:

	für den Eintritt:	*für den Austritt*:
die Horizontalparallaxe .	$\pi = 58'\ 5'',7$	$\pi' = 58'\ 4'',2$
der wahre Halbmesser des ☾	$r = 15\ 51\ ,50$	$r' = 15\ 51\ ,08$
die Sternzeit in Graden	$s = 339^\circ 29\ 12\ ,00$	$s = 354^\circ 55\ 28\ ,5$
damit findet man nach den Formeln des § 162, S. 499	$\eta = +46\ 47\ 2\ ,80$	$\eta' = 47\ 43\ 9\ ,40$
	$\omega = -\ 0\ 50\ 55\ ,47$	$\omega' = -0\ 50\ 35\ ,31$
	$\Theta = +\ 0\ 0\ 32\ ,11$	$\Theta' = -0\ 10\ 22\ ,41$

Mit Hülfe der vorläufig angenommenen geographischen Länge des Beobachtungsorts bekommen wir aus dem Nautical Almanac die wahre AR des Mondcentrums:

für den Eintritt . α_0	$=339°57'22'',81$	$\delta_0=-13°35'57'',20$
für den Austritt α_0+m	$=340\ 30\ 13\ ,27$	$\delta_0+n=-13\ 21\ 29\ ,40$
$m=$	$+32'50'',46$	$n=\ +14'27'',80$

Alsdann folgt nach dem Vorhergehenden:

$$n+\omega'-\omega = +14'47'',96 = +\ 887'',96$$
$$m+\Theta'-\Theta = +21\ 55\ ,94 = +1319\ ,94$$
$$\varrho = \tfrac{1}{2}(r'+r) = 15\ 51\ ,29 = 951\ ,29$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(\omega+\omega') = -\ 0°50',7$$
$$D-\beta = -13\ 36\ ,4$$
$$tg\,\tfrac{1}{2}(\varepsilon'-\varepsilon) = \frac{+887'',96}{+1319'',94\cos(D-\beta)}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon'+\varepsilon) = +\frac{1319'',94\cos(D-\beta)}{2\varrho.\cos\frac{1}{2}(\varepsilon'-\varepsilon)} = \frac{887'',96}{2\varrho\sin\frac{1}{2}(\varepsilon'-\varepsilon)}$$
$$\varepsilon = 90°18',4;\ \varepsilon' = 159°50',5.$$
$$A-\Theta-\frac{r\sin\varepsilon}{\cos(D-\omega)} = 339°57'18'',2 = \alpha$$
$$A-\Theta'+\frac{r\sin\varepsilon'}{\cos(D-\omega')}-m = 339\ 57\ 18\ ,4 = \alpha$$
$$\text{im Mittel } \alpha = 339°57'18'',3$$
$$A-\alpha = +0\ 16\ 51\ ,0$$

$$D-\omega-r\cos\varepsilon = -13°36'\ 9'',8 = \delta$$
$$D-\omega'-r'\cos\varepsilon'-n = -13\ 36\ 10\ ,1 = \delta$$
$$\delta = \ldots\ldots -13°36'\ 9'',95$$

Nach dem Nautical Almanac findet die wahre Conjunction ungefähr um 4^h48^m mittlerer Greenwicher Zeit statt; der Eintritt hat stattgefunden um $6^h54^m,9$ Nicolaewkaer oder um $4^h16^m,3$ mittlere Greenwicher Zeit; nun ist um 4^h32^m Greenwicher Zeit die wahre Bewegung des Mondes im AR während einer mittleren Stunde $= 1921'',0 = \mu$ in Bogen; folglich muss nach Nicolaewkaer mittlerer Zeit die wahre Conjunction stattfinden zu der Zeit:

$$\tau = t + \frac{(A-\alpha)}{\mu} = 6^h\,54^m\,53^s{,}9 + 0^h\,31^m\,34^s{,}6 = 7^h\,26^m\,28^s{,}5.$$

Nach § 161, S. 497 die wahre Conjunction zu Greenwich $4\ \ 48\ \ \ 4{,}8$

Also liegt Nicolaewka östlich von Greenwich . . $2^h\,38^m\,23^s{,}7$.

Der Fehler der Mondtafeln in *AR* kann in diesem Falle nicht bestimmt werden, weil die Sternbedeckung nur an einem Orte beobachtet wurde, dessen Länge eben durch diese Bedeckung gefunden worden ist. Nach unserer Rechnung war die wahre Declination des Mondcentrums beim Eintritte $= \delta = -13°\,36'\,9'',9$; mit der gefundenen Länge aber bekommen wir aus dem Nautical Almanac $\delta = -13°\,35'\,54'',8$; folglich würde der Fehler der Tafeln in Declination, wenn die Beobachtungen des Eintritts und Austritts genau und der angenommene Sternort richtig gewesen wäre, gleich $-15'',1$ sein.

Alle hier ermittelten Resultate stimmen ziemlich nahe mit denjenigen überein, welche wir schon in § 161, S. 492—497 erhalten haben.

Allgemeine Bemerkungen.

163. Wir schliessen den Artikel über die Bestimmung der Längendifferenz aus Bedeckungen durch den Mond mit einigen Bemerkungen, welche wir zum Theil aus dem vortrefflichen Aufsatze von Hansen (Astronomische Nachrichten, Nr. 392—395, 17. Band 1840) entnehmen.

Aus dem vorher Gesagten folgt nämlich, dass, um die Längendifferenz von den Fehlern, die auf sie einwirken, möglichst zu befreien, man den Fehler der geraden Aufsteigung und Abweichung des Sternes und den Fehler der geraden Aufsteigung, Abweichung, Horizontalparallaxe und Radius des Mondes kennen muss. Da unsere jetzigen Tafeln die gerade Aufsteigung und

Abweichung des Mondes im Allgemeinen minder genau geben, als eine einzelne gute Meridianbeobachtung des Mondes, so würde man in den Fällen, wo eine solche Meridianbeobachtung am Tage der Sternbedeckung vorhanden ist, die daher rührenden Fehler wohl vermeiden können; der Einfluss anderer Fehler bleibt jedoch noch vorhanden und ist zuweilen nicht unbedeutend. Die Positionen der Sterne, die man aus den älteren Catalogen zu nehmen genöthigt ist, können manchmal mit eben so grossen oder grösseren Fehlern behaftet sein, wie die AR und Declination des Mondes, welche die jetzigen Mondtafeln geben; auch der Einfluss der Fehler des Halbmessers und der Horizontalparallaxe kann zuweilen grösser werden, als der eines gleichen Fehlers in der Abweichung des Mondes oder des Sternes. Ein solcher Fall findet meistens dann statt, wenn an einem Orte nur der Eintritt, an einem anderen aber nur der Austritt beobachtet worden ist; in den Fällen jedoch, wo die Beobachtungen gleichartig sind, heben sich die Fehler in der Längendifferenz oft zum grössten Theile auf.

Wenn man zur Bestimmung der Längendifferenzen recht viele Sternbedeckungen benutzen kann, so muss man die Rechnung nach den Vorschriften der Wahrscheinlichkeit, oder nach der Methode der kleinsten Quadraten führen, und es wird am zweckmässigsten sein, ein Verfahren anzuwenden, welches Hansen in Nr. 393. 394 der Astronomischen Nachrichten auseinandergesetzt hat. Begnügt man sich aber mit nahezu richtigen Resultaten, so kann man die wahrscheinlichsten Längendifferenzen aus vielen Sternbedeckungen leicht folgendermassen bestimmen.

Angenommen, dass an mehreren Orten sowohl der Eintritt wie auch der Austritt bei irgend einer Sternbedeckung beobachtet wurde, so kann man die Zeit der wahren Aequatorialconjunction und die Glieder, welche den Einfluss der Rechnungselemente ausdrücken, aus den Beobachtungen an jedem einzelnen Orte berechnen. Alsdann bilden sich durch die Vergleichung der Bedingungsgleichungen für den Eintritt und für den Aus-

tritt an jedem Beobachtungsorte mehrere Gleichungen (ähnlich wie diejenigen, in § 159, S. 487), welche von den Fehlern im Halbmesser, in der Parallaxe des Mondes und in dem Unterschiede zwischen der Declination des Mondes und des Sternes abhängen. Wenn man nur an drei Orten den Eintritt und den Austritt beobachtet hat, so wird man drei Gleichungen zur Berechnung der drei unbekannten Grössen haben und die Aufgabe ist völlig bestimmt, d. h. man wird Werthe finden, welche den Gleichungen genau Genüge thun; die Fehler der Beobachtung werden dabei als verschwindend betrachtet werden müssen. Sind aber an vielen Orten die Eintritte und die Austritte beobachtet worden, so muss man nach der Methode der kleinsten Quadrate das System der wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Grössen suchen, welche sich den Beobachtungen am nächsten anschliessen.

Der erste Schritt zur Auflösung der Aufgabe wird darin bestehen müssen, dass man den Grad der Zuverlässigkeit einer jeden aus den Beobachtungen gebildeten Bedingungsgleichung, oder das sogenannte Gewicht derselben ermittelt. Die Beobachtungen haben gewiss, je nach der Geübtheit des Beobachters, der Güte des Fernrohrs und dem Zustande der Luft während der Sternbedeckung eine verschiedene Genauigkeit; aber es ist unmöglich, den Werth dieser Umstände auf eine auch nur einigermassen genügende Weise in Zahlen auszudrücken, und daher muss man bei der Bestimmung des Gewichtes sich hier auf die Berücksichtigung allgemeiner Umstände beschränken. So werden z. B. die Eintritte und besonders die Austritte der Sterne am dunkeln Rande des Mondes genauer beobachtet, als am hellen Rande, und man kann das Gewicht der ersteren Beobachtungen doppelt so gross annehmen, als das der letzteren. Ausserdem eignet sich die Beobachtung einer Sternbedeckung um so besser zur Längenbestimmung, je länger die Chorde ist, welche der Stern hinter der Mondscheibe beschreibt, indem alsdann die Ungleichheiten des Mondrandes und die Fehler der Rechnungs-

elemente einen geringeren Einfluss auf das Resultat äussern. Hansen nahm das Gewicht der Beobachtung einer Sternbedeckung dieser Chorde, oder, was dasselbe ist, dem Cosinus des Winkels proportional an, den die Chorde mit dem Halbmesser des Mondes bildet; es ist hierbei also die Genauigkeit einer solchen Beobachtung, bei welcher der Weg des Sternes auf dem Mondrande senkrecht steht, zur Einheit genommen.

Multiplicirt man die Bedingungsgleichungen mit den Quadratwurzeln ihrer entsprechenden Gewichte und behandelt dann die Aufgabe nach der Methode der kleinsten Quadrate, so wird man erstens die wahrscheinlichen Fehler in der angenommenen Grösse des Halbmessers, der Horizontalparallaxe des Mondes und dem Unterschiede der Declinationen des Mondes und des Sternes finden; zweitens diese Fehler in den allgemeinen Ausdruck der Zeit der wahren Conjunction für jeden Beobachtungsort substituiren und darauf die Längendifferenz bestimmen. Das Gewicht dieser Bestimmung kann man nahezu gleich dem Producte aus der Anzahl der bei dieser Bestimmung angewandten Beobachtungen mit dem arithmetischen Mittel aus den Cosinussen der oben erwähnten Winkel, welche verschiedenen Beobachtungen einer Sternbedeckung entsprechen, annehmen. Auf dieselbe Weise wird die Längendifferenz auch aus anderen beobachteten Sternbedeckungen abgeleitet und ihr relatives Gewicht bestimmt. Um nun ein definitives Resultat aus einzelnen, verschiedenen Bestimmungen der Längendifferenz eines Orts zu erhalten, multiplicirt man jede einzelne Bestimmung mit ihrem Gewichte, und die Summe solcher Producte dividirt man durch die Summe der Gewichte; der Quotient wird das gesuchte Resultat sein.

Bessels Methode zur Berechnung aller von Parallaxe abhängigen Verfinsterungen.

164. Bessel hat die vollständige Theorie der Finsternisse im zweiten Theile seiner Astronomischen Untersuchungen entwickelt; doch wollen wir hier nur das Hauptsächlichste dieser Theorie, zugleich mit ihrer Anwendung auf geographische Längenbestimmung mittheilen.

Es sei (Fig. 7) T das Centrum der Erde, S das Centrum der Sonne, L das des Mondes oder Planeten, und O der Ort des Beobachters auf der Erdoberfläche. Die Ränder der Gestirne S und L werden sich zu berühren scheinen, wenn der Punkt O sich auf der Oberfläche des Kegels befindet, welcher beide Gestirne umwickelt. Solche Kegel giebt es nun zwei; der eine von ihnen $V \Phi V'$ (der Halbschattenkegel) (Fig. 7) hat seinen Scheitel in Φ zwischen den Mittelpunkten der Gestirne L und S, der andere aber $V \Phi' V'$ (der Kernschattenkegel) (Fig. 8) hat seinen Scheitel Φ' in der Verlängerung der Linie LS zwischen T und L. Wenn der Punkt O auf der Oberfläche des ersten Kegels liegt, so wird ein Beobachter in O die äussere Berührung der scheinbaren Ränder der Gestirne L und S bemerken; liegt dagegen O auf der Oberfläche des zweiten Kegels, so wird der Beobachter die innere Berührung der Ränder sehen und dieses wird sich sowohl bei totalen, als überhaupt bei centralen Verfinsterungen ereignen.

Um nun die einfachste Gleichung für die eben erwähnte Kegeloberfläche aufzustellen, denke man sich ein rechtwinkliges dreiaxiges Coordinatensystem, dessen Ursprung im Centrum der Erde T sei (Fig. 7 und 8); seine Achse der z sei die Linie TZ, welche der Linie LS, die die Mittelpunkte der Gestirne L und S verbindet, parallel läuft; ihre positive Richtung wollen wir auf der Seite der Linie nehmen, welche von dem der Erde am nächsten liegenden Gestirne L nach dem entfernteren S geht,

und ferner annehmen, dass das positive Ende dieser Achse TZ einem Punkte Z der Himmelskugel entspricht, dessen gerade Aufsteigung $= a$, dessen Declination aber $= d$ ist; ferner setzen wir voraus, dass die Achse der y oder TY in der Ebene liege, welche durch TS und den sichtbaren Pol des Aequators geht, und es sei das positive Ende dieser Achse auf einen Punkt Y der Himmelskugel gerichtet, dessen gerade Aufsteigung $= a$, und dessen Declination $= 90° + d$ ist, die dritte oder die Achse der x sei endlich die Linie TX, welche senkrecht auf der Ebene des Declinationskreises ZTY steht und im Aequator selbst in einem Winkelabstand $= 90°$, vom Durchschnitte des Aequators mit dem Declinationskreise ZTY liegt; die Declination der beiden Enden dieser Achse wird $= 0° 0' 0''$ werden, und als positive Richtung dieser Achse der x, wollen wir diejenige nehmen, welche der geraden Aufsteigung $= 90° + a$ entspricht. Wir wollen nun annehmen, dass die auf das Centrum der Erde bezogenen:

Coordinaten	*die Lage bestimmen:*
x, y und z . .	*des Centrums L, des näheren Gestirns*
x', y' und z' .	*des Centrums S, des entfernteren Gestirns*
ξ, η und ζ . .	*des Punktes O, oder des Orts des Beobachters.*

Ferner sei $G =$ der Linie LS, oder der Entfernung beider Gestirne L und S von einander;

„ „ $f =$ dem Winkel $O\Phi L$ (Fig. 7) oder $O\Phi' L$ (Fig. 8), welchen die Achse mit der Seite des Kegels bildet;

„ „ $s =$ dem linearen senkrechten Abstande der Spitze des Schattenkegels von der Ebene YTX.

Da die Achse TZ mit der Linie LS parallel ist, so haben wir:

$$x' = x,\ y' = y \text{ und } z' = z + G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Wenn man nun von der Spitze des Kegels Φ aus (Fig. 7) und vom Punkte O aus die senkrechten Linien ΦQ und Ob

auf die Ebene XTY fällt, darauf in dieser Ebene die Linien Ql und bp senkrecht auf die Achse TY zieht, und endlich die Linie pr parallel der Linie bQ zieht, so wird:

$Ob = \zeta$, $Tp = \eta$; $bp = \xi$; $\Phi Q = s$, $Tl = y$; $Ql = x$; $pl = y - \eta$ und $rl = Ql - Qr = Ql - bp = x - \xi$.

Denkt man sich nun eine Ebene nOk, welche durch den Ort des Beobachters in O geht und der Ebene YTX parallel ist; bezeichnet die in ihr mit den Achsen TY und TX parallel laufenden Linien durch On und Om, ferner den Punkt, wo die Verlängerung der Linie LS diese Ebene Omn trifft, durch K, und fällt endlich die Linie Kn senkrecht auf On, so wird:

$Kn = rl = x - \xi$; $On = pl = y - \eta$ und $OK = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

Aus dem bei K rechtwinkligen Dreiecke ΦOK folgt:

$$tgf = tg\, O\Phi K = \frac{OK}{\Phi K} \text{ und } \Phi K = Q\Phi - KQ = s - \zeta,$$

mithin:

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (s-\zeta)^2 tg^2 f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Diese Gleichung entspricht der Kegeloberfläche bei der äusseren Berührung; eine ganz ähnliche kann man aber auch für den Schattenkegel bei der inneren Berührung ableiten.

Bei der Annahme, dass beide Gestirne L und S kugelförmig sind, kann man den Halbmesser des ersten Gestirns oder $LW = k$ und den Halbmesser SV des zweiten $= k'$ setzen; man hat dann aus den ähnlichen bei W und V rechtwinkligen Dreiecken $L\Phi W$ und $S\Phi V$; $SV : S\Phi = LW : L\Phi$; $S\Phi + L\Phi = G$; $S\Phi . \sin S\Phi V = SV$, $L\Phi \sin L\Phi W = LW$; aber $S\Phi V = L\Phi W = f$, $S\Phi = z' - s$; $L\Phi = s - z$; folglich:

$$z' - s : k' = s - z : k; \; G \sin f = k' + k.$$

Denkt man sich den Schattenkegel, welcher der inneren Berührung entspricht und bezeichnet seinen Scheitel durch Φ'

(Fig. 8), so wird in diesem Falle $\Phi' L = QL - Q\Phi' = z - s$ $\Phi' S = z' - s$ und $LS = \Phi' S - \Phi' L = G$; aber es ist $\Phi' S . \sin V\Phi' S = SV = k$; $\Phi' L \sin W\Phi' L = LW = k$; folglich werden wir bei der inneren Berührung haben:

$$z' - s : k' = z - s : k \text{ und } G \sin f = k' - k.$$

Hieraus findet man für die

äussere Berührung . . . $s = \dfrac{zk' + z'k}{k' + k}$ und $\sin f = \dfrac{k' + k}{G}$,

innere Berührung . . . . $s = \dfrac{zk' - z'k}{k' - k}$ und $\sin f = \dfrac{k' - k}{G}$.

Wir haben jetzt noch zu betrachten, in welchen Fällen der Winkel f spitz, und wann er stumpf sein wird. Für einen Beobachter im Punkte O auf der Erdoberfläche wird die Spitze des Schattenkegels entweder nach derjenigen Himmelsgegend, in welcher die Gestirne liegen, oder nach der entgegengesetzten Gegend gerichtet sein; der erstere Fall wird sich bei der äusseren Berührung überhaupt und bei der inneren Berührung zur Zeit der ringförmigen Verfinsterungen ereignen; die Spitze des Schattenkegels befindet sich alsdann entweder in Φ (Fig. 7) oder in Φ'' (Fig. 9); dagegen wird der zweite Fall stattfinden, wenn die Finsterniss total und die Berührung eine innere ist; alsdann befindet sich Φ' (Fig. 8) zwischen dem Beobachter und dem Centrum der Erde T. Zählt man nun den Winkel f, welchen die Achse des Kegels mit der Seite des letzteren bildet, immer nach derselben Richtung, so erhält man $f = O\Phi Q$ (Fig. 7), oder $f = O\Phi'' Q$ (Fig. 9), welches beide spitze Winkel sind, und $f = O\Phi' Q$ (Fig. 8), welches ein stumpfer Winkel ist; hieraus sieht man, dass für die äusseren Berührungen überhaupt und für die innere bei ringförmigen Verfinsterungen der Winkel f spitz ist; dagegen für die inneren Berührungen bei totalen Finsternissen wird dieser Winkel stumpf werden.

Eliminirt man s und $tg f$ aus der Gleichung (2) mit Hülfe ihrer gefundenen Werthe, so erhält man:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\frac{[k'(z-\zeta)\mp k(z'-\zeta)]^2}{G^2-(k'\mp k)^2}\quad\ldots\ldots\quad(3),$$

wo (+) sich auf die äusseren und (—) sich auf die inneren Berührungen bezieht. Setzt man nun der Kürze halber:

$$l=\frac{z(k'\mp k)\mp kG}{\mp\sqrt{G^2-(k'\mp k)^2}}=z\,tg f\mp k\sec f$$
$$i=\frac{k'\mp k}{\mp\sqrt{G^2-(k'\mp k)^2}}=tg f\quad\ldots\ldots\quad(4),$$

wo (+) sich auf die äusseren, aber (—) sich auf die inneren Berührungen bezieht*), so erhält man unter der Bemerkung, dass $z'=z+G$ ist, anstatt der Gleichung (3) die folgende:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=(l-i\zeta)^2\quad\ldots\ldots\quad(5).$$

165. Wir wollen nun zeigen, wie man für jede gegebene Zeit mit Hülfe der Ephemeride die Werthe von x, ξ, y, η, l, i und ζ berechnen kann. Um dieses zu bewerkstelligen, denke man sich ein neues, sich im Mittelpunkte der Erde rechtwinklig durchschneidendes Achsensystem; die neue Coordinatenachse der z sei nach dem sichtbaren Pole des Aequators gerichtet, die neue Achse der x sei im Aequator gelegen, und nach einem Punkte des Himmels gerichtet, dessen gerade Aufsteigung $=\alpha'$, gleich derjenigen des entfernteren Gestirnes von der Erde (der Sonne) sei; endlich sei die Achse der y auf einen Punkt des Aequators gerichtet, dessen gerade Aufsteigung $=90°+\alpha'$, und ferner seien diese Richtungen den positiven Seiten der Coordinatenachsen entsprechend. Bezeichnen wir nun durch α, δ und r die wahre gerade Aufsteigung, die wahre Abweichung und die wahre Entfernung des Mondcentrums vom Erdcentrum, dagegen durch α', δ' und R dieselben Grössen für das Sonnencentrum, wobei

---

*) Es ist klar, dass $l=z\,tg f$ der Radius des Kreises ist, welcher vom Durchschnitte des Schattenkegels mit der Ebene gebildet wird, die durch das Centrum der Erde geht und senkrecht auf der Achse der z steht, von der wir schon § 164, S. 512 gesprochen haben.

wir annehmen wollen, dass r und R sich auf dieselbe Längeneinheit beziehen, so können wir die neuen Coordinaten ganz ähnlich wie in § 15, S. 28 berechnen, und finden alsdann:

Die Coordinaten des Mondcentrums L parallel der neuen Achse, der		*des Sonnencentrums S*
z	$r \sin \delta$	$R \sin \delta'$
y	$r \cos \delta \sin (\alpha - \alpha')$	0
x	$r \cos \delta \cos (\alpha - \alpha')$	$R \cos \delta'$

Wenn man die Coordinatenachsen nach dem Mittelpunkte L des Mondes verlegt, wo alsdann die Achse der z nach dem Pole, die Achse der x nach der geraden Aufsteigung $= \alpha'$, und die Achse der y nach der geraden Aufsteigung $= 90° + \alpha'$ gerichtet sein soll, so werden solche Coordinatenachsen mit den eben vorhin erwähnten Achsen parallel laufen, und wir finden alsdann für die *Coordinaten des Mittelpunktes des entfernteren Gestirnes (der Sonne)*, in Bezug auf das der Erde zunächst gelegene:

parallel der neuen Achse der z . . . . $G \sin d$
„ „ „ „ „ y . . . . $G \cos d \sin (a - \alpha')$
„ „ „ „ „ x . . . . $G \cos d \cos (a - \alpha')$

Dann wird, vom Centrum L des Mondes aus gesehen, die gerade Aufsteigung des Centrums S, des entfernteren Gestirns $= a$, seine Declination $= d$ und seine Entfernung $= G$ werden.

Es sei $\frac{G}{R} = g$ und $\frac{r}{R} = m$; dann ist:

$$\left.\begin{aligned} g \sin d &= \sin \delta' - m \sin \delta \\ g \cos d \sin (a - \alpha') &= - m \cos \delta \sin (\alpha - \alpha') \\ g \cos d \cos (a - \alpha') &= \cos \delta' - m \cos \delta \cos (\alpha - \alpha') \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (6).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man die Winkel a und d finden; um aber x, y u. s. w. zu berechnen, muss man wiedem zu unserem ursprünglichen Coordinatensysteme § 164, S. 510 zurückkehren. Denkt man sich um den Punkt T herum (Fig. 10)

eine Kugel mit einem beliebigen Halbmesser beschrieben, und bezeichnet auf ihr durch L den Ort des Mondes, durch P den Pol des Aequators und durch Z, Y, X die Punkte auf dieser Kugel, die von den positiven Enden der oben erwähnten Achsen getroffen werden, so wird bei diesem Systeme P in der Ebene des grössten Kreises ZY liegen und die Punkte L, Z, Y, X werden durch die geraden Aufsteigungen und Abweichungen α und δ, a und d, a und $90°+d$, $90°+a$ und $0°$ bestimmt werden. Die Coordinaten z, y und x des Punktes L in Beziehung auf T, den erwähnten Achsen parallel genommen, werden den Projectionen der Linie $TL = r$ auf diesen Achsen gleich sein, oder den entsprechenden Produkten der Linie TL mit den Cosinussen der Bögen ZL, YL und XL gleich werden; aber die Cosinusse dieser Bögen kann man aus den sphärischen Dreiecken ZPL, YPL und XPL leicht berechnen, in denen die Seiten $ZP = 90°-d$, $LP = 90°-\delta$, $YP = d$, $XP = 90°$ und die Winkel $ZPL = a-\alpha$, $YPL = 180°-(a-\alpha)$ und $XPL = 90°+a-\alpha$; folglich hat man:

$$\left.\begin{aligned} z &= r[\sin d \sin\delta + \cos d \cos\delta \cos(\alpha - a)] \\ y &= r[\cos d \sin\delta - \sin d \cos\delta \cos(\alpha - a)] \\ x &= r\cos\delta \sin(\alpha - a) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7).$$

Hat man auf diese Weise z, y und x berechnet, so kann man z', y' und x' durch folgende Ausdrücke finden:

$$z' = z + G,\ y' = y \text{ und } x' = x.$$

Denkt man sich nun, dass L in (Fig. 7) nicht mehr das Mondcentrum, sondern das geocentrische Zenith des Beobachters bedeutet; so wird die Declination des Punktes L gleich φ' oder der geocentrischen Breite des Beobachtungsorts, und seine gerade Aufsteigung wird gleich der in Graden ausgedrückten Sternzeit μ des Beobachters werden; setzt man nun die Entfernung des Beobachters vom Mittelpunkte der Erde $= \varrho$, so erhalten wir die Werthe von ζ, η und ξ aus der Gleichung (7), wenn man

darin statt r, α und δ die Grössen ϱ, μ und φ' substituirt; folglich ist nunmehr:

$$\left.\begin{array}{l}\zeta = \varrho\,[\sin d \sin\varphi' + \cos d \cos\varphi' \cos(\mu - a)] \\ \eta = \varrho\,[\cos d \sin\varphi' - \sin d \cos\varphi' \cos(\mu - a)] \\ \xi = \varrho \cos\varphi' \sin(\mu - a).\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Die Einheit, auf welche sich die Längen der Linien r, R und ϱ beziehen, ist vollkommen willkürlich; zur Bequemlichkeit der Rechnung hat Bessel für diese Einheit den Aequatorial-Halbmesser der Erde angenommen. Es sei das nähere Gestirn der Mond, das entferntere die Sonne; nimmt man nun an, dass die Aequatorial-Horizontalparallaxe des Mondes $= \pi$ ist, die mittlere Horizontalparallaxe der Sonne $= \pi'$, und r' die Entfernung des Erdcentrums vom Sonnencentrum, ebenso ausgedrückt, wie man es in den Sonnentafeln oder Ephemeriden findet, d. h. wo die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit betrachtet wird, so erhält man, wenn der Aequatorialhalbmesser der Erde zur Einheit genommen wird:

$$r = \frac{1}{\sin\pi} \text{ und } R = \frac{r'}{\sin\pi'}.$$

Es sei *H der mittlere Halbmesser* der Sonne, oder der Halbmesser, in welchem die Sonnenscheibe in der Entfernung $r' = 1$ erscheint, so wird der lineare Halbmesser der Sonne oder k', falls der Aequatorialhalbmesser der Erde zur Einheit genommen wird, ausgedrückt werden durch:

$$k' = \frac{\sin H}{\sin\pi'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9);$$

folglich wird man für alle Sonnenfinsternisse haben:

$$r = \frac{1}{\sin\pi}; \quad m = \frac{\sin\pi'}{r'\sin\pi}; \quad g = \frac{G.\sin\pi'}{r'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin f = \dfrac{\sin H \pm k \sin\pi'}{r' g} \\ stg f = l = stg f \pm k \sec f\end{array}\right\} \begin{array}{l}+ \textit{für die äusseren Berührungen} \\ - \textit{für die inneren Berührungen.}\end{array}$$

Der Zähler im Ausdrucke für $\sin f$ ist eine für alle Sonnenfinsternisse constante Grösse; nach Newcombs Untersuchungen ist $\pi' = 8'',85$ anzunehmen; aus den Messungen Bessels bei dem Durchgange des Merkurs vor der Sonne im Jahre 1832 wurde $H = 959'',788$ abgeleitet, und endlich folgt aus den Burckhardtschen Mondtafeln, dass, wenn man den Aequatorialhalbmesser der Erde als Einheit annimmt, der lineare Halbmesser des Mondes oder $k = 0,2725$ sein wird; folglich hat man überhaupt:

$$\log \pi' = 5,6189407-10; \log(\sin H + k \sin \pi') = 7,6688050-10;$$
$$\log(\sin H - k \sin \pi') = 7,6666896-10 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Wir wollen jetzt die Ausdrücke für a, d, g und für die Coordinaten x, y, z, ξ, η und ζ in die bequemste Form zur logarithmischen Berechnung umwandeln; es sei daher:

$$tg\, u = \frac{\cos\frac{1}{2}(\delta'+\delta) . tg\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}; \quad \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)\cos\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)}{\cos u};$$

so kommt:

$$g = \sqrt{1-2m\cos\gamma+m^2}$$

Weil nun γ, oder die geocentrische Entfernung beider Gestirne, ein sehr kleiner Winkel bei Sonnenfinsternissen ist, so kann man folgende schnell convergirenden Reihen annehmen:

$$g = 1-m+\tfrac{1}{2}\frac{m}{1-m}\cdot\gamma^2\sin^2 1''-..; \quad d_0 = \delta'+\frac{m}{g}(\delta'-\delta)$$

$$d-\delta' = \frac{m}{g}\cdot\frac{2\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)\cos\frac{1}{2}(\delta'+\delta)}{\sin 1''\cos\frac{1}{2}(\delta'+d_0)} - \frac{\frac{1}{2}m.\gamma^2}{g(1-m)}\cdot\frac{\sin 1''.\sin\delta'}{\cos\frac{1}{2}(\delta'+d_0)}+\,..$$

$$a-\alpha' = \left(\frac{m\cos\delta}{\cos\delta'}\right)\frac{\sin(\alpha'-\alpha)}{\sin 1''}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{m\cos\delta}{\cos\delta'}\right)^2\frac{\sin 2(\alpha'-\alpha)}{\sin 1''}+\,.\,.\,.\,.\,.,$$

wenn m sehr klein ist, oder:

$$tg(a-\alpha') = \frac{m.\cos\delta.\sin(\alpha'-\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}(b-\delta')\sin\frac{1}{2}(b+\delta')}, \text{ wo } \cos b = m\cos\delta\cos(\alpha'-\alpha),$$

wenn m kein sehr kleiner Bruch ist.

Bei den Verfinsterungen der Sonne durch den Mond ist m

ungefähr $\frac{1}{400}$, und dann sind die letzten Glieder in den Ausdrücken für $d-\delta'$ und $a-\alpha'$ beinahe unmerklich.

Es sei:

$$tg\,\delta\, sec(\alpha - a) = tg\,\Theta;\ \frac{cos\,\delta\, cos(\alpha - a)\, sec\,\Theta}{sin\,\pi} = E$$

$$tg\,\varphi'\, sec(\mu - a) = tg\,\psi;\ \varrho\, cos\,\varphi'\, cos(\mu - a)\, sec\,\psi = F$$

wenn man nun bei x, y u. s. w. dieselbe Einheit wie oben annimmt, so wird:

$$x = \frac{cos\,\delta\, sin(\alpha - a)}{sin\,\pi}$$

$$y = E sin(\Theta - d);\ z = E cos(\Theta - d) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$\xi = \varrho\, cos\,\varphi'\, sin(\mu - a);$$

$$\eta = F sin(\psi - d),\ \zeta = F cos(\psi - d) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

166. Diese Formeln für x, y, z, ξ, η und ζ sind ganz allgemein und beziehen sich auf jede Verfinsterung; im Falle der Bedeckung eines Planeten durch den Mond bleibt alles beim Gesagten, nur bezeichnet alsdann r' die Entfernung des Planeten von der Erde, eben so ausgedrückt, wie es in den Ephemeriden geschieht und H ist derjenige Winkel, unter welchem der Halbmesser des Planeten vom Centrum der Erde aus erscheinen würde, wenn der Planet sich in einer Entfernung von der Erde befände, die gleich der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ist. Im Falle einer Sternbedeckung werden sich π', r' und H auf den Stern beziehen, und daher $\pi' = 0$; $r' = \infty$; $H = 0$; $m = 0$; $f = 0$; $a = \alpha'$; $d = \delta'$ und $(s - \zeta) tg f = k = 0{,}2725$.

Bei den Durchgängen der unteren Planeten vor der Sonnenscheibe stellen r und r' die Entfernungen des Planeten und der Sonne von der Erde dar, ebenso ausgedrückt, wie man es gewöhnlich in den Tafeln findet; α, δ und π beziehen sich alsdann auf den Planeten; bezeichnet man durch h den Winkelhalbmesser des Planeten, wie er von der Erde aus erscheinen würde, wenn der Planet sich in einer Entfernung von der Erde

befände, die gleich der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ist, so hat man nach den Formeln in § 165, S. 517, wenn man anstatt r den Werth $\frac{r}{\sin \pi'}$ setzt:

$$m = \frac{r}{r}; \quad \sin f = \frac{\sin H \mp \sin h}{r' g}; \quad s\,tg f = z\,tg f \pm \frac{\sin h}{\sin H} \sec f.$$

167. Wir wollen hier nun zwei Aufgaben behandeln, 1) eine Finsterniss für irgend einen bestimmten Ort der Erde vorauszuberechnen, unter der Bedingung, dass man sich mit einer genäherten Berechnung genügt, und 2) die genaue Länge eines Orts und die Tafelfehler der Gestirne mit Hülfe einer beobachteten Finsterniss zu berechnen.

Wir wollen zuerst diese Aufgaben in Beziehung auf die Verfinsterungen der Sonne durch den Mond auflösen. Es sei daher φ die geographische Breite eines gegebenen Orts, φ' seine geocentrische, und ω die in Zeit ausgedrückte östliche Länge dieses Orts vom Meridiane der Ephemeride abgezählt.

Für den gegebenen Ort der Erde kann sich der Anfang und das Ende der Verfinsterung, für die Erde überhaupt, nur um wenige Stunden vor und nach der Mitte der Verfinsterung, wie man sie in der Ephemeride angegeben findet, ereignen; es sei daher T die mittlere Sonnenzeit, welche bei der Mitte solcher Verfinsterung unter dem Meridiane, für welche die Ephemeride berechnet ist, gezählt wurde, so wird $T + \omega$ die entsprechende mittlere Zeit dieser Mitte, unter dem Meridian des gegebenen Orts sein, und setzt man nun $T + \omega + t$ für die mittlere Zeit des Anfanges oder Endes der Finsterniss an dem gegebenen Orte, so können wir annehmen, dass t ein kleiner Zeitraum ist*).

*) Wenn man keine astronomische Ephemeride zur Hand hat, in welcher man immer die Finsternisse für einen gewissen Ort der Erde vorausberechnet findet, so kann man die Mond- und Sonnentafeln zu Hülfe nehmen, und für T alsdann, entweder die Zeit der wahren Conjunction, oder noch besser die Zeit der Mitte der Verfinsterung für die Erde überhaupt nehmen, welche sehr leicht zu berechnen ist.

Für die mittleren Zeiten $T - 1^h$ und $T + 1^h$ berechnet man sich alsdann aus der Ephemeride α, δ und π☾ für den Mond und α', δ' und r' für die Sonne; hierauf findet man nach § 165, Gleichung (6) und (10) die Winkel a und d, und nach § 165, Gleichung (12), die Werthe von z, y und x; ebenso die Werthe l, und $\log i$ nach § 164, Gleichung (4) und § 165, Gleichung (9) und (10), welche letzteren man aber nur für die Zeit T bestimmt; denn die Bedeutung dieser Grössen selbst zeigt, dass sie sich sehr langsam ändern, und folglich kann man für eine genäherte Berechnung diese Werthe während der ganzen Dauer der Verfinsterung als constant annehmen.

Nimmt man nun an, dass zu den mittleren Zeiten $T - 1^h$ und $T + 1^h$ unter dem Meridiane der Ephemeride die Coordinaten x, y und z die Werthe:

$$p - p', q - q', b - b' \quad . \quad . \quad . \quad \text{und} \quad . \quad . \quad . \quad p + p', q + q', b + b'$$

haben, so werden alle diese Werthe für alle Orte der Erde ganz allgemein sein; für den gegebenen Ort auf der Erde aber muss man noch die Sternzeiten berechnen, welche unter dem Meridiane dieses Orts in denjenigen Augenblicken gezählt wurden, als die mittleren Zeiten $T + 1^h$ und $T - 1^h$ unter dem Meridian der Ephemeride stattfanden; alsdann berechnet man sich nach Gleichung (8) § 165, die Werthe der Coordinaten ξ, η und ζ für den gegebenen Ort der Erde, und wir wollen nun diese Coordinaten für die eben erwähnten beiden Augenblicke gleich:

$$u - u', v - v', w - w' \quad . \quad . \quad . \quad \text{und} \quad . \quad . \quad . \quad u + u', v + v', w + w'$$

annehmen.

Darauf wird man genähert annehmen können, dass entweder zur Zeit der wahren Conjunction, oder zur Zeit T unter dem Meridiane der Ephemeride, die Werthe x, y, z, ξ, η und ζ den Werthen p, q, b, u, v und w gleich sein werden, ferner, dass die stündlichen Veränderungen dieser Werthe ausgedrückt sind durch p', q', b', u', v' und w', und endlich kann man über-

haupt genähert annehmen, dass im Laufe eines nicht zu grossen Zeitraumes die erwähnten Werthe sich der Zeit proportional ändern werden; mithin findet man für die mittlere Zeit $T+t$ unter dem Meridiane der Ephemeride genähert:

$$x = p+p't;\ y = q+q't;\ z = b+b't,$$
$$\xi = u+u't;\ \eta = v+v't;\ \zeta = w+w't$$

wo t in Stunden und Stundenbruch ausgedrückt ist.

Keine der Coordinaten ξ, η und ζ kann die Einheit übertreffen; ferner verändern sie sich im Laufe eines nicht zu grossen Zeitraumes sehr wenig, und der Werth $l-i\zeta$, welcher der Zeit T entspricht, bleibt beinahe für die Dauer einer Finsterniss constant; denn erstens verändert sich l sehr langsam, und zweitens wird ζ mit $i = tgf$ multiplicirt, wo f ein sehr kleiner Winkel ist. Auf diese Weise erhält man aus der Gleichung (5) § 164, wenn man anstatt x, y u. s. w. ihre Werthe setzt:

$$[p-u+(p'-u').t]^2+[q-v+(q'-v').t]^2 = (l-i\zeta)^2.$$

Zur Erleichterung der Rechnung kann man setzen:

$$\left.\begin{aligned} p-u &= m\sin M;\ p'-u' = n\sin N \\ q-v &= m\cos M;\ q'-v' = n\cos N \\ &\quad l-i\zeta = L \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (14),$$

wo m und n immer als positiv betrachtet werden*). Alsdann wird

$$(m\sin M+nt\sin N)^2+(m\cos M+nt\cos N)^2 = L^2$$

---

*) Wenn T die hinlänglich genäherte Zeit der Mitte der Verfinsterung für die Erde überhaupt unter dem Meridiane des Beobachters ist, so kann man für eine genäherte Berechnung u' und v' leicht auf folgende Weise bestimmen; man differenzirt ξ, η und ζ in Bezug auf die Zeit, und vernachlässigt dabei $\frac{\delta d}{\delta t}$, wegen der geringen Aenderung des Winkels d; alsdann erhält man:

oder

$$[m \cos(M-N) + nt]^2 = L^2 - m^2 \sin^2(M-N).$$

Es sei nun

$$\frac{m \sin(M-N)}{L} = \sin\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15);$$

so wird, wenn t eine reelle Grösse ist, oder die Verfinsterung wirklich stattfindet, der Winkel ψ immer möglich zu berechnen sein; substituirt man darauf $\sin\psi$ in den vorletzten Ausdruck, so erhält man nach Ausziehung der Quadratwurzel:

$$t = -\frac{m \cos(M-N)}{n} \pm \frac{L \cos\psi}{n}$$

wo die Einheit, auf die sich t bezieht, eine mittlere Stunde ist. Es ist offenbar, dass der grössere der beiden Werthe von t, in einem positiven Sinne verstanden, sich auf das Ende, der kleinere von beiden sich aber auf den Anfang der Finsterniss beziehen

---

$$\frac{\delta\xi}{\delta t} = \varrho \cos\varphi' \cos(\mu' - a + \omega) \frac{\delta(\mu' - a)}{\delta T}$$
$$\frac{\delta\eta}{\delta t} = \varrho \cos\varphi' \sin(\mu' - a + \omega) \sin d \frac{\delta(\mu' - a)}{\delta T},$$

wo μ' die Sternzeit unter dem Meridiane der Ephemeride, welche der mittleren Zeit T entspricht, bedeutet, und w die östliche Länge des gegebenen Orts in Bezug auf den Meridian der Ephemeride, ebenso wie μ' in Graden ausgedrückt, bezeichnet. Es entspricht daher $\mu' + \omega$ der Sternzeit in Graden ausgedrückt, am gegebenen Orte der Erde, $\frac{\delta(\mu' - a)}{\delta T}$ ist aber die Aenderung der Grösse $(\mu' - a)$ in der angenommenen Zeiteinheit, ebenso wie $\mu' - a$ selbst in Graden ausgedrückt; nimmt man für diese Zeiteinheit eine mittlere Stunde an, und bezeichnet durch $\Delta(\mu' - a)$, die Aenderung von $(\mu' - a)$ in Bogensecunden, in einer mittleren Stunde, so wird $\Delta(\mu' - a) . \sin 1'' = \frac{\delta(\mu' - a)}{\delta T}$ werden, und daher kann man ohne einen sehr grossen Fehler zu begehen annnehmen, dass

$$u' = \varrho . \cos\varphi' \cos(\mu' - a + \omega) \Delta(\mu' - a) \sin 1''$$
$$v' = \varrho . \cos\varphi' \sin(\mu' - a + \omega) \sin d \, \Delta(\mu' - a) \sin 1''.$$

Hat man diese Werthe von u' und v' gefunden, so genügt es, u und v nur einmal für die Epoche T zu berechnen.

muss, weil nämlich das Ende später als der Anfang erfolgt. Nimmt man auf diese Weise $\psi < 90°$ an, so findet man, dass für den gegebenen Ort der Erde nach der mittleren Zeit dieses Orts:

der Anfang der Verfinsterung um $T + \omega - \frac{m}{n} cos(M - N) - \frac{L}{n} cos \psi$,

das Ende „ „ „ $T + \omega - \frac{m}{n} cos(M - N) + \frac{L}{n} cos \psi$

stattfinden wird, wo L ohne merklichen Fehler mit l verwechselt werden darf.

Um nun bestimmen zu können, an welchem Punkte des scheinbaren Sonnenrandes der Anfang oder das Ende der Finsterniss stattfinden wird, muss man sich eine Linie denken, welche durch den Ort des Beobachters parallel mit der Linie der Conjunction des Centrums des Mondes und der Sonne fortläuft, und nach der positiven Seite der Coordinatenachse der z gerichtet ist; dann wird die Ebene, welche durch diese Linie, und der Achse der (y) (§ 164) parallel gelegt wird, mit der Ebene, welche durch jene Linie und den scheinbaren Ort des Gestirnes geht, einen Winkel bilden, dessen Tangente $= \frac{x - \zeta}{y - \eta}$ ist. Es sei dieser Winkel $= Q$; weil nun die Sonne sehr weit von der Erde und vom Monde entfernt ist, so wird die Linie der Conjunction, welche durch das Centrum des Mondes und der Sonne geht, zur Zeit einer Finsterniss einen sehr kleinen Winkel mit derjenigen Linie bilden, welche durch den Ort des Beobachters und der Sonne geht; man kann daher annehmen, dass der Winkel Q demjenigen Winkel gleich ist, welcher am Sonnencentrum durch den Declinationskreis der Sonne und denjenigen Kreis gebildet wird, welcher durch das Centrum der Sonne und den Punkt des scheinbaren Sonnenrandes geht, wo der Anfang oder das Ende der Finsterniss stattfindet; also wird

$$tg\, Q = \frac{x - \xi}{y - \eta} = \frac{p - u + (p' - u').t}{q - v + (q' - v').t}$$

$$= \frac{m \sin M + n \sin N . t}{m \cos M + n \cos N . t}$$
$$= \frac{m \sin M - m \sin N \cos (M-N) \mp L \cos \psi \sin N}{m \cos M - m \cos N \cos (M-N) \mp L \cos \psi \cos N}$$

Setzt man anstatt L seinen Werth aus (15), so erhält man nach einiger Reduction:

$$tg\, Q = \frac{\sin \psi [\sin M - \sin N \cos (M-N)] \mp \sin (M-N) \cos \psi \sin N}{\sin \psi [\cos M - \cos N \cos (M-N)] \mp \sin (M-N) \cos \psi \cos N}$$

Aber

$$\sin M - \sin N \cos (M-N) = + \cos N \sin (M-N)$$
$$\cos M - \cos N \cos (M-N) = - \sin N \sin (M-N)$$

folglich:

$$tg\, Q = \frac{+ \sin \psi \sin (M-N) \cos N \mp \cos \psi \sin (M-N) \sin N}{- \sin \psi \sin (M-N) \sin N \mp \cos \psi \sin (M-N) \cos N}$$

oder endlich:

$$tg\, Q = \frac{\sin (\psi \mp N)}{\mp \cos (\psi \mp N)} = \mp tg (\psi \mp N).$$

Hier bezieht sich das obere Zeichen (—) auf den Anfang der Verfinsterung, das untere (+) dagegen auf das Ende; also hat man:

für den Anfang $tg (180 - Q) = tg (\psi - N)$, oder $Q = 180^\circ + N - \psi$
für das Ende $tg\, Q = tg (\psi + N)$, oder $Q = N + \psi$

Der Winkel Q wird auf dem Rande der Sonne von seinem Nordpunkte selbst aus nach Osten von 0° bis 360° gezählt; denkt man sich nämlich durch das Centrum der Sonne einen Declinationskreis gelegt, so wird Q den Winkel bedeuten, welcher zwischen dem Durchschnittspunkte des Declinationskreises mit dem scheinbaren Sonnenrande und dem Punkte des Anfanges oder Endes der Finsterniss liegen wird; dieses sind daher die Punkte, auf welche der Beobachter seine ganze Aufmerksamkeit richten muss, um die Einrichtung nicht zu verfehlen. Wenn der Beobachter ein parallactisch aufgestelltes Fernrohr hat, so kann er sehr leicht den Nordpunkt des scheinbaren Sonnenrandes

bestimmen. In der Ocularröhre solcher Fernröhre sind zwei Fäden eingespannt, die rechtwinklig aufeinanderstehen; stellt man nun bei diesen die Ocularröhre so dass, wenn das Fernrohr fest aufgestellt ist, irgend ein Sonnenfleck bei der täglichen scheinbaren Bewegung der Sonne im Gesichtsfelde des Fernrohrs den einen Faden nicht verlässt, so wird offenbar der andere Faden an seinen Endpunkten den nördlichsten und südlichsten Punkt des scheinbaren Sonnenrandes bezeichnen. Wenn dagegen das Fernrohr nicht parallactisch aufgestellt ist, so muss man die Punkte, in denen der Anfang und das Ende der Finsterniss stattfinden wird, dadurch bestimmen, dass man ihren Abstand vom obersten Punkte des Sonnenrandes berechnet, wozu man aber erst den Winkel Θ suchen muss, welcher am Centrum der Sonne von ihrem Declinations- und ihrem Höhenkreise gebildet wird; es seien daher α' und δ' die durch die vorhergehende Berechnung schon bekannte gerade Aufsteigung und Abweichung der Sonne, ebenso μ die bekannte Sternzeit des Anfanges oder Endes der Finsterniss unter dem Meridiane des Beobachtungsorts, und φ die geographische Breite dieses Orts, so wird:

$$A = \cos\varphi \sin(\mu - \alpha');$$

$$B \sin D = \cos\varphi \cos(\mu - \alpha') \text{ und } B \cos D = \sin\varphi;$$

alsdann folgt:

$$tg\,\Theta = \frac{A}{B} \sec(\delta' + D),$$

und der Nordpunkt des scheinbaren Sonnenrandes wird rechts vom obersten Punkte dieses Randes liegen, wenn die Sonne sich im Westen des Meridians befindet, und links davon liegen, wenn sie im Osten ist.

Wenn man die Sonnenfinsternisse recht genau vorausberechnen will, so muss man mit Hülfe der, nach der ersten Berechnung genähert gefundenen Zeit t, wie wir es oben gezeigt haben, nochmals die genaueren Werthe von p, q, b, p', q', b', u, v, w, u', v', w', $l - i\zeta$ berechnen, und zwar für den Anfang

und das Ende der Finsterniss, und darauf sucht man die neue Correction t', welche man zu dem Ausdrucke $T+\omega+t$ zulegen muss, um die genaue Zeit der eben erwähnten Erscheinungen zu erhalten; diese Correction t' wird übrigens ebenso berechnet, wie wir es für die Zeit t gezeigt haben, und der Werth von t' übertrifft dann selten $0^h,05$ oder 3 Zeitminuten.

168. Nach der eben auseinandergesetzten Theorie wird es leicht sein, die Formeln für die Vorausberechnung der Sternbedeckungen durch den Mond abzuleiten, denn wegen der grossen Entfernung der Fixsterne kann man annehmen, dass die von ihnen ausgehenden Lichtstrahlen, welche die Ränder des Mondes berühren, die Oberfläche eines Cylinders bilden, und daher hat man bei Bedeckungen der Sterne durch den Mond; $f=0$, $a=A$, $d=D$, $l=k$, $i=0$, $g=\infty$ und die Horizontalparallaxe des Sternes $=0$; wobei A und D die gerade Aufsteigung des Sternes bedeuten. Folglich wird in diesem Falle:

$$k^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

und setzt man hierin statt ξ und η ihre Werthe aus der Gleichung (8), § 165, S. 517, und statt x und y ihre Werthe aus der Gleichung (7), § 165, S. 516, so erhält man unter der Bemerkung, dass $r=\frac{1}{\sin\pi}$:

$$k^2=\left\{\frac{\cos\delta\sin(\alpha-A)}{\sin\pi}-\varrho\cos\varphi'\sin(\mu-A)\right\}^2+$$
$$+\left\{\frac{\sin\delta\cos D-\cos\delta\sin D\cos(\alpha-A)}{\sin\pi}-\right.$$
$$\left.-\varrho(\sin\varphi'\cos D-\cos\varphi'\sin D\cos(\mu-A)\right\}^2$$

wo ϱ und φ' ganz dasselbe wie in § 165 bezeichnen; π ist dabei die Aequatorial-Horizontalparallaxe des Mondes.

Es sei T die mittlere Zeit unter dem Meridiane der Ephemeride, welche sich auf die Mitte der Finsterniss bezieht, und es sei $T+t$ die mittlere Zeit unter demselben Meridiane, welche dem Augenblicke des Eintritts oder Austritts des Sternes an

einem gegebenen Orte der Erde entspricht, dessen geographische Breite φ, seine geocentrische aber $= \varphi'$ und dessen Länge vom Meridiane der Ephemeride östlich ab gezählt $= \omega$ ist. Zählt man nun die östlichen Längen positiv, und die westlichen negativ, so muss $T + \omega + t$ die mittlere Zeit des Eintrittes oder Austrittes des Sternes am gegebenen Orte sein.

Bezeichnet man nun durch $\frac{1}{15}\mu'$ die Sternzeit, welche an dem gegebenen Orte der dortigen mittleren Zeit $T + \omega$ entspricht, so findet man, wenn man eine mittlere Zeitstunde als Einheit annimmt, dass die mittleren Zeiten $T + \omega + 1^h$ und $T + \omega + t^h$ entsprechen werden den Sternzeiten:

$$\tfrac{1}{15}\mu' + 1^h 0^m 9^s{,}86 \text{ und } \tfrac{1}{15}\mu' + t^h(1{,}00274) = \tfrac{1}{15}\mu;$$
$$\text{denn } 9^s{,}86 = 0^h{,}00274.$$

Drückt man diese Zeiten in Gradmass aus, so erhält man: $\mu' = \mu + t \,.\, 54147''{,}8$; und man hat dann überhaupt:

$$\sin(a+b) = \sin a + 2 \sin\frac{b}{2} \cos\left(a + \frac{b}{2}\right)$$
$$\cos(a+b) = \cos a - 2 \sin\frac{b}{2} \sin\left(a + \frac{b}{2}\right)$$

folglich:

$$\sin(\mu - A) = \sin(\mu' - A) + 2 \sin(t \,.\, 27073''{,}9) \cos(\mu' - A + t \,.\, 27073''{,}9)$$
$$\cos(\mu - A) = \cos(\mu' - A) - 2 \sin(t \,.\, 27073''{,}9) \sin(\mu' - A + t \,.\, 27073''{,}9)$$

Begnügt man sich nun bei der Vorausberechnung einer Sternbedeckung mit einer Genauigkeit von einer oder zwei Zeitminuten, welches immer genügend sein wird, so kann man annehmen, dass $2 \sin(t \,.\, 27073''{,}9)$ beinahe

$= 2t \sin(27073''{,}9) = t \,.\, \lambda$ ist, wobei man
$\lambda = 2 \sin(27073''{,}9)$ setzt, und folglich wird dann $lg \lambda = 9{,}4192 - 10$.

Vernachlässigt man nun die Glieder, welche von t^2 abhängen, so folgt, dass:

$$\sin(\mu - A) = \sin(\mu' - A) + \lambda t \cos(\mu' - A)$$
$$\cos(\mu - A) = \cos(\mu' - A) - \lambda t \sin(\mu' - A).$$

Wenn t kleiner als eine Stunde, oder doch wenigstens nicht viel grösser ist, so wird diese Annahme keinen merklichen Fehler hervorbringen; ausserdem kann man zuerst noch statt der genauen Ausdrücke für x und y ihre genäherten Werthe $\frac{\alpha - A}{\pi} . \cos\delta$ und $\frac{\delta - D}{\pi}$ benutzen, und ferner die Veränderungen, welche $\cos\delta$ und π im Laufe der Zeit t erleiden, vernachlässigen. Wenn man nun durch $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ die stündlichen Bewegungen des Mondes in wahrer gerader Aufsteigung und wahrer Abweichung bezeichnet und α, δ und π für die Zeit T bestimmt, so erhält man für die Zeit $T + t$:

$$p = \frac{\alpha - A}{\pi} \cos\delta; \; p' = \frac{\Delta\alpha}{\pi} \cos\delta; \; q = \frac{\delta - D}{\pi} \text{ und } q' = \frac{\Delta\delta}{\pi}$$

$$x = p + p't; \; y = q + q't;$$

$$\xi = \varrho \cos\varphi' \sin(\mu' - A) + \varrho \cos\varphi' \cos(\mu' - A) . \lambda t = u + u't,$$

$$\eta = \varrho \sin\varphi' \cos D - \varrho \cos\varphi' \sin D \cos(\mu' - A)$$
$$+ \varrho \cos\varphi' \sin D \sin(\mu' - A) . \lambda t = v + v't.$$

Die Werthe q, p' und q' kann man im Berliner astronomischen Jahrbuche finden; $\mu' - A$ ist für Berlin der Stundenwinkel des Sternes, zur Zeit wenn in Berlin die mittlere Zeit T gezählt wird; für denselben Augenblick daher unter einem anderen Meridiane, dessen östliche Länge von Berlin $= \omega$ in Graden ausgedrückt ist, wird dieser Stundenwinkel $= \mu' - A + \omega$ werden, und setzen wir zur Abkürzung

$$h = \mu' - A, \; a = \varrho \cos\varphi' \sin(h + \omega), \; b = \varrho \cos\varphi' \cos(h + \omega),$$

so wird:

$$u = a, \; u' = b . \lambda;$$

$$v = \varrho \sin\varphi' \cos D - b \sin D; \; v' = a \lambda \sin D.$$

Zur Bestimmung von t aus der Gleichung (k) S. 527 können wir die früheren Vorschriften befolgen, und haben dann:

$$m \sin M = p - u, \; n \sin N = p' - u',$$
$$m \cos M = q - v, \; n \cos N = q' - v'.$$

Um aber mit dem Berliner Jahrbuche in Uebereinstimmung zu sein, werden wir annehmen müssen:

$$\frac{m}{k} sin(M-N) = cos\,\psi,$$

und dabei ψ stets kleiner als 180° voraussetzen; alsdann erhält man:

$$t = -\frac{m}{n} cos(M-N) \mp \frac{k}{n} sin\,\psi,$$

wo das obere Zeichen (—) dem Eintritte, das untere (+) dem Austritte angehört, und die Zeiteinheit, auf die sich t bezieht, eine mittlere Stunde ist; alsdann wird an dem gegebenen Orte der Erde der Anfang oder das Ende der Verfinsterung des Sternes stattfinden, wenn an diesem Orte die mittlere Zeit $T+\omega+t$ gezählt wird.

Bei den Sonnenfinsternissen haben wir angenommen, dass $\frac{m\,sin(M-N)}{k} = sin\,\psi$ ist, und hier haben wir $\frac{m}{k} sin(M-N) = cos\,\psi$ gesetzt; folglich, wenn wir in diesem Falle ebenfalls den Winkel Q auf dem scheinbaren Rande des Mondes von seinem nördlichsten Punkte aus bis zu demjenigen Punkte des Mondrandes zählen, an welchem der Eintritt oder Austritt des Sternes stattfindet, so erhält man:

für den Eintritt . . $Q = N+\psi-90°$,
für den Austritt . . $Q = N-\psi-90°$,

wo hier alsdann der Winkel Q auf dem Mondrande herum vom Nordpunkte nach links von 0° bis 360° gezählt wird; denn erstens muss man in dem früher gefundenen Ausdrucke für Q statt ψ den Werth $90°-\psi$ setzen, und zweitens muss man bedenken, dass dort Q sich auf den Rand des entfernteren Körpers oder der Sonne bezog; hier aber wird Q auf dem Rande des Mondes gezählt. Wenn nun aber die Verfinsterung an der östlichen Seite des entfernteren Körpers stattfindet, so wird sie zu derselben Zeit auf der westlichen Seite des näheren Körpers sich

ereignen, so dass alsdann der Winkel Q, welcher auf dem Rande des entfernteren Körpers gezählt wird, beinahe die Ergänzung des Winkels Q, der auf dem Rande des näheren Körpers gezählt wird, zu 360° ist.

Uebrigens kann man in diesem Falle genau so, wie in § 167, S. 524 leicht den Punkt des Mondrandes bestimmen, an welchem der Eintritt oder Austritt stattfindet, wenn man diesen Punkt auf den höchsten und untersten Punkt des Mondrandes beziehen, will.

Bessels Methode zur Berechnung der Länge eines Orts, und der Tafelfehler der Gestirne aus den Beobachtungen der Sonnenfinsternisse, der Stern- und Planetenbedeckungen.

169. Die Beobachtungen geben unmittelbar entweder die Sternzeit, oder die wahre Sonnenzeit für die verschiedenen Phasen der Verfinsterung an; die mittlere entsprechende Zeit aber lässt sich nur dann bestimmen, wenn die Länge des Orts ω bekannt ist; doch kann man beinahe immer voraussetzen, dass die vorläufig angenommene Länge des Beobachtungsorts hinreichend genau sein wird, um aus der bekannten Sternzeit oder wahren Sonnenzeit die mittlere Zeit ohne einen merklichen Fehler ableiten zu können; und desshalb wollen wir hier sowohl die Sternzeit, wie auch die mittlere Zeit der Beobachtung irgend einer Phase der Verfinsterung als gegeben betrachten, und ferner noch die geographische Breite des Beobachtungsorts als bekannt ansehen.

Die allgemeinen Zahlenelemente der gegebenen Finsterniss x, y, l, i, a und d muss man von Stunde zu Stunde für die

mittlere Zeit des ersten Meridians berechnen, unter welchem wir den Meridian der Tafeln oder der Ephemeride verstehen wollen; diese Zeiten muss man so wählen, dass der Verlauf der Finsterniss nahezu zwischen den angenommenen Zeiten zu liegen kommt.

Die Werthe i, a und d verändern sich langsam, und man kann sie daher zu der Beobachtungszeit als sehr genau bekannt annehmen; denn i ist ausserordentlich klein, aber a und d hängen vorzüglich vom Orte der Sonne ab, welchen die Tafeln ziemlich genau geben; wir müssen dieses um so mehr annehmen, da es aus den Beobachtungen von Finsternissen nicht möglich sein wird, die Fehler, welche sich in den eben erwähnten Werthen befinden, zu ermitteln. Dagegen wird man die Fehler, welche in den angenommenen Werthen von x, y und l enthalten sind, recht gut bestimmen können, und daher wollen wir anstatt x, y und l andere Werthe $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $l+\Delta l$ einführen, wo Δx, Δy und Δl die gesuchten Fehler in x, y und l bezeichnen. Bessel hat auch den Einfluss untersucht, welchen ein unbestimmter Fehler Δee des Quadrates der Excentricität ee des Erdmeridians auf die Berechnung der gesuchten Länge des Orts ω hervorbringt.

Wir wollen nun durch t die mittlere Sonnenzeit der Beobachtung, durch $t-\omega$ die entsprechende mittlere Zeit unter dem ersten Meridiane, und durch τ eine andere willkürlich angenommene mittlere Zeit, die nahe an $t-\omega$ ist, ebenfalls auf den ersten Meridian bezogen, bezeichnen. Nimmt man alsdann an, dass die Grössen x, y ... zur Zeit τ die Werthe x_0, y_0 ... u. s. w. erhalten, und dass x und y während der kleinen Zwischenzeit $t-\omega-\tau$ Aenderungen erfahren, welche der Zeit nahezu proportional sind, so kann man annehmen, dass zur Zeit $t-\omega$ diese Werthe von x und y nahezu gleich mit

$$x_0+x'(t-\omega-\tau)+\Delta x, \quad y_0+y'(t-\omega-\tau)+\Delta y \quad \text{u. s. w.}$$

sein werden, wo x' und y' die stündlichen Veränderungen in x und y bezeichnen, welche so berechnet worden sind, dass sie

die vorhergehenden Werthe von x und y ganz genau zur Zeit $t-\omega$ darstellen; man sieht ferner ein, dass die Werthe von x' und y' veränderlich sind, und daher muss man zur genauen Bestimmung von x' und y' die Werthe von x und y für einige Stunden vor und nach der Zeit τ berechnen, so dass man auf diese Weise erhält:

für $\tau-2^h$	$x = A_{\prime\prime}$	$x' = \frac{1}{2}(A_0 - A_{\prime\prime})$
„ $\tau-1^h$	$x = A_{\prime}$	$x' = (A_0 - A_{\prime})$
„ τ	$x = A_0$	$x' = \frac{1}{2}(A' - A_{\prime}) - \frac{1}{6}\Delta_3$
„ $\tau+1^h$	$x = A'$	$x' = (A' - A_0)$
„ $\tau+2^h$	$x = A''$	$x' = \frac{1}{2}(A'' - A_0)$

wo Δ_3 die aus der Zahlenreihe $A_{\prime\prime}$, $A_{\prime}$ u. s. w. abgeleitete dritte Differenz ist; alsdann kann man nach den Gesetzen der Interpolation den Werth von x', welcher irgend einer anderen gegebenen Zeit entspricht, die zwischen $\tau-2^h$ und $\tau+2^h$ eingeschlossen ist, leicht finden.

Der Werth $l-i\zeta$ ändert sich im Laufe der Zeit sehr wenig, so dass man ohne merklichen Fehler den Werth von $l-i\zeta$, welcher der Zeit der Beobachtung entspricht, mit dem wahren berechneten Werthe, den $l-i\zeta$ zur Zeit $t-\omega$ hat, verwechseln darf, wobei man statt der genauen Länge ω die vorläufig bekannte östliche Länge des Beobachtungsorts brauchen kann. Der Einfluss des Fehlers Δee auf $i\zeta$ ist verschwindend klein; drückt man daher nun x und y u. s. w. durch die ihnen entsprechenden Werthe aus, so erhält man . . . (A)

$$(l-i\zeta+\Delta l)^2 = \left\{x_0 + x'(t-\omega-\tau) + \Delta x - \xi - \frac{\delta\xi}{\delta ee}\cdot\Delta ee\right\}^2$$
$$+\left\{y_0 + y'(t-\omega-\tau) + \Delta y - \eta - \frac{\delta\eta}{\delta ee}\cdot\Delta ee\right\}^2 \quad . . . \quad (A).$$

Hieraus kann man $t-\omega-\tau$ durch nachfolgende Annäherungen herleiten; zuerst berechnet man m, M, n, N nach den Formeln:

$$m \sin M = x_\circ - \xi;\ n \sin N = x',\ \sin\psi = \frac{m}{l - i\zeta} \sin(M - N)$$
$$m \cos M = y_\circ - \eta;\ n \cos N = y' \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (B).$$

Vernachlässigt man alsdann vorläufig Δx, Δy, Δl, Δee, so findet man für das gesuchte ω die Gleichung:

$$t - \omega - \tau = -\frac{m}{n} \cos(M - N) - \left(\frac{l - i\zeta}{n}\right) \cos\psi \quad . \ . \ . \ . \quad (C).$$

Da nun hier ψ mit Hülfe des Sinus bestimmt wird, so bleibt es unentschieden, ob ψ spitz oder stumpf ist; jedoch wird in den meisten Fällen die gesuchte Länge des Orts oder ω vorläufig schon so genähert bekannt sein, dass man über die Grösse von ψ nicht im Zweifel sein kann, und es ist klar, dass man ψ so annehmen muss, dass die aus der Gleichung (C) hergeleitete Länge ω nur wenig verschieden von ihrem bekannten genäherten Werthe ausfällt. Sollte die berechnete Länge um mehrere Minuten von der angenommenen verschieden sein, so muss man nochmals die Werthe x', y', ξ, η, ζ u. s. w. berechnen und darauf einen genaueren Werth von ω bestimmen.

170. Wenn die verschiedenen Phasen der Verfinsterung an vielen verschiedenen Orten zugleich beobachtet werden, so kann man nicht nur die gesuchte geographische Länge (ω), sondern auch die Tafelfehler der Gestirne bestimmen. Hierzu wollen wir den Einfluss der Fehler Δx, Δy u. s. w. in der einfachsten Gestalt entwickeln. Setzt man in die Gleichung (A) die Winkel M und N und die Werthe m und n ein, so folgt sogleich:

$$(l - i\zeta + \Delta l)^2 = \left(m \sin M + n \sin N (t - \omega - \tau) + \Delta x - \frac{\partial \xi_i . \Delta ee}{\partial ee}\right)^2$$
$$+ \left(m \cos M + n \cos N (t - \omega - \tau) + \Delta y - \frac{\partial \eta . \Delta ee}{\partial ee}\right)^2$$

Es sei der Kürze wegen $u = t - \omega - \tau$; setzt man nun statt $l - i\zeta$ seinen Werth aus Gleichung (B), und ordnet die Glieder nach Potenzen von u, so wird:

$$\left(\frac{m.\sin(M-N)}{\sin\psi}+\varDelta l\right)^2 = m^2+2mn\cos(M-N)u+n^2u^2\cdot$$
$$+2\left(\varDelta x-\frac{\delta\xi}{\delta ee}\cdot\varDelta ee\right)(m\sin M+n\sin N.u)+\left(\varDelta x-\frac{\delta\xi}{\delta ee}\cdot\varDelta ee\right)^2$$
$$+2\left(\varDelta y-\frac{\delta\eta}{\delta ee}\cdot\varDelta ee\right)(m\cos M+n\cos N.u)+\left(\varDelta y-\frac{\delta\eta}{\delta ee}\cdot\varDelta ee\right)^2$$
$$=\left\{n.u+m\cos(M-N)+\left(\varDelta x-\frac{\delta\xi}{\delta ee}\cdot\varDelta ee\right)\sin N+\right.$$
$$\left.+\left(\varDelta y-\frac{\delta\eta}{\delta ee}\cdot\varDelta ee\right)\cos N\right\}^2$$
$$+\left\{m\sin(M-N)+\left(\varDelta x-\frac{\delta\xi}{\delta ee}\cdot\varDelta ee\right)\cos N-\right.$$
$$\left.-\left(\varDelta y-\frac{\delta\eta}{\delta ee}\right)\sin N\right\}^2$$

Setzt man nun zur Vereinfachung:

$$\lambda = +\varDelta x\sin N+\varDelta y\cos N-\left(\frac{\delta\xi}{\delta ee}\cdot\sin N+\frac{\delta\eta}{\delta ee}\cdot\cos N\right)\cdot\varDelta ee$$
$$\lambda' = -\varDelta x\cos N+\varDelta y\sin N+\left(\frac{\delta\xi}{\delta ee}\cdot\cos N-\frac{\delta\eta}{\delta ee}\cdot\sin N\right)\cdot\varDelta ee$$

und vernachlässigt die kleinen Grössen $\varDelta l^2$, λ^2 und λ'^2, so findet man, dass:

$$[n.u+m\cos(M-N)+\lambda]^2 = \left(\frac{m}{\sin\psi}\sin(M-N)+\varDelta l\right)^2-$$
$$-[m\sin(M-N)-\lambda']^2$$
$$=\frac{m^2\sin^2(M-N)\cos^2\psi}{\sin^2\psi}\left(1+\frac{2\varDelta l\sin\psi}{m\sin(M-N)\cos^2\psi}+\frac{2\lambda' tg^2\psi}{m\sin(M-N)}\right).$$

Zieht man aus diesem Ausdrucke auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, und vernachlässigt die Glieder, in welchen $\varDelta l$ und λ' in höheren Potenzen als die erste vorkommen, so findet man:

$$u = t-\omega-\tau = -\frac{m}{n}\cos(M-N)-\frac{\lambda}{n}\mp\left\{\left(\frac{l-i\zeta}{n}\right)\cos\psi+\right.$$
$$\left.+\frac{\varDelta l}{n}\sec\psi+\frac{\lambda'}{n}tg\,\psi\right\}$$

Von diesen beiden Zeichen muss man hier nur das obere (—), ähnlich wie in Gleichung (C) nehmen, und ψ in demjenigen

Quadranten wählen, für welchen die gefundene Länge ω nicht widersprechend mit der bekannten angenommenen herauskommt, oder nur wenige Minuten und Secunden von der letzteren abweicht. Auf diese Weise wird:

$$\omega = t - \tau + \frac{m}{n} \cos(M - N) + \left(\frac{l - i\zeta}{n}\right) \cos\psi + \frac{\lambda}{n} + \\ + \frac{\lambda'}{n} tg\psi + \frac{\Delta l}{n} \sec\psi \quad . \quad . \quad . \quad (D).$$

Hierbei wurde nun eine mittlere Stunde als Zeiteinheit angenommen; um also ω in Stunden, Minuten und Secunden zu erhalten, muss man auch t und τ auf dieselbe Weise ausdrücken, alle anderen Glieder aber mit 3600″ multipliciren.

Wir wollen jetzt die Werthe von λ und λ' weiter entwickeln; dazu haben wir:

$$x = x_0 + n \sin N . (t - \omega - \tau) \text{ und } y = y_0 + n \cos N . (t - \omega - \tau);$$

folglich:

$$x \sin N + y \cos N = x_0 \sin N + y_0 \cos N + n(t - \omega - \tau);$$
$$-x \cos N + y \sin N = -x_0 \cos N + y_0 \sin N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E).$$

Diese letzte Gleichung hängt nicht von der Zeit ab; setzt man jetzt: $-x_0 \cos N + y_0 \sin N = \sigma$, und nimmt man die Summe der Quadrate der beiden vorhergehenden Ausdrücke für x und y, so wird:

$$x^2 + y^2 = \sigma^2 + [x_0 \sin N + y_0 \cos N + n(t - \omega - \tau)]^2$$

Hieraus sieht man, dass das Minimum der Summe $x^2 + y^2$ gleich σ^2 ist; bezeichnen wir nun durch T die mittlere Zeit unter dem ersten Meridian, wenn die Summe $x^2 + y^2$ ein Minimum wird, so haben wir zur Bestimmung von T und σ die folgenden Gleichungen:

$$T = \tau - \frac{1}{n}(x_0 \sin N + y_0 \cos N)$$
$$\sigma = -x_0 \cos N + y_0 \sin N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F).$$

Setzt man darauf diese Werthe in die Gleichung (E) ein, so folgt:

$$x \sin N + y \cos N = n(t - \omega - T)$$
$$-x \cos N + y \sin N = \sigma \quad \ldots \ldots \quad (G).$$

Mit Hülfe dieser Werthe von T und σ kann man nun aus der Gleichung (D) die Tafelfehler ausdrücken. Es ist aber:

$$x = \frac{\cos\delta \sin(\alpha - a)}{\sin\pi}, \; y = \frac{\cos d \sin\delta - \sin d \cos\delta \cos(\alpha - a)}{\sin\pi},$$

und setzen wir der Kürze wegen:

$$x = \frac{X}{\sin\pi} \text{ und } y = \frac{Y}{\sin\pi},$$

so folgt aus der Differenzialrechnung:

$$\Delta x = \frac{\Delta X}{\sin\pi} - x \cdot \frac{\Delta\pi}{tg\,\pi}; \quad \Delta y = \frac{\Delta Y}{\sin\pi} - y \cdot \frac{\Delta\pi}{tg\,\pi};$$

und daher den Formeln (F) zufolge:

$$\Delta x \sin N + \Delta y \cos N = \frac{\Delta X . \sin N + \Delta Y . \cos N}{\sin\pi} - n(t - \omega - T)\frac{\Delta\pi}{tg\,\pi}$$
$$-\Delta x \cos N + \Delta y \sin N = \frac{-\Delta X . \cos N + \Delta Y \sin N}{\sin\pi} - \sigma \cdot \frac{\Delta\pi}{tg\,\pi}.$$

Aber:

$$\Delta X = \cos\delta \cos(\alpha - a)\Delta(\alpha - a) - \sin\delta \sin(\alpha - a)\Delta\delta$$
$$\Delta Y = \cos\delta \sin(\alpha - a) \sin d\, \Delta(\alpha - a) +$$
$$+ [\cos d \cos\delta + \sin d \sin\delta \cos(\alpha - a)]\Delta\delta$$
$$- [\sin d \sin\delta + \cos d \cos\delta \cos(\alpha - a)]\Delta d$$

Hier sind $\Delta(\alpha - a)$ und $\Delta(\delta - d)$ kleine Fehler, welche man während der ganzen Dauer der Finsterniss als constant ansehen und als die Tafelfehler zur Zeit der Conjunction betrachten kann; aber alsdann ist $\alpha = a$, und ebenso wird zur Zeit der Verfinsterung selbst δ immer sehr nahe an d sein, so dass man also in diesem Falle in den Gliedern die mit $\Delta\delta$ und Δd multiplicirt sind, $\cos(\delta - d) = 1$ annehmen kann, wodurch man erhält:

$$\Delta X = \cos\delta\, \Delta(\alpha - a) \text{ und } \Delta Y = \Delta(\delta - d).$$

Man kann ebenso in den kleinen Gliedern ohne merklichen Fehler annehmen, dass $sin\,\pi = tg\,\pi = \pi$ ist, und erhält auf diese Weise: . . . . (H)

$$\Delta x \sin N + \Delta y \cos N = + \sin N \cos \delta \cdot \frac{\Delta(\alpha - a)}{\pi}$$
$$+ \cos N \cdot \frac{\Delta(\delta - d)}{\pi} - nt - \omega - T\frac{\Delta\pi}{\pi}$$
$$-\Delta x \cos N + \Delta y \sin N = -\cos N \cos \delta \cdot \frac{\Delta(\alpha - a)}{\pi}$$
$$+ \sin N \cdot \frac{\Delta(\delta - d)}{\pi} - \sigma \cdot \frac{\Delta\pi}{\pi}.$$

Diese beiden Gleichungen enthalten den Theil der Ausdrücke λ und λ', welcher unabhängig von Δee ist; wir wollen daher jetzt die Glieder untersuchen, welche Δee in sich fassen. Aus der Differenziation der Ausdrücke für ξ und η folgt, dass:

$$\frac{\partial \xi}{\partial ee} = \sin(\mu - a) \cdot \frac{\partial(\varrho \cos \varphi')}{\partial ee}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial ee} = \cos d \cdot \frac{\partial(\varrho \sin \varphi')}{\partial ee} - \sin d \cos(\mu - a) \cdot \frac{\partial(\varrho \cos \varphi')}{\partial ee};$$

aber

$$\varrho \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

und

$$\varrho \sin \varphi' = \frac{\sin \varphi (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Setzt man darauf:

$$\beta = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

so folgt:

$$\frac{\partial(\varrho \cos \varphi')}{\partial ee} = \tfrac{1}{2}\beta^2 \varrho \cos \varphi; \quad \frac{\partial(\varrho \sin \varphi)}{\partial ee} = -\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\beta^2 \varrho \sin \varphi.$$

Nimmt man Rücksicht auf die Bedeutung von ξ und η, so erhält man:

$$\frac{\partial \xi}{\partial ee} = \tfrac{1}{2}\beta^2 . \xi; \quad \frac{\partial \eta}{\partial ee} = \tfrac{1}{2}\beta^2 . \eta - \beta \cos d;$$

$$-\sin N\frac{\partial\xi}{\partial ee}-\cos N\frac{\partial\eta}{\partial ee} = -\tfrac{1}{2}\beta^2(\xi\sin N+\eta\cos N)+\beta\cos d\cos N;$$
$$+\cos N\frac{\partial\xi}{\partial ee}-\sin N\frac{\partial\eta}{\partial ee} = +\tfrac{1}{2}\beta^2(\xi\cos N-\eta\sin N)+\beta\cos d\sin N.$$

Aber es ist:

$$\xi = x_0-(x_0-\xi) = x_0-m\sin M$$
$$\eta = y_0-(y_0-\eta) = y_0-m\cos M,$$

und in Folge der Gleichungen (F), (B) und (C) hat man:

$$\xi\sin N+\eta\cos N = n(\tau-T)-m\cos(M-N),$$
$$\xi\cos N-\eta\sin N = -\sigma-m\sin(M-N),$$
$$-m\cos(M-N) = n(t-\omega-\tau)+(l-i\zeta).\cos\psi,$$
$$+m\sin(M-N) = (l-i\zeta).\sin\psi;$$

folglich erhält man: . . . . (J)

$$-\sin N\frac{\partial\xi}{\partial ee}-\cos N\cdot\frac{\partial\eta}{\partial ee} = -\tfrac{1}{2}\beta^2[n(t-\omega-T)$$
$$+(l-i\zeta)\cos\psi]+\beta\cos d\cos N.$$
$$+\cos N\cdot\frac{\partial\xi}{\partial ee}-\sin N\cdot\frac{\partial\eta}{\partial ee} = -\tfrac{1}{2}\beta^2[\sigma+(l-i\zeta)\sin\psi]$$
$$+\beta\cos d\sin N.$$

Nun bleibt uns noch übrig die Bedeutung des Fehlers Δl zu entwickeln. Für die äusseren Berührungen überhaupt, und eben so für die inneren bei ringförmigen Finsternissen haben wir:

$$l = z\,tg f+k\sec f,$$

oder:

$$l\cos f = z\sin f+k = z\frac{\sin H+k\sin\pi\odot}{r'g}+k,$$

wo f ein spitzer Winkel ist; zur Zeit einer totalen Verfinsterung wird f ein stumpfer Winkel werden, und setzt man alsdann $180^\circ-f = f'$, so findet man:

$$l\cos f' = k-z\sin f = k+z\cdot\frac{k\sin\pi\odot-\sin H}{r'g}.$$

Bei der Berechnung der Fehler kann man annehmen, dass:

$$g = 1 - \frac{\sin \pi \odot}{\sin \pi} \text{ und } z = \frac{1}{\sin \pi},$$

wo π und $\pi\odot$ die Aequatorial-Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne sind.

Folglich wird:

$$l \cos f = \frac{r' k \sin \pi + \sin H}{r' \sin \pi - \sin \pi \odot}, \text{ oder beinahe } = k + \frac{H}{r' \pi};$$

$$l \cos f' = \frac{r' k \sin \pi - \sin H}{r' \sin \pi - \sin \pi \odot}, \text{ oder beinahe } = k - \frac{H}{r' \pi};$$

$$\Delta (l \cos f) = \Delta k + \frac{\Delta H}{r' \pi} - \frac{H}{r'} \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi \pi};$$

$$\Delta (l \cos f') = \Delta k - \frac{\Delta H}{r' \pi} + \frac{H}{r'} \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi \pi}.$$

Nun sind aber f und f' sehr kleine Winkel, man kann daher anstatt $\Delta l \cos f$ und $\Delta l \cos f'$ nahe Δl selbst annehmen, woraus dann folgt, dass:

$$\Delta l = \Delta k \pm \frac{\Delta H}{r' \pi} \mp \frac{H}{r' \pi} \cdot \frac{\Delta \pi}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K),$$

wo die oberen Zeichen sich auf den ersten, und die unteren sich auf den zweiten der obigen beiden erwähnten Fälle beziehen.

Setzt man nun der Kürze wegen:

$$\gamma = \frac{3600''}{n . \pi}; \; \beta = \frac{\varrho \sin \varphi'}{1 - ee} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}};$$

$$\Delta B = \gamma [+ \sin N \cos \delta . \Delta (\alpha - a) + \cos N . \Delta (\delta - d)]$$

$$\Delta C = \gamma [- \cos N \cos \delta . \Delta (\alpha - a) + \sin N . \Delta (\delta - d)]$$

und bestimmt darauf σ und T aus der Gleichung (F), so kann man anstatt der Werthe λ, λ' und Δl ihre Werthe, wie sie aus den Gleichungen (H), (J) und (K) folgen, in die Gleichung (D) einsetzen, wodurch man alsdann folgende Formel zur Bestimmung von ω in Zeitsecunden erhält: . . . . . . (L)

$$\omega = t - \tau + 3600'' \cdot \frac{m'}{n} \cos(M - N) + 3600'' \cdot \frac{(l - i\zeta)}{n} \cos\psi +$$

$$+ \Delta B + tg\psi \cdot \Delta C + \gamma \left(\pi \Delta k \pm \frac{\Delta H}{r'}\right) \cdot sec\psi -$$

$$- \gamma \left\{ n(t - \omega - T) + \sigma tg\psi \pm \frac{H}{r\pi} \cdot sec\psi \right\} \Delta\pi -$$

$$- \gamma \left\{ \tfrac{1}{2}\beta^2 [n(t - \omega - T) + \sigma tg\psi + (l - i\zeta)\cos\psi] - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta \cos d \cos(N - \psi)}{\cos\psi} \right\} \pi \cdot \Delta ee,$$

wo vorausgesetzt wird, dass die Beobachtungsmomente in mittlerer Zeit gegeben sind, und das obere Zeichen bei H und ΔH sich auf die äusseren Berührungen überhaupt, oder auf die inneren bei ringförmigen Finsternissen, dagegen das untere Zeichen sich nur auf die inneren Berührungen bei totalen Finsternissen bezieht.

171. Ganz ähnliche Formeln kann man nun für die Berechnung jeder anderen Art von Verfinsterung aufstellen, indem man die nöthigen Veränderungen vornimmt, welche in den verschiedenen Fällen stattfinden, und die wir schon ausführlich auseinandergesetzt haben in § 166, S. 519.

Man findet ein sehr ausführliches Rechnungsbeispiel im zweiten Bande der Astronomischen Untersuchungen von Bessel und in der Abhandlung von Olufsen über die Sonnenfinsterniss am 7. Juli 1842. (Astronomische Nachrichten, Nr. 518 und 519.)

Vorausberechnung einer Sonnenfinsterniss für einen gegebenen Ort und Berechnung der geographischen Länge aus der Beobachtung einer Sonnenfinsterniss nach P. A. Hansen.

Hansens Formeln für die Berechnung der Sonnenfinsternisse für einen gegebenen Ort.

172. Hansen hat eine vollständige Theorie der Finsternisse in den Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. IV gegeben; wir wollen hier die Grundzüge dieser Theorie und zuerst ihre Anwendung auf die Vorausberechnung einer Sonnenfinsterniss für einen gegebenen Ort auseinandersetzen. Es wird dabei vorausgesetzt, dass der Mond sich nahezu in geocentrischer Conjunction mit der Sonne befindet.

Man kann die Lage verschiedener Punkte in Bezug auf drei rechtwinklige Coordinatenachsen bestimmen, deren Anfangspunkt in dem Mittelpunkt T der Erde liegt (Taf. V, Fig. 7 und 8). Die Achse TZ der positiven Ordinate Z wird parallel der geraden Linie angenommen, welche den Mittelpunkt L des Mondes mit dem Mittelpunkte S der Sonne verbindet. In der senkrecht zu TZ liegenden Ebene YTX nehmen wir die Achse TY im Durchschnitte dieser Ebene mit der Ebene, welche durch die Achse TZ und durch den Nordpol des Aequators geht, vorausgesetzt, dass die Seite der positiven Ordinaten Y nach Norden gerichtet ist. Die Achse TX befindet sich in der Ebene des Aequators und wir nehmen die positiven Ordinaten X auf der Seite an, auf welcher die Rectascensionen wachsen, also östlich von der positiven Seite der Achse TY.

Denken wir um den Mittelpunkt der Erde eine Kugel von unbestimmtem Halbmesser, so wird die Oberfläche dieser Kugel von den positiven Coordinatenachsen in drei Punkten geschnitten, die wir mit den Buchstaben Z, Y und X bezeichnen wollen (Taf. VI, Fig. 11). Die gerade Linie, welche durch T und L geht, über L hinaus verlängert, bis sie in M die Kugelfläche schneidet,

giebt in M den geocentrischen Ort des Mondmittelpunktes; nennen wir die Entfernung des Mittelpunktes des Mondes von dem der Erde r, so sind

$$Z = r\cos(MZ),\ Y = r\cos(MY),\ X = r\cos(MX)$$

die geocentrischen Coordinaten des Mittelpunktes des Mondes, wenn MZ, MY und MX die Bögen grössten Kreises bedeuten, welche M mit Z, mit Y und mit X verbinden.

Es seien a' und d' die selenocentrische (vom Monde gesehene) Rectascension und Declination der Sonne; da die Achse TZ parallel ist der durch die Mittelpunkte des Mondes und der Sonne gezogenen geraden Linie in der Richtung vom Monde zur Sonne, so entspricht auf der Kugeloberfläche

der Punkt Z der Rectasc. a' und der Decl. d',
der Punkt Y der Rectasc. a' und der Decl. $90°+d'$,
der Punkt X der Rectasc. $90°+a'$ und der Decl. 0.

Sind α und δ die geocentrische Rectascension und Declination des Mittelpunktes des Mondes, so sind die Rectascension und Declination des Punktes M auch α und δ. Es sei P der Ort des Nordpols des Erdäquators auf der Kugeloberfläche; wird M mit P, mit Z, mit Y und mit X durch die Bögen des grössten Kreises verbunden, so bilden sich die sphärischen Dreiecke, die zur Berechnung von $\cos(MZ)$, $\cos(MY)$, $\cos(MX)$ dienen können.

In dem Dreieck ZPM sind die Seiten $ZP = 90°-d'$, $MP = 90°-\delta$ und der Winkel $ZPM = \alpha-a'$; in dem Dreieck YPM sind die Seiten $YP = d'$, $MP = 90°-\delta$ und der Winkel $YPM = 180°-(\alpha-a')$; endlich in dem Dreieck XPM sind die Seiten $XP = 90°$, $PM = 90°-\delta$ und der Winkel $XPM = 90°-(\alpha-a')$. Rechnet man $\cos(ZP)$, $\cos(YP)$, $\cos(XP)$ aus den Dreiecken ZPM, YPM, XPM und substituirt sie in den Ausdrücken von Z, Y, X, so sind

$$Z = r[\sin\delta \sin d' + \cos\delta \cos d' \cos(a - a')] \quad . \quad . \quad (1)$$
$$Y = r[\sin\delta \cos d' - \cos\delta \sin d' \cos(a - a')],$$
$$X = r \cos\delta \sin(a - a')$$

die Coordinaten des Mondes.

Auf dieselbe Weise werden auch die Coordinaten z, y, x des gegebenen Beobachtungsorts ausgedrückt; es sei φ' die geocentrische Breite dieses Orts und $\frac{1}{15}\omega$ die Sternzeit der Beobachtung; φ' bezeichnet zugleich die Declination und ω die Rectascension des geocentrischen Zeniths des gegebenen Orts; nennen wir die Entfernung dieses Orts vom Mittelpunkt der Erde ϱ, so sind:

$$z = \varrho[\sin\varphi' \sin d' + \cos\varphi' \cos d' \cos(a' - \omega)] \quad . \quad . \quad (2)$$
$$y = \varrho[\sin\varphi' \cos d' - \cos\varphi' \sin d' \cos(a' - \omega)]$$
$$x = \varrho \cos d' \sin(a' - \omega)$$

die Coordinaten des Beobachtungsorts.

Legen wir nun durch den Beobachtungsort drei neue Coordinatenachsen, welche respective parallel den oben erwähnten Achsen sind, so werden die auf den Beobachtungsort bezogenen Coordinaten Z', Y', X' des Mittelpunktes des Mondes durch die Gleichungen

$$Z' = Z - z, \; Y' = Y - y, \; X' = X - x \quad . \quad . \quad (3)$$

gegeben.

Wenn der Beobachter eine äussere oder innere Berührung der Ränder des Mondes und der Sonne sieht, so muss die Oberfläche des durch den Mond von der Sonne verursachten Halbschatten- oder Vollschattenkegels durch den Beobachtungsort gehen. Es seien s und s' die linearen Halbmesser des Mondes und der Sonne in derselben Einheit ausgedrückt wie r und ϱ; q die Entfernung der Spitze des Kegels vom Mittelpunkte des Mondes; ϱ' die Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes von einander und f der Erzeugungswinkel des Kegels;

vorausgesetzt, dass auch q und ϱ' durch dieselbe Einheit gemessen sind, hat man für den Fall des Halbschattens

$$s = q \sin f,\ s' = (\varrho' - q) \sin f,$$

und für den Fall des Vollschattens $s' = (\varrho' + q) \sin f$.

Die Lage der Spitze des Kegels und die Oeffnung des Winkels f sind im ersten und zweiten Falle einander entgegengesetzt. Man hat also:

$$\sin f = \frac{s \pm s'}{\varrho'},$$

wo das obere Zeichen für äussere und das untere für innere Berührungen gilt. Ferner hat man

$$q = \frac{s}{\sin f};$$

also ist die Entfernung der Spitze des Kegels von der Ebene $X'Y'$, welche durch den Beobachtungsort senkrecht zur Achse des Kegels geht

$$Z' + q = Z' + \frac{s}{\sin f}.$$

Nennen wir den Halbmesser des Kreises, den der Kegel in dieser Ebene ausschneidet, u, so ist

$$u = (Z' + q) \operatorname{tg} f = \left(Z' + \frac{s}{\sin f}\right) \operatorname{tg} f = (Z' \sin f + s) \sec f.$$

Für alle äusseren Berührungen, d. h. für den Anfang und das Ende einer Sonnenfinsterniss überhaupt ist u immer positiv; für die inneren Berührungen des Mondes und der Sonne kann aber u sowohl positiv, als auch negativ werden. Nämlich u bleibt positiv, wenn die Spitze des Vollschattenkegels weiter vom Monde entfernt ist als die Ebene $X'Y'$, und wird negativ, wenn diese Spitze dem Monde näher ist als die Ebene $X'Y'$; denn die Entfernung dieser Spitze vom Mittelpunkte des Mondes ist $q = \frac{s}{\sin f}$, und für den Vollschatten bleibt f negativ. Folglich wird u positiv oder negativ, je nachdem $\frac{s}{\sin f}$ grösser oder kleiner

ist als Z'. Der erste Fall bedingt die totale und der zweite die ringförmige Sonnenfinsterniss; man hat demnach u positiv bei totalen und negativ bei ringförmigen Sonnenfinsternissen.

Es sei Θ der Winkel, welchen der Halbmesser u in der Ebene $X'Y'$ mit der positiven Achse der Y' macht; man hat dann

$$X' = u \sin \Theta, \quad Y' = u \cos \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Es sei ferner u° der Halbmesser des Kreises, welchen der Halbschatten- oder Vollschattenkegel in der Ebene ausschneidet, welche durch den Mittelpunkt der Erde senkrecht zur Achse Z geht; man findet auf dieselbe Weise, wie oben für u gezeigt wurde:

$$u^\circ = (Z \sin f + s) \sec f.$$

Substituiren wir in den Gleichungen (4) für Z', Y' und X' ihre Ausdrücke nach den Gleichungen (1), (2) und (3), so entstehen folgende strenge Gleichungen der Theorie der Sonnenfinsternisse:

$$\begin{aligned} u &= u^\circ - \varrho [\sin \varphi' \sin d' + \cos \varphi' \cos d' \cos(\omega - a') \operatorname{tg} f \\ u \sin \Theta &= r \cos \delta \sin(\alpha - a') - \varrho \cos \varphi' \sin(\omega - a') \\ u \cos \Theta &= r [\sin \delta \cos d' - \cos \delta \sin d' \cos(\alpha - a')] \\ &\quad - \varrho [\sin \varphi' \cos d' - \cos \varphi' \sin d' \cos(\omega - a')] \quad . \quad . \quad (5). \end{aligned}$$

Um die Erscheinung einer nach ihrer Grösse gegebenen Phase zu berechnen, ist es nur nöthig, im Ausdrucke für $\sin f$ statt s' den entsprechenden Werth zu substituiren; unter Annahme der gebräuchlichen Eintheilung des Sonnendurchmessers in zwölf Zolle, erhält man für die Phase von i Zollen:

$$\sin f = \frac{\left(s + (1 - \frac{i}{6}\right) s'}{\varrho'} = \frac{s + s'}{\varrho'} - \frac{i}{6} \cdot \frac{s'}{\varrho'}.$$

Für die äusseren Berührungen ist $i = 0$, und für die inneren ist $i = 12$; nennt man den Werth von f für äussere Berührungen f_1 und für innere Berührungen f_2, so wird

$$sin f_1 = \frac{s+s'}{\varrho'},\quad sin f_2 = \frac{s-s'}{\varrho'}.$$

In der Nähe der Conjunction ändert sich ϱ' so langsam, dass man für f_1 und für f_2 denselben Werth von ϱ' annehmen darf; man hat alsdann

$$sin f_1 - sin f_2 = \frac{2s'}{\varrho'},$$

$$sin f = sin f_1 - (sin f_1 - sin f_2)\frac{i}{12}.$$

Man kann dieselbe Beziehung auf $u°$ ausdehnen; da $sec f$ sich sehr wenig von Eins unterscheidet, so ist auch sehr genähert

$$u° = u_1° - (u_1° - u_2)\frac{i}{12}.$$

Wir haben noch a', d' und ϱ' zu bestimmen. Es seien α', δ' und r' respective die geocentrische Rectascension, Declination und die Entfernung des Mittelpunktes der Sonne vom Mittelpunkte der Erde. Eine Construction ähnlich der, welche uns (§ 15, S. 28) gedient hat, die scheinbare Position des Gestirns aus der wahren oder geocentrischen Position zu berechnen, kann hier angewandt werden, um die selenocentrische Position der Sonne aus der geocentrischen zu bekommen; man braucht nur den Ort des Beobachters in den Mittelpunkt des Mondes zu verlegen. Man findet hier:

$$\varrho' \cos d' \sin(a' - \alpha') = -r \cos\delta \sin(\alpha - \alpha'),$$
$$\varrho' \cos d' \cos(a' - \alpha') = r' \cos\delta' - r \cos\delta \cos(\alpha - \alpha'),$$
$$\varrho' \sin d' = r' \sin\delta' - r \sin\delta,$$
$$\varrho'^2 = r'^2 - 2rr'[\sin\delta \sin\delta' + \cos\delta \cos\delta' \cos(\alpha - \alpha')] + r^2.$$

Nun ist r nahe 385mal kleiner als r', und während der Sonnenfinsternisse wird $\alpha - \alpha'$ und $\delta - \delta'$ kleiner als 1°36′; es ergeben sich daher folgende Näherungsformeln, bei deren Benutzung der Fehler 0″,14 nicht übersteigen kann:

$\varrho' = r' - r$. (6)

$a' - \alpha'$ und $d' - \delta'$ sind immer kleiner als 16″.

Die Grundformeln gelten nicht blos für Sonnenfinsternisse, sondern auch für die Vorübergänge der unteren Planeten vor der Sonne, für die Bedeckungen der Planeten und der Sterne durch den Mond. Für die Sternbedeckungen gestalten sich die Gleichungen einfacher, indem dann $f = 0$ und $u = s$ wird, also u constant bleibt.

Die Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z lässt sich auf dieselbe Art machen, wie im vorigen Aufsatz über die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse erwähnt ist. Als Einheit der linearen Grössen nahm Hansen den Halbmesser des Erdäquators; bezeichnen wir die Aequatorial-Horizontalparallaxe des Mondes und der Sonne mit π und π', so ist in diesem Fall, wenn die kleinen Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden:

$$r = \frac{1}{\sin \pi}, \quad r' = \frac{1}{\sin \pi'}; \quad \varrho' = \frac{\sin \pi - \sin \pi'}{\sin \pi \sin \pi'}$$

oder sehr nahezu

$$\varrho' = \frac{\sin(\pi - \pi')}{\sin \pi \sin \pi'};$$

$$X = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - a')}{\sin \pi},$$

$$Y = \frac{\sin(\delta - d')}{\sin \pi}, \quad Z = \frac{\cos(\delta - d')}{\sin \pi} \text{ nahezu } = \frac{1}{\sin \pi}.$$

Wenn Π' die mittlere Horizontalparallaxe der Sonne bedeutet, so ist

$$a' = \alpha' - \frac{\sin \pi'}{\sin \pi}(\alpha - \alpha'), \quad d' = \delta' - \frac{\sin \pi'}{\sin \pi}(\delta - \delta'), \quad \sin \pi' = \frac{\sin \Pi'}{R'},$$

wo R' den Radius-Vector der Erde bezeichnet, in Theilen der mittleren Entfernung der Erde von der Sonne ausgedrückt. Da $a' - \alpha'$ und $\delta - d'$ 16″ nicht übersteigen, so ist

$$\sin(a-a') = \sin(a-\alpha'+\alpha'-a') =$$
$$= \sin(a-\alpha') + \cos(a-\alpha')\cdot\frac{\sin\pi'}{\sin\pi}\cdot\sin(a-a')$$
$$= \sin(a-\alpha')\left(1+\frac{\sin\pi'}{\sin\pi}\right) = \frac{\sin(a-\alpha')}{1-\frac{\sin\pi'}{\sin\pi}}$$
$$= \frac{\sin(a-\alpha')\sin\pi}{\sin(\pi-\pi')},$$

$$\sin(\delta-d') = \frac{\sin(\delta-\delta')\sin\pi}{\sin(\pi-\pi')},$$
$$\varrho' = \frac{\sin(\pi-\pi')}{\sin\pi\,.\,\sin\pi'};$$

man hat also sehr genähert:

$$X = \frac{\cos\delta\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\pi-\pi')},\quad Y = \frac{\sin(\delta-\delta')}{\sin(\pi-\pi')},\quad Z = \frac{1}{\sin\pi}\ .\quad (7);$$
$$\sin f = (s\pm s')\frac{\sin\pi\,.\,\sin\pi'}{\sin(\pi-\pi')}.$$

Es sei H' der mittlere Halbmesser und Π' die mittlere Horizontalparallaxe der Sonne; dann erhält man:

$$s' = \frac{\sin H'}{\sin\Pi'};$$

wenn

$$K = s.\sin\Pi' + \left(1-\frac{i}{6}\right)\sin H',$$
$$g = \frac{\sin\pi}{\sin(\pi-\pi')} = 1+\frac{\sin\pi'}{\sin(\pi-\pi')},$$
$$w = Z.\sin f$$

gesetzt werden, so ist

$$w = \frac{s.\sin\Pi' + \left(1-\frac{i}{6}\right)\sin H'}{R'\sin(\pi-\pi')},$$
$$u^{\circ} = (s+w)\sec f,\ \text{nahezu}\ u^{\circ} = s+w\ .\ .\ (8).$$

In den neuen Mondtafeln ist $s = 0{,}272957$ angenommen; die Greenwicher Beobachtungen geben $H' = 16'\,1'',8$; nach Leverriers und Hansens theoretischen Untersuchungen und der Berechnung der Beobachtungen in der Opposition des Planeten Mars im Jahre 1862 ist $\Pi' = 8'',85$; es kommt demnach

für äussere Berührungen $\qquad$ für innere
$K = 0{,}0046667$ . . . . $K = 0{,}0046433$.

Es sei T_0 die in Stunden und Decimaltheilen der Stunde ausgedrückte und der Conjunction des Mondes mit der Sonne nahe, wahre Zeit des ersten Meridians, d. h. desjenigen, für welchen die angewandten Mond- und Sonnentafeln oder Ephemeriden gelten. Für eine Reihe der Zeiten:

$$\ldots\; T_0 - 2\,St,\; T_0 - 1\,St,\; T_0,\; T_0 + 1\,St,\; T_0 + 2\,St.\; \ldots$$

bestimmt man zuerst die geocentrischen Rectascensionen und Declinationen, die Halbmesser und die Parallaxen des Mondes und der Sonne, so wie $\log R'$; dann werden die diesen Zeiten entsprechenden Coordinaten

$$X_2,\; X_1,\; X_0,\; X_1,\; X_2,\; \ldots.$$
$$Y_2,\; Y_1,\; Y_0,\; Y_1,\; Y_2,\; \ldots.$$
$$Z_2,\; Z_1,\; Z_0,\; Z_1,\; Z_2,\; \ldots.$$

berechnet, und die diesen Zeiten zugehörigen Werthe von f und u_0 gefunden. Man kann alsdann für die an T_0 nahe Zeit T geltenden Coordinaten X und Y durch die Gleichungen

$$X = X_0 + p.(T - T_0),\; p = n \sin N \quad \ldots \quad (9)$$
$$Y = Y_0 + q(T - T_0),\; q = n \cos N$$

ausdrücken; p und q, N und n sind veränderliche Grössen, welche numerisch zu bestimmen sind. Man findet die den Zeiten

$$T_0 - 1\,St,\; T_0 - \tfrac{1}{2}\,St,\; T_0,\; T_0 + \tfrac{1}{2}\,St,\; T_0 + 1\,St$$

entsprechenden Werthe von p nach den Formeln

$$\frac{X_0 - X_{-2}}{2},\; \frac{X_0 - X_{-1}}{1},\; \frac{X_1' - X_{-1}}{2},\; \frac{X_1 - X_0}{1},\; \frac{X_2 - X}{2};$$

auf eine ähnliche Weise werden auch die entsprechenden Werthe von q berechnet; darauf sind N und n leicht zu bestimmen.

Es sei

$$T' = \frac{X_0}{p},\; U = Y_0 - q.T',$$

wo p und q der Zeit $\frac{1}{2}(T_0 + T)$ entsprechen. Man hat dann überhaupt

$$X = p(T - T_0 + T'),\ Y = U + q(T - T_0 + T')$$
$$p = n \sin N,\ q = n \cos N,$$

wo n die ständliche Bewegung der gemeinschaftlichen Projection der Mittelpunkte des Mondes und der Sonne auf die durch den Mittelpunkt der Erde gehende Ebene XY bezeichnet. N ist der Winkel zwischen der Richtung dieser Bewegung und der positiven Achse Y, oder des Declinationskreises des Punktes a', d'; N muss so genommen werden, dass n immer positiv wird.

Es sei

$$D^2 = X^2 + Y^2,$$

oder

$$D^2 = n^2(T - T_0 + T')^2 + 2\,Un \cos N(T - T_0 + T') + U^2.$$

Die Zeit T'', für welche D ein Minimum wird, findet man aus der Bedingung, dass $\frac{\delta D}{\delta T} = 0$ sein soll; bei der Differenziirung kann man D und T als die einzigen veränderlichen Grössen betrachten, da U, T', N und n sich so langsam ändern, dass ihre Veränderungen hier unwesentlich sind. Man hat dann

$$0 = n(T - T_0 + T') + \frac{U \cos N}{n},$$

wo T'' statt T eingesetzt werden muss. Nennen wir den Minimalwerth von D, γ, so kommt:

$$T'' - T_0 + T' = -\frac{U \cos N}{n},\ \gamma = U \sin N,$$

γ ist also der kleinste Abstand der gemeinschaftlichen Projection der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes von dem Mittelpunkte der Erde auf der Ebene YX.

Es sei $\mu = 15\,T''$, so dass μ die in Graden ausgedrückte wahre Zeit des ersten Meridians bedeutet, in welcher der kleinste Abstand γ stattfindet. Wir haben also

$$U = Y_\circ - n\cos N . T', \quad T' = \frac{X_\circ}{n\cos N};$$

substituiren wir diese Ausdrücke in die von γ und μ, so wird

$$\gamma = Y_\circ \sin N - X_\circ \cos N,$$

$$\mu = 15\, T_\circ - \frac{15}{n}(Y_\circ \cos N + X_\circ \cos N).$$

Aus den letzten zwei Gleichungen erhält man:

$$X_\circ = n\sin N . T_\circ - n\sin N \cdot \frac{n}{15} - \gamma\cos N,$$

$$Y_\circ = n\cos N . T_\circ - n\cos N \cdot \frac{n}{15} + \gamma\sin N.$$

Wenn λ die östliche geographische Länge des Beobachtungsorts, t den westlichen Stundenwinkel bedeuten und $\tau = 15\,T$ angenommen wird, so ist $\tau = t - \lambda$ und aus der Gleichung (9) bekommt man

$$X = -\gamma\cos N + \frac{n\sin N}{15}(\tau - \lambda - \mu),$$

$$Y = +\gamma\sin N + \frac{n\cos N}{15}(\tau - \lambda - \mu).$$

Ueberhaupt aber ist $X = u\sin\Theta$, $Y = u\cos\Theta$; substituiren wir $\varrho(1+g')$ statt ϱ, wo $\varrho g'$ die Vergrösserung von ϱ bezeichnet wegen des Einflusses der Strahlenbrechung, und setzen wir $t = \alpha' - \omega$, da t den westlichen Stundenwinkel der Sonne bedeutet, schreiben wir ferner der Kürze halber

$$a' - \alpha' = \varDelta\alpha',$$

so gehen die Grundgleichungen der Theorie der Sonnenfinsternisse in die folgenden über:

$$u = u^\circ - \varrho(1+g')\{\sin\varphi'\sin d' + \cos\varphi'\cos d'\cos(t+\varDelta\alpha')\}\, tg f,$$

$$u\sin\Theta = -\gamma\cos N + \left(\frac{t-\lambda-\mu}{15}\right) n . \sin N$$
$$- \varrho(1+g')\cos\varphi'\sin(t+\varDelta\alpha'),$$

$$u\cos\Theta = +\gamma\sin N + \left(\frac{t-\lambda-\mu}{15}\right) n . \cos N$$
$$- \varrho(1+g')\{\sin\varphi'\cos d' - \cos\varphi'\sin d'\cos(t+\varDelta\alpha')\} \;.\;.\; (10).$$

173. Die Anwendung dieser Gleichungen auf die Vorausberechnung der Sonnenfinsterniss für einen gegebenen Ort dient nur dazu, um den Beobachter auf die wahrzunehmenden Hauptmomente aufmerksam zu machen; die grösste Schärfe ist dabei nicht nöthig und man kann sowohl den Einfluss der Strahlenbrechung, als auch die kleinen Winkel $\varDelta\alpha$ und $\delta'-d'$ vernachlässigen, oder $a = \alpha'$ und $d' = \delta'$ annehmen.

Gegeben sind die Polhöhe und die Länge λ des Beobachtungsorts; damit lässt sich leicht die geocentrische Breite φ' und ϱ bestimmen.

Um die Ein- und Austrittsmomente bequemer zu finden, setzt man:

$$\begin{aligned} \sin g \sin G &= \sin\delta' \sin N \\ \sin g \cos G &= \cos N \\ \cos g &= \cos\delta' \sin N \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} \sin k \sin K &= \sin N \\ \sin k \cos K &= \sin\delta' \cos N \\ \cos k &= \cos\delta' \cos N, \end{aligned}$$

$$\xi = \varrho\cos\varphi',\ \eta = \varrho\sin\varphi',\ \psi = \Theta - N;$$

man hat dann:

$$\begin{aligned} u &= u^\circ - (\eta\sin\delta' + \xi\cos\delta'\cos t)\, tg f, \\ u\sin\psi &= -\gamma + \eta\cos g - \xi\sin g\sin(G+t), \\ u\cos\psi &= (t-\lambda-\mu)\cdot\frac{n}{15} - \eta\cos g + \xi\sin k\cos(K+t). \end{aligned}$$

Es sei τ eine unbestimmte, in Graden ausgedrückte wahre Zeit am Beobachtungsorte oder ein unbestimmter Stundenwinkel der Sonne; dann ist:

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin\tau + k'\cos\tfrac{1}{2}(\tau+t)\frac{t-\tau}{15};\quad k' = \frac{15\sin\frac{1}{2}(t-\tau)}{\frac{1}{2}(t-\tau)}, \\ \cos t &= \cos\tau - k'\sin\tfrac{1}{2}(\tau+t)\frac{t-\tau}{15}. \end{aligned}$$

Aehnliche Ausdrücke gelten auch für $\sin(G+t)$ und $\cos(K+t)$. Hansen hat eine Tafel der Werthe von $\log k'$ gegeben, von $t-\tau = 0$ bis $t-\tau = 48°$; diese Tafel befindet sich in § 182 dieses Buches. Wird

$$u_{,} = u^\circ - (\eta\sin\delta' + \xi\cos\delta'\cos\tau)\, tg f$$

gesetzt, so kommt

$$u = u_{,} + k'\xi tg f' \cos\delta' \sin\tfrac{1}{2}(t+\tau)\left(\frac{t-\tau}{15}\right)$$

$$u \sin\psi = -\gamma + \eta \cos g - \xi \sin g \sin(G+\tau)$$
$$-k'\xi \sin g \cos\left(G+\frac{t+\tau}{2}\right)\frac{(t-\tau)}{15}$$

$$u \cos\psi = (t-\lambda-\mu)\frac{n}{15} - \eta\cos k + \xi \sin k \cos(K+\tau)$$
$$-k'\xi \sin k \sin\left(K+\frac{t+\tau}{2}\right)\frac{(t-\tau)}{15}.$$

Wenn wir ferner

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin(G+\tau)$$
$$m \cos M = (\tau-\lambda-\mu)\frac{n}{15} - \eta \cos k + \xi \sin k \cos(k+\tau)$$
$$m' \sin M' = -k'\xi \sin g \cos\left(G+\frac{\tau+t}{2}\right)$$
$$m' \cos M' = n - k'\xi \sin k \sin\left(K+\frac{\tau+t}{2}\right)$$
$$M' - \psi = \chi'$$

setzen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\sin\chi' = \frac{m}{u}\sin(M+M')$$
$$t = \tau - 15\frac{m}{m'}\cos(M+M') + 15\frac{u}{m'}\cos\chi',$$

aus welchen die Ein- und Austrittszeiten t hervorgehen.

Man muss zuerst für τ einen beliebigen, innerhalb der Zeit der Sonnenfinsterniss fallenden Werth substituiren; hiermit geben die Gleichungen zwei Werthe von t, die als genäherte in Graden ausgedrückte, wahre Zeiten des Eintritts und des Austritts zu betrachten sind. In den zweiten und den folgenden Annäherungen kann man den anfänglich angenommenen Werth von τ beibehalten und durch die in jeder zunächst vorhergehenden Annäherung erhaltenen Werthe von t, die anzuwendenden Werthe von $\frac{1}{2}(\tau+t)$ und k' berechnen.

Der Einfachheit wegen sei

$$\tau = \lambda + \mu,$$

man hat dann

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \xi \sin g \sin (G + \tau)$$
$$m \cos M = -\eta \cos k + \xi \sin k \cos (K + \tau);$$

diese Grössen bleiben im Verlauf der ganzen Rechnung unverändert.

In der ersten Annäherung kann man nach folgenden Formeln rechnen:

$$m' \sin M' = -k^\circ \xi \sin g \cos (G + \tau)$$
$$m' \cos M' = n - k^\circ \xi \sin k \sin (K + \tau)$$
$$k^\circ = \frac{15}{57{,}296},\ \log k^\circ = 9{,}41797 - 10,$$
$$u_{,} = u^\circ - (\eta \sin \delta' + \xi \cos \delta' \cos \tau) \operatorname{tg} f,$$
$$\sin \chi' = \frac{m}{u_{,}} \sin (M + M')$$
$$t = \tau - 15 \frac{m}{m'} \cos (M + M') + 15 \frac{u_{,}}{m'} \cos \chi'.$$

Dem $\sin \chi'$ entspricht immer ein negativer und ein positiver Werth von $\cos \chi'$; die letzte Gleichung giebt also zwei Werthe von t, d. h. die genäherten Zeiten des Eintritts und des Austritts. In der zweiten Annäherung substituirt man zuerst den einen und darauf den andern von beiden eben gefundenen Werthen von t in die Gleichungen

$$m' \sin M' = -k' \xi \sin g \cos (G' + \tfrac{1}{2} t)$$
$$m' \cos M' = n - k' \xi \sin k \sin (K' + \tfrac{1}{2} t),$$
$$G' = G + \tfrac{1}{2}\tau,\ K' = K + \tfrac{1}{2}\tau,\ k' = \frac{15 \sin \frac{1}{2}(t - \tau)}{\frac{1}{2}(t - \tau)}$$
$$u = u_{,} + k' \xi \cos \delta' \operatorname{tg} f \sin \tfrac{1}{2} (t + \tau) \left(\frac{t - \lambda}{15}\right),$$

und rechnet

$$\sin \chi' = \frac{m}{u} \sin (M + M'),$$
$$t = \tau - 15 \frac{m}{m'} \cos (M + M') + 15 \frac{u}{m'} \cos \chi'.$$

Man erhält dadurch zwei neue Werthe von t, die viel genauer sind als die vorigen; meistens sind sie für den Zweck genau genug; sollte dies nicht der Fall sein, so muss man die Rechnung wiederholen.

Wenn man in der ersten Annäherung einen imaginären Werth von χ' findet, d. h. wenn numerisch $\cos\chi' > 1$ ist, so nimmt man in der zweiten Annäherung $\cos\chi' = 0$ an und bekommt einen einzigen Werth von t, mit welchem die zweite Annäherung auszuführen ist; falls aber χ' fortwährend imaginär bleibt, so kann die Sonnenfinsterniss an dem gegebenen Orte gar nicht stattfinden.

Die beiden Werthe von χ', welche man zugleich erhält, geben, nach der Gleichung

$$\Theta = N + M' - \chi',$$

zwei Werthe von Θ, welche die beiden Punkte des Sonnenrandes bestimmen, an welchen der Eintritt und der Austritt stattfinden; Θ wird vom Nordpunkte des Sonnenrandes gerechnet und wächst nach Osten. Für den Anfang und das Ende der Ringförmigkeit ist der Anfangspunkt von Θ am Südpunkte des Sonnenrandes und wächst in derselben Richtung, d. h. in diesem Fall nach Westen.

Zur Zeit der grössten Phase muss $\cos\chi' = 0$ sein, d. h. es ist dann $\chi' = 90°$ oder $\chi' = 270°$. Den numerischen Werth der grössten Phase bekommt man aus der Gleichung $u = \frac{m \sin(M+M')}{\sin\chi'}$, wenn man $\sin\chi' = \pm 1$ macht, die Maximalgrösse der Phase folgt dann aus der Gleichung $u = m \sin(M+M')$; ist $t_{,}$ der Stundenwinkel der Sonne während der Mitte der Finsterniss, so ist

$$t_{,} = \tau - 15\frac{m}{m'}\cos(M+M'),$$

wo m, m', M, M', für die Zeit $\frac{1}{15}t_{,}$ zu berechnen sind; da aber hier $\sin\chi' = \pm 1$ ist und in der letzten Annäherung

$t_{,} = \tau$, also auch $sin(M+M') = \pm 1$ ist, so ergiebt sich

$$u = m;$$

M und M' sind immer so zu bestimmen, dass m und m' positiv werden, und demzufolge müssen $sin(M+M')$ und $sin\chi'$ stets dasselbe Zeichen haben. Der nördliche Theil der Sonne ist verfinstert, wenn $\chi' = 90°$, also auch $M+M' = 90°$ wird, und der verfinsterte Theil der Sonne ist der südliche, wenn χ' und $M+M'$ gleich 270° werden.

Um die Grösse der Phase in Zollen auszudrücken, bemerken wir, dass überhaupt

$$u° = (s + Z sin f) sec f$$

ist; nun hat man aber nahezu $Z = \frac{1}{sin \pi}$ und $sec f = 1$; es kommt also

$$u° = s + \frac{sin f}{sin \pi};$$

oder:

$$sin f = (u° - s) sin \pi,$$

wo man unbedenklich u statt $u°$ setzen darf; man kann auch $sin f$ statt $tg f$ annehmen; dann bekommt man

$$u° = u + (\varrho sin \varphi' sin \delta' + \varrho cos \varphi' cos \delta' cos t)(u - s) sin \pi.$$

Bezeichnen wir den Werth von u für äussere Berührungen mit u_1 und den für innere Berührungen mit u_2, so ist überhaupt für die Phase von i Zollen

$$u = u_1 - (u_1 - u_2)\frac{i}{12}.$$

Hieraus ergiebt sich die Grösse der grössten Phase in Zollen

$$i = 12\left(\frac{u_1 - u}{u_1 - u_2}\right).$$

Bestimmung der geographischen Länge durch die Beobachtung einer Sonnenfinsterniss.

174. Um die geographische Länge zu ermitteln, beobachtet man gewöhnlich die Zeiten der Ränderberührungen des Mondes und der Sonne; zur Berechnung der Länge λ dienen die Grundgleichungen (10):

$$u = u^\circ - \varrho(1+g')\{\sin\varphi'\sin d' + \cos\varphi'\cos d'\cos(t+\varDelta\alpha')\}\, tg f$$

$$u\sin\Theta = -\gamma\cos N + \frac{(t-\lambda-\mu)}{15} n\sin N - \varrho(1+g')\cos\varphi'\sin(t+\varDelta\alpha')$$

$$u\cos\Theta = +\gamma\sin N + \frac{(t-\lambda-\mu)}{15} n\cos N - \varrho(1+g')\{\sin\varphi'\cos d' - \cos\varphi'\sin d'\cos(t+\varDelta\alpha')\}.$$

Die Hülfsgrössen γ, μ, n, N, $\varDelta\alpha'$ und d' müssen für die bekannte wahre Zeit $\frac{1}{15}t$ der Beobachtung möglichst genau berechnet werden; es ist dazu erforderlich die Länge λ annähernd zu kennen, was immer möglich ist, da die Hülfsgrössen sich so langsam ändern, dass ein kleiner Fehler in dem vorläufig angenommenen Werthe von λ ohne empfindlichen Einfluss sein wird. Hat man die Hülfsgrössen gefunden, dann lässt sich λ direct bestimmen.

Es sei

$$\gamma' = \frac{15\gamma}{n}\cot g N,\quad \Gamma = \frac{\gamma}{\sin N},\quad \xi = \varrho\cos\varphi',\quad \eta = \varrho\sin\varphi',$$

$$q\sin Q = (1+g')\,\xi\sin(t+\varDelta\alpha')$$

$$q\cos Q = \Gamma - (1+g')[\eta\cos d' - \xi\sin d'\cos(t+\varDelta\alpha')].$$

Nun ist

$$\gamma\cos N = \gamma'\cdot\frac{n}{15}\sin N$$

$$\gamma\sin N + \gamma'\frac{n}{15}\cos N = \gamma\sin N + \gamma\frac{\cos^2 N}{\sin N} = \frac{\gamma}{\sin N};$$

man bekommt also

$$u \sin \Theta = \left(\frac{t-\lambda-\mu-\gamma'}{15}\right) n \sin N - q \sin Q,$$
$$u \cos \Theta = \left(\frac{t-\lambda-\mu-\gamma'}{15}\right) n \cos N + q \cos Q.$$

Setzen wir

$$N - \Theta = \chi,$$

so folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$\sin \chi = \frac{q}{u} \sin(Q+N),$$
$$\lambda = t - \mu - \gamma' + 15 \cdot \frac{q}{n} \cos(Q+N) - 15 \frac{u}{n} \cos \chi,$$

und da

$$q \cos(Q+N) - u \cos \chi = q \cos(Q+N) - q \frac{\sin(Q+N)}{\sin \chi} \cos \chi$$
$$= -q \frac{\sin(Q+N-\chi)}{\sin \chi}$$

ist, so erhalten wir auch

$$\lambda = t - \mu - \gamma' - \frac{15}{n} \cdot q \frac{\sin(Q+N-\chi)}{\sin \chi}.$$

Jede an einem Orte angestellte Beobachtung einer Ränderberührung giebt einen Werth von λ, und wenn verschiedene Ränderberührungen an demselben Orte beobachtet wurden, so zieht man die Gewichte der einzelnen Beobachtungen in Betracht und bestimmt auf die bekannte Art den wahrscheinlichsten Werth. Wenn es erlaubt wäre, anzunehmen, dass die Epochen der angewandten Mond- und Sonnentafeln nur mit unbedeutenden Fehlern behaftet sind, so könnte der auf die beschriebene Art erhaltene Werth von λ die wirkliche Länge des Beobachtungsorts darstellen in Bezug auf den Meridian, für welchen die Tafeln gelten. Nimmt man aber an, dass die Epochen der Tafeln fehlerhaft sind, so giebt der Unterschied der beiden zu zwei Beobachtungsorten gehörigen Werthe von λ den Längenunterschied zwischen diesen Oertern unabhängig von dem Fehler der Epochen der Tafeln.

Da hier χ durch seinen Sinus bestimmt ist, so muss das Zeichen von $\cos\chi$ besonders erörtert werden. Wir haben oben bemerkt, dass während der Mitte der Finsterniss oder zur Zeit der grössten Phase $\chi' = 90°$ oder $\chi' = 270°$ wird. Aus den Gleichungen

$$\sin\chi' = \frac{m}{u}\sin(M + M'),$$

$$t = \lambda + \mu - 15\frac{m}{m'}\cos(M + M') + 15\cdot\frac{u}{m'}\cos\chi'$$

folgt: wenn u positiv ist, so muss $\cos\chi'$ für jede Phase der Finsterniss, welche der grössten Phase vorangeht, negativ sein, und für jede Phase, welche der grössten Phase nachfolgt, muss $\cos\chi$ positiv sein. Ist aber u negativ, so muss man die entgegengesetzten Zeichen von $\cos\chi'$ anwenden. Da man hat

$$\chi' = M' + N - \Theta,\ \chi = N - \Theta,$$

so ist

$$\chi' = M' + \chi;$$

für jeden Moment also, welcher der grössten Phase vorangeht, mit Rücksicht auf das Zeichen von $\sin\chi$, muss χ so angenommen werden, dass

$\cos(M' + \chi)$ negativ wird, wenn u positiv ist,
$\cos(M' + \chi)$ positiv wird, wenn u negativ.

Dagegen für jeden Moment, welcher der grössten Phase nachfolgt, muss

$\cos(M' + \chi)$ positiv sein, wenn u positiv ist,
$\cos(M' + \chi)$ negativ sein, wenn u negativ ist.

Die Fehler der neuen Mond- und Sonnentafeln sind so klein, dass der Einfluss derselben auf die Bestimmung von λ durch die Differenziation von $u\sin\Theta$ und $u\cos\Theta$ in Bezug auf $\alpha - \alpha'$, $\delta - \delta'$, π, π' und die Halbmesser des Mondes und der Sonne gefunden werden kann; die Fehler dieser Elemente können dabei als Differentiale der Elemente betrachtet werden.

Wir haben

$$n \sin N = \frac{X - X_0}{T - T_0}, \quad n \cos N = \frac{Y - Y_0}{T - T_0};$$

die Ordinaten X, X_0, Y, Y_0 sind dem $\sin(\pi - \pi')$ umgekehrt proportional und man kann

$$n \sin N = \frac{P'}{\sin(\pi - \pi')}; \quad n \cos N = \frac{Q'}{\sin(\pi - \pi')}$$

setzen, wo P' und Q' veränderliche, von $\pi - \pi'$ unabhängige Grössen bedeuten. Differenziiren wir $n \sin N$ und $n \cos N$ in Bezug auf π, und setzen $\cos(\pi - \pi') = 1$, so kommt

$$\frac{\delta n}{\delta \pi} = -\frac{n}{\sin(\pi - \pi')}; \quad \frac{\delta N}{\delta \pi} = 0.$$

Da gewöhnlich angenommen wird, dass alle Fehler der Tafeln während der Dauer einer Sonnenfinsterniss constant bleiben, so sind die eben ermittelten Ausdrücke von δn und δN als vollständige Differenziale von n und N zu betrachten, was übrigens daraus folgt, dass die Fehler in $\alpha - \alpha'$ und $\delta - \delta'$ dieselben Werthe im Verlaufe der Sonnenfinsterniss behalten und in den Unterschieden $X - X_0$ und $Y - Y_0$ die Wirkung dieser Fehler verschwindet.

Die Differenziirung der allgemeinen Ausdrücke von $u \sin \Theta$ und $u \cos \Theta$ giebt

$$\sin \Theta . \delta u + u \cos \Theta \delta \Theta = -\cos N . \delta \gamma - (\delta \lambda + \delta \mu) \frac{n \sin N}{k^\circ}$$
$$- \frac{(t - \lambda - \mu)}{15} n \frac{\sin N . \delta \pi}{\sin(\pi - \pi')},$$

$$\cos \Theta . \delta u - u \sin \Theta \delta \Theta = + \sin N . \delta \gamma - (\delta \lambda + \delta \mu) \frac{n}{k^\circ} \cos N$$
$$- \frac{(t - \lambda - \mu)}{15} n \frac{\cos N . \delta \pi}{\sin(\pi - \pi')},$$

$$k^\circ = 15.(3600'') \sin 1'' = \frac{15}{57{,}296}; \quad \log k^\circ = 9{,}41797 - 10.$$

Hieraus, durch die Elimination von Θ, erhält man

$$\delta \lambda = -\delta \mu + \frac{k^\circ \sin \chi}{n \cos \chi} \delta \gamma - \frac{(t - \lambda - \mu)}{15} \frac{k^\circ \delta \pi}{\sin(\pi - \pi')} - \frac{k^\circ . \delta u}{n \cos \chi}.$$

Wir haben aber

$$\gamma = Y_{\circ} \sin N - X_{\circ} \cos N$$

$$\mu = 15\, T_{\circ} - \frac{15}{n}(Y_{\circ} \cos N + X_{\circ} \sin N)$$

$$X_{\circ} = \frac{\cos\delta \sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\pi-\pi')},\ Y_{\circ} = \frac{\sin(\delta-\delta')}{\sin(\pi-\pi')},$$

wo $\alpha-\alpha'$, $\delta-\delta'$, $\pi-\pi'$ und δ der gegebenen Zeit $T_{\circ}$ gehören. Nehmen wir $\cos(\alpha-\alpha') = 1$, $\cos(\delta-\delta') = 1$, $\cos(\pi-\pi') = 1$ an, so ist

$$\delta X_{\circ} = \frac{\cos\delta \sin 1''.\delta(\alpha-\alpha')''}{\sin(\pi-\pi')} - X_{\circ} \frac{\sin 1''.\delta(\pi-\pi')''}{\sin(\pi-\pi')}$$

$$\delta Y_{\circ} = \frac{\sin 1'' \delta(\delta-\delta')''}{\sin(\pi-\pi')} - Y_{\circ} \frac{\sin 1''.\delta(\pi-\pi')}{\sin(\pi-\pi')};$$

$$\delta\gamma = \frac{\sin N \sin 1'' \delta(\delta-\delta')''}{\sin(\pi-\pi')} - \frac{\cos N \cos\delta \sin 1'' \delta(\alpha-\alpha')''}{\sin(\pi-\pi')} - \frac{\gamma \sin 1'' \delta(\pi-\pi')}{\sin(\pi-\pi')},$$

$$\delta\mu = -\frac{15}{n}(\cos N \delta Y_{\circ} + \sin N \delta X_{\circ}) + \frac{15\,\delta n}{n^2}(\cos N . Y_{\circ} + \sin N X_{\circ}),$$

da aber

$$\delta n = -\frac{n\,\delta(\pi-\pi')'' \sin 1''}{\sin(\pi-\pi')}$$

ist, so kommt

$$\delta\mu = -\frac{k^{\circ} \sin N . \cos\delta\, \delta(\alpha-\alpha')}{n \sin(\pi-\pi')} - \frac{k^{\circ} \cos N \delta(\delta-\delta')}{n \sin(\pi-\pi')},$$

$$k^{\circ} = 15(3600'') \sin 1'' = \frac{15}{57{,}296},\ \log k^{\circ} = 9{,}41797 - 10.$$

Wird $\cos f = 1$ gesetzt, so hat man

$$u = s + Z' \sin f;\ \sin f = \frac{s \pm s'}{\varrho'}.$$

Es ist hier sehr nahezu

$$\frac{Z'}{\varrho'} = \frac{\sin\pi'}{\sin(\pi-\pi')};$$

durch die Differenziirung erhält man

$$\delta u = \delta s + \sin f \delta Z' + Z' \sin 1''.\delta f;$$

das Glied $sin f . \mathfrak{d} Z'$ ist sehr klein im Vergleich mit den andern Gliedern und kann vernachlässigt werden; man hat dann

$$\mathfrak{d} u = \mathfrak{d} s + \frac{Z'}{\varrho'} (\mathfrak{d} s \pm \mathfrak{d} s'),$$

wo $\frac{Z'}{\varrho'} \mathfrak{d} s$ oder $\frac{sin\, \pi' . \mathfrak{d} s}{sin (\pi - \pi')}$ auch vernachlässigt werden kann. Nennen wir den Sonnenhalbmesser Δ', so ist

$$s' = \frac{sin\, \Delta'}{sin\, \pi'}; \; \frac{Z'}{\varrho'} . \mathfrak{d} s' = \frac{\mathfrak{d} \Delta' \, sin\, 1''}{sin (\pi - \pi')};$$

man findet daraus

$$\mathfrak{d} u = \mathfrak{d} s \pm \frac{\mathfrak{d} \Delta' \, sin\, 1''}{sin (\pi - \pi')},$$

und endlich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} \lambda = & \left(\frac{k^{\circ} sin\, N cos\, \delta}{n\, sin (\pi - \pi')} \mathfrak{d} (\alpha - \alpha') + \frac{k^{\circ} cos\, N \mathfrak{d} (\delta - \delta')}{n\, sin (\pi - \pi')} \right) \\ & + \left\{ - \frac{k^{\circ} cos\, N cos\, \delta}{n\, sin (\pi - \pi')} \mathfrak{d} (\alpha - \alpha') + \frac{k^{\circ} sin\, N \mathfrak{d} (\delta - \delta')}{n\, sin (\pi - \pi')} \right. \\ & \left. - \frac{k^{\circ} . \gamma \mathfrak{d} \pi}{n\, sin (\pi - \pi')} \right\} tg\, \chi - \frac{(t - \lambda - \mu)}{15} \frac{k^{\circ} \mathfrak{d} \pi}{sin (\pi - \pi')} \\ & - \frac{k^{\circ} sec \chi}{n} \mathfrak{d} s \mp \frac{k^{\circ} sec \chi}{n\, sin (\pi - \pi')} . \mathfrak{d} \Delta'. \end{aligned}$$

Wenn der Längenunterschied zweier Orte durch Beobachtung einer Sonnenfinsterniss bestimmt wird, so hat $\mathfrak{d} \mu$ gar keinen Einfluss auf das Resultat, weil $\mathfrak{d} \mu$ für jeden der beiden Werthe von λ dieselbe Grösse und dasselbe Zeichen hat und daher im Unterschiede der geographischen Längen verschwindet.

Die bequemste Methode, den Verlauf einer Sonnenfinsterniss auf der Erde annähernd zu berechnen.

175. Die Astronomen älterer Zeit haben sich bemüht, diese Aufgabe durch geometrische Constructionen zu lösen; die

beste Anweisung darüber hat Woodhouse im Anhange zum Nautical Almanac für 1836 bekannt gemacht. Aber schon Lagrange hat eine elegante analytische Auflösung gegeben (Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1782, Conn. des temps pour l'an 1817); erschöpfender und strenger wurde die Theorie der Finsternisse von Bessel (Astronomische Untersuchungen, 2. Bd.) und von Hansen (Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, IV) behandelt. Wenn man sich aber mit genäherten Resultaten, welche meistens für die Praxis genügend sind, zufrieden stellt, so kann die Methode empfohlen werden, welche zuerst in der Dissertation des Dr. Ursin „De eclipsi solare die 7 Sept. 1820 apparitura“ (Hafniae 1820) erläutert ist; die Grundzüge der Methode wurden von Gauss dem Verfasser mitgetheilt. In der ersten Ausgabe unserer praktischen Astronomie ist diese Methode, mit wenigen Modificationen, vorgetragen und mit nützlichen Zusätzen des Herrn Dr. Götze verbunden. In die Darstellung hat sich aber einiges Unrichtige eingeschlichen, was gewiss nicht dem grossen Geometer Gauss zuzuschreiben ist, sondern denjenigen, welche die Ideen von Gauss ungenau aufgefasst haben. Der um die Wissenschaft hoch verdiente Professor Dr. Zech hat das Unrichtige bemerkt und verbessert; dankbar haben wir in der jetzigen Ausgabe unseres Werkes die Abhandlung des Herrn Zech benutzt, welche unter dem Titel: „Astronomische Untersuchungen über die wichtigsten Finsternisse, welche von den Schriftstellern des classischen Alterthums erwähnt werden, Preisschrift von Prof. Dr. J. Zech“ in Leipzig 1853 erschienen ist und von der Sächsischen Jablonowskischen Gesellschaft prämiirt wurde.

Wir haben uns bemüht, fast alle Aufgaben annähernd zu lösen, die in der strengeren Theorie von Hansen vorkommen.

Allgemeine Grundlage der Methode.

176. Um verschiedene Phasen einer Sonnenfinsterniss auf der Erde überhaupt zu erforschen, muss man für eine Reihe gleichmässig wachsender und der Conjunction der Sonne mit dem Monde naher Zeitmomente die gegenseitige Lage der Mittelpunkte des Mondes L, der Sonne S, der Erde T und der Punkte auf der Erdoberfläche bestimmen, an welchen die Finsterniss gesehen werden kann. Am leichtesten gelangt man zu dieser Bestimmung, wenn die Lage der Sonne, des Mondes und verschiedener Punkte auf der Erde in Bezug auf eine Ebene ermittelt wird, welche senkrecht auf der Geraden ST steht und durch den Mittelpunkt des Mondes geht in einem Augenblick, der der Conjunctionszeit der Sonne und des Mondes in gerader Aufsteigung nahe ist. Eine solche Ebene werden wir die Projectionsebene nennen.

Es mögen also S, L und T (Taf. VI, Fig. 12) die Mittelpunkte der Sonne, des Mondes und der Erde in dem erwähnten Zeitmoment bezeichnen; es sei O der Ort des Beobachters auf der Oberfläche der Erde; N und K die Punkte, in welchen die Geraden ST und OS die Projectionsebene durchschneiden; dann ist N der geocentrische Ort und K der aus O gesehene Ort des Mittelpunktes der Sonne auf der Projectionsebene. In der Verlängerung des Erdradius TO befindet sich das geocentrische Zenith Z des Beobachters; der Winkel ZOS ist die scheinbare, ZTS die geocentrische Zenithdistanz der Sonne; der Winkel OST ist die sogenannte Höhenparallaxe der Sonne; ebenso ist der Winkel ZOL die scheinbare, ZTL die geocentrische Zenithdistanz und OLT die Höhenparallaxe des Mondes. Es sei der Winkel

$$ZTS = z', \; ZTL = z, \; OST = p', \; OLT = p.$$

Wenn π' und π die Aequatorial-Horizontalparallaxen der Sonne und des Mondes zu der erwähnten Zeit bezeichnen, und ρ das Verhältniss des Radius OT zum Radius des Erdäquators bedeutet, so ist

$$\varrho \sin \pi' = \frac{OT}{ST}, \quad \varrho \sin \pi = \frac{OT}{LT},$$

$$tg p' = \frac{\varrho \sin \pi' \sin z'}{1 - \varrho \sin \pi' \cos z'}, \quad tg p = \frac{\varrho \sin \pi \sin z}{1 - \varrho \sin \pi \cos z}.$$

Ist $\varDelta$ der geocentrische Winkelabstand der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes von einander, so ist der Winkel $LTS = \varDelta$, und das rechtwinklige Dreieck LTN giebt

$$LN = LT.\sin \varDelta, \quad NT = LT.\cos \varDelta.$$

Die Einheit der linearen Entfernungen ist hier willkürlich; zur Einfachheit der Formeln werden wir, dem Beispiel des Professor Zech folgend, $LT = 1$ setzen und

$$LN = \sin \varDelta, \quad NT = \cos \varDelta$$

schreiben. Man hat dann aus dem rechtwinkligen Dreieck KSN:

$$KN = SN.tg KSN = SN.tg p',$$

$$SN = ST - NT = \frac{\sin \pi}{\sin \pi'} - \cos \varDelta$$

$$KN = \frac{(\sin \pi - \cos \varDelta \sin \pi')}{1 - \varrho \sin \pi' \cos z'} \varrho \sin z'.$$

Setzen wir der Kürze halber

$$\Pi = \frac{\sin \pi - \cos \varDelta \sin \pi'}{1 - \varrho \sin \pi' \cos z'},$$

so ist

$$KN = \varrho \Pi \sin z'.$$

Wir werden die Lage verschiedener Punkte in Bezug auf drei rechtwinklige Coordinatenachsen bestimmen, deren Anfang im Punkte N liegt, wo die Gerade TS die Projectionsebene durchschneidet; die Achsen der Ordinaten y und x nehmen wir in der Projectionsebene an und setzen voraus, dass die positiven Ordinaten z von N nach S (Taf. VI, Fig. 12) gerichtet sind; die Achse der positiven Ordinaten y legen wir in die Durchschnittslinie NY der Projectionsebene mit der Ebene des Declinationskreises der Sonne nach Norden gerichtet, so dass die Rectascension der

Achse NY gleich der Rectascension α' der Sonne wird. Die Achse NX der Ordinaten x wird dann senkrecht auf dem Declinationskreise der Sonne stehen, oder parallel dem Erdäquator sein; die positive Seite der Achse der Ordinaten x nehmen wir in der Richtung an, welche der Rectascension $90°+\alpha'$ entspricht.

Es sei τ eine willkürlich gewählte, aber der Conjunction des Mondes und der Sonne in Rectascension nahe wahre Zeit des **ersten** Meridians (d. h. desjenigen, für welchen die Oerter des Mondes und der Sonne gegeben sind). Die für diese Zeit geltenden Ordinaten des Mittelpunktes des Mondes mögen x, y, z, die des Mittelpunktes der Sonne x', y', z', die des scheinbaren Orts K der Sonne ξ, η, ζ und die des Orts O des Beobachters auf der Erde X, Y, Z genannt werden. Man hat also

$$x = LN.\sin LNY,\ y = LN\cos LNY,\ z = 0,$$
$$x' = 0,\ y' = 0,\ z' = SN,$$
$$\xi = KN\sin KNY,\ \eta = KN\cos KNY,\ \zeta = 0.$$

Denken wir eine Gerade OH (Fig. 12), die durch O parallel der Geraden TS geht, so trifft sie die Projectionsebene im Punkte H, der in der Verlängerung der Linie KN sich befindet. Alsdann ist der Winkel $HOK = OST = p'$ und die Winkel, welche HK mit den Achsen der Coordinaten macht, sind respective gleich den Winkeln der Linie KN mit denselben Achsen. Nach der angenommenen linearen Einheit ist $OT = \varrho \sin \pi$; wenn wir das Perpendikel OG, aus O zu TS ziehen und bemerken, dass $OTG = ZTS = z'$ ist, so kommt

$$TG = \varrho \sin \pi \cos z',\ OG = \varrho \sin \pi \sin z',$$
$$Z = -(NT - TG) = -\cos \varDelta + \varrho \sin \pi \cos z'$$
$$X = \varrho \sin \pi . \sin KNY,\ Y = \varrho \sin \pi \cos KNY.$$

177. Wir bezeichnen durch α' und α die geocentrischen Rectascensionen, durch δ' und δ die geocentrischen Declinationen der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes zu irgend einer Zeit, die wenig von der Conjunctionszeit verschieden ist.

Wenn wir uns an der Himmelskugel ein sphärisches Dreieck vorstellen zwischen dem Nordpol des Aequators, dem geocentrischen Ort des Mittelpunktes der Sonne und dem geocentrischen Ort des Mittelpunktes des Mondes, so sind die Seiten des Dreiecks:

$$90^\circ - \delta', \quad 90^\circ - \delta \text{ und } \Delta.$$

Der Winkel, welcher der Seite Δ gegenüberliegt, ist $\alpha - \alpha'$; wir nennen den Winkel, welche der Seite $90^\circ - \delta$ gegenüberliegt, S; dann ist S dem Winkel LNY (Fig. 12) gleich, weil die Geraden LN und YN senkrecht zu SN sind; dabei befindet sich YN im Declinationskreise der Sonne und LN in der Ebene des Winkels LTN, welcher an der Himmelssphäre durch den Bogen Δ bestimmt wird. Aus der Betrachtung des erwähnten sphärischen Dreiecks erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin\Delta \sin S &= \cos\delta \sin(\alpha - \alpha') \\ \sin\Delta \cos S &= \sin\delta \cos\delta' - \cos\delta \sin\delta' \cos(\alpha - \alpha') \\ \cos\Delta &= \sin\delta \sin\delta' + \cos\delta \cos\delta' \cos(\alpha - \alpha'). \end{aligned}$$

Da S dem Winkel LNY gleich ist und ausserdem

$$LN = \sin\Delta,$$

so findet man

$$\begin{aligned} x &= \cos\delta \sin(\alpha - \alpha') \\ y &= \sin\delta \cos\delta' - \cos\delta \sin\delta' \cos(\alpha - \alpha') \\ &= \sin(\delta - \delta') + \cos\delta \sin\delta' . 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} (\alpha - \alpha'). \end{aligned}$$

Zur Zeit der Sonnenfinsternisse können $\alpha - \alpha'$ und $\delta - \delta'$ nicht $1^\circ 36'$ übersteigen, meistens sind sie kleiner; betrachtet man $\sin(\alpha - \alpha')$ und $\sin(\delta - \delta')$ als kleine Grössen erster Ordnung, so kann man in dem Gliede zweiter Ordnung $\frac{1}{2} \sin^2(\alpha - \alpha')$ statt $2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha - \alpha')$ setzen und

$$y = \sin(\delta - \delta') + \tfrac{1}{2} \frac{\sin\delta'}{\cos\delta} \cdot x^2$$

annehmen.

Es sei φ' die geocentrische Breite des Beobachtungsorts O und t der Stundenwinkel der Sonne; betrachten wir das sphärische Dreieck zwischen dem Nordpol des Aequators, dem geocentrischen Zenith des Beobachtungsorts und dem geocentrischen Ort des Mittelpunktes der Sonne, so sind

$$z', \quad 90^\circ - \varphi', \quad 90^\circ - \delta'$$

die Seiten dieses Dreiecks; die gegenüberliegenden Winkel sind:

t, v, Azimuth der Sonne;

v ist der sogenannte parallactische Winkel, welchen wir von dem nördlichen Theile des Declinationskreises der Sonne nach der Seite der zunehmenden Rectascensionen hin zählen werden. Aus diesem Dreieck finden wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos z' &= \sin\varphi' \sin\delta' + \cos\varphi' \cos\delta' \cos t \\ \sin z' \cos v &= \sin\varphi' \cos\delta' - \cos\varphi' \sin\delta' \cos t \\ \sin z' \sin v &= \cos\varphi' \sin t \\ \sin\varphi' &= \cos z' \sin\delta' + \sin z' \cos\delta' \cos v. \end{aligned}$$

Sowohl der Winkel KNY (Fig. 12) als auch der parallactische Winkel v bestimmen die Neigung der Ebene YNS des Declinationskreises der Sonne zur Ebene ZTS, die durch das geocentrische Zenith des Beobachters, durch den Mittelpunkt der Erde und durch den geocentrischen Ort der Sonne geht; also ist der Winkel $KNY = v$. Die Coordinaten ξ, η, X, Y, Z werden durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \xi &= \Pi\varrho \sin z' \sin v = \Pi\varrho \cos\varphi' \sin t, \\ \eta &= \Pi\varrho \sin z' \cos v = \Pi\varrho \sin\varphi' \cos\delta' - \Pi\varrho \cos\varphi' \sin\delta' \cos t \\ X &= \varrho \sin\pi \sin z' \sin v, \quad Y = \varrho \sin\pi \sin z' \cos v, \\ Z &= \varrho \sin\pi \cos z' - \cos\Delta; \end{aligned}$$

man hat also:

$$X = \xi \cdot \frac{\sin\pi}{\Pi}, \quad Y = \eta \cdot \frac{\sin\pi}{\Pi};$$

ohne merklichen Fehler können wir $\sin(\pi - \pi')$ statt Π annehmen.

178. Wenn die Polhöhe des Orts eine der gesuchten Grössen ist, so werden in den Grundformeln zwei von einander abhängige und unbekannte Grössen φ' und ϱ vorkommen; die Aufgabe lässt sich dann indirect auflösen, indem man zuerst die Erde als Kugel betrachtet. Diese Unbequemlichkeit kann nach Hansens Vorschlag vermieden werden, wenn man die sogenannte reducirte Breite $\varphi_,$ des Beobachtungsorts statt φ' einführt. Nennt man φ die Polhöhe des Orts, e die Excentricität und γ die Abplattung der Erde, so ist

$$\varrho \cos\varphi' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2\varphi}}, \quad \varrho \sin\varphi' = \frac{(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$
$$\varrho = 1-\tfrac{1}{2}e^2\sin^2\varphi \ldots, \quad 1-e^2 = (1-\gamma)^2.$$

Setzen wir also

$$\cos\varphi_, = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \quad \sin\varphi_, = \frac{(1-\gamma)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

so wird

$$\varrho\cos\varphi' = \cos\varphi_,, \quad \varrho\sin\varphi' = (1-\gamma)\sin\varphi_,, \quad tg\,\varphi_, = (1-\gamma)\,tg\,\varphi,$$
$$\varphi-\varphi_, = \frac{\frac{1}{2}\gamma}{1-\frac{1}{2}\gamma}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{\sin 1''} - \left(\frac{\frac{1}{2}\gamma}{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)^2\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2\sin 1''} + \ldots.$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\gamma}{1-\frac{1}{2}\gamma}\cdot\frac{\sin 2\varphi_,}{\sin 1''} + \left(\frac{\frac{1}{2}\gamma}{1-\frac{1}{2}\gamma}\right)^2\cdot\frac{\sin 4\varphi_,}{2\sin 1''} + \ldots.$$

Die neuesten Untersuchungen geben $\gamma = \frac{1}{294\frac{1}{4}}$; man hat also:

$$\varphi-\varphi_, = 350'',94\sin 2\varphi - 0'',29\sin 4\varphi;$$

damit sind folgende Tabellen berechnet:

φ	$\varphi-\varphi_,$	φ	φ	$\varphi-\varphi_,$	φ	φ	$\varphi-\varphi_,$	φ	φ	$\varphi-\varphi_,$	φ	φ	$\varphi-\varphi_,$	φ
0°	0',0	90°	10°	2',0	80°	20°	3',8	70°	30°	5',1	60°	40°	5',7	50°
2	0,4	88	12	2,3	78	22	4,1	68	32	5,3	58	42	5,8	48
4	0,8	86	14	2,7	76	24	4,4	66	34	5,4	56	44	5,8	46
6	1,2	84	16	3,1	74	26	4,6	64	36	5,5	54	45°	5',85	45°
8	1,6	82	18	3,5	72	28	4,8	62	38	5,6	52			
10°	2',0	80°	20°	3',8	70°	30°	5',1	60°	40°	5,7	50°			

Es ist nahezu $\varphi - \varphi' = 2(\varphi - \varphi_{,})$.

φ	$\log \varrho$	φ	$\log \varrho$	φ	$\log \varrho$	φ	$\log \varrho$	φ	$\log \varrho$
0°	0,00000	20°	9,99983−10	40°	9,99939−10	60°	9,99889−10	80°	9,99857
4	9,99999−10	24	9,99975	44	9,99928	64	9,99881	84	9,99854
8	9,99997	28	9,99967	48	9,99918	68	9,99873	88	9,99853
12	9,99994	32	9,99959	52	9,99908	72	9,99866	90	9,99852
16	9,99989	36	9,99949	56	9,99898	76	9,99861		
20°	9,99983	40°	9,99939	60°	9,99889	80	9,99857		

179. Am Beobachtungsorte O (Fig. 12) sind verschiedene Phasen der Finsterniss von den scheinbaren Abständen der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes von einander abhängig. Der Winkel LOK, welchen wir Δ' nennen werden, ist dieser scheinbare Abstand; er unterscheidet sich sowohl von dem geocentrischen Abstand $LTS = \Delta$, als auch von dem Winkel $LTK = \Delta''$, unter welchem die Linie LK aus dem Mittelpunkte T der Erde gesehen werden könnte. Es sei $KL = D$ und σ der Winkel der Linie KL mit der Geraden, die durch K parallel der positiven Seite NY der Achse der Ordinaten y gezogen wird; wenn wir den Winkel σ von NY bis KL in der Richtung nach der positiven Seite der Achse der Ordinaten x zählen, so kommt

$$D \sin\sigma = x - \xi, \quad D \cos\sigma = y - \eta.$$

Aus dem Dreiecke OLK (Fig. 12) erhalten wir

$$D = KL = \frac{LO.\sin LOK}{\sin LKO} = \frac{LO.\sin\Delta'}{\sin LKO}.$$

Eine gerade Linie, die durch K geht und parallel mit ST ist, muss senkrecht zu KL stehen; da aber die Richtung der Linie OS nur um die Höhenparallaxe p' der Sonne von der Richtung der Linie TS abweicht und p' nie 9″ übersteigt, so kann der Winkel LKO nur um wenige Secunden von 90° verschieden sein*); es ist daher erlaubt $\sin LKO = 1$ und

*) Man hat überhaupt

$$\cos LKO = \frac{X - x}{KO} \cdot \frac{(x - \xi)}{D} + \frac{Y - y}{KO} \cdot \frac{(y - \eta)}{D};$$

$$D = LO . \sin \varDelta'$$

annehmen.

Im Dreiecke LOT (Fig. 12) ist die Seite $LT = 1$, der Winkel OTL ist die geocentrische Zenithdistanz z und der Winkel OLT die Höhenparallaxe p des Mondes; die Seite OT ist $\varrho \sin \pi$. Da LT den Projectionen der Linien OT und OL gleich sein muss, so ist

$$1 = LT = OT . \cos z + LO . \cos p;$$
$$LO = \frac{1 - \varrho \sin \pi \cos z}{\cos p};$$

Im Dreiecke LKT ist der Winkel $LTK = \varDelta''$; wir haben also

$$\sin \varDelta'' = \frac{LK}{LT}, \sin LKT = D . \sin LKT,$$

oder

$$\sin \varDelta'' = \sin \varDelta' \left(\frac{1 - \varrho \sin \pi \cos z}{\cos p} \right) \sin LKT.$$

Nun ist p kleiner als 1°, und der Winkel LKT weicht von 90° weniger als um $p - p'$ ab*); vernachlässigt man die kleinen

die Projection von KO auf der Ebene xy ist $HK = KO . \sin p'$. Man bekommt also (§ 177):

$$X - x = KO . \sin p' . \sin v; \quad Y - y = KO \sin p' \cos v;$$
$$x - x' = D \sin \sigma, \quad y - y' = D . \cos \sigma;$$
$$\cos LKO = \sin p' \cos (\sigma - v).$$

*) Wir haben allgemein:

$$\cos LKT = \left(\frac{x - \xi}{KL} \right) \cdot \frac{\xi}{TK} + \left(\frac{y - \eta}{KL} \right) \frac{\eta}{TK};$$
$$TK^2 = KN^2 + NT^2 = \varrho^2 . \Pi^2 \sin^2 z' + \cos^2 \varDelta.$$

Setzen wir

$$tg\, \omega = \varrho \cdot \frac{\Pi . \sin z'}{\cos \varDelta},$$

so ist

$$TK = \cos \varDelta \sec \omega.$$

Nun ist aber $KL = D$ und

Grössen von der Ordnung des $sin^2 p$, so kann man $\frac{sin\,LKT}{cos\,p} = 1$ setzen und es ist dann

$$sin\,\Delta'' = sin\,\Delta'(1 - \varrho\, sin\,\pi\, cos\,z).$$

Da Δ' und Δ'' wenig von einander abweichen, und kleine Winkel bedeuten, so können wir auch

$$\Delta'' = \Delta'(1 - \varrho\, sin\,\pi\, cos\,z)$$

annehmen.

Wenn r und r' die geocentrischen, τ und τ' die vom Beobachter gesehenen scheinbaren Halbmesser des Mondes und der Sonne ausdrücken, so ist

$$\frac{sin\,\tau}{sin\,r} = \frac{sin(z+p)}{sin\,z} = \frac{cos\,p}{1 - \varrho\, sin\,\pi\, cos\,z}$$

$$\frac{sin\,\tau'}{sin\,r'} = \frac{cos\,p'}{1 - \varrho\, sin\,\pi'\, cos\,z'}.$$

Man hat also sehr nahezu:

$$\tau = \frac{r\, cos\,p}{1 - \varrho\, sin\,\pi\, cos\,z}; \quad \tau' = \frac{r'\, cos\,p'}{1 - \varrho\, sin\,\pi'\, cos\,z'}.$$

Da π' und p' kleiner sind als 9″, so wird $\tau' - r'$ nicht 0″,04 übersteigen und kann vernachlässigt werden. Zur Zeit der Sonnenfinsternisse ist z wenig von z' verschieden, und p meistens kleiner als 1°; will man τ nur bis auf 0″,2 genau haben, so lässt sich

---

$$\frac{x-\xi}{KL} = sin\,\sigma, \quad \frac{y-\eta}{KL} = cos\,\sigma; \quad \xi = \varrho\,\Pi\, sin\,z'\, sin\,v, \quad \eta = \varrho\,\Pi\, sin\,z'\, cos\,v;$$

wir finden also

$$cos\,LKT = \frac{\varrho\,\Pi\, sin\,z'\, cos(\sigma - v)\, cos\,\omega}{cos\,\Delta}.$$

Es ist nahezu:

$$\Pi = sin(\pi - \pi')$$

und

$$\frac{sin\,LKT}{cos\,p} = \frac{1}{cos[\varrho(\pi - \pi')\, sin\,z'\, sin(\sigma - v)]}.$$

$$\tau = \frac{r}{1 - \varrho \sin \pi \cos z'}; \quad \Delta'' = \Delta'(1 - \varrho \sin \pi \cos z'), \quad \tau' = r'$$

annehmen; alsdann verhält sich τ zu r wie Δ' zu Δ''.

Am Anfang und am Ende der partialen Sonnenfinsterniss, oder bei den äusseren Berührungen des Mondes mit der Sonne, hat man $\Delta' = \tau + \tau'$ und

$$\Delta'' = (\tau + \tau')(1 - \varrho \sin \pi \cos z') = r + r'(1 - \varrho \sin \pi \cos z').$$

Am Anfange und am Ende der totalen Sonnenfinsterniss, oder bei inneren Berührungen hat man

$$\Delta' = \tau - \tau' \text{ und}$$
$$\Delta'' = r - r'(1 - \varrho \sin z \cos z').$$

Am Anfange und am Ende der ringförmigen Finsterniss, also auch bei inneren Berührungen, bekommt man

$$\Delta' = \tau' - \tau, \quad \Delta'' = r'(1 - \varrho \sin \pi \cos z') - r.$$

Wenn wir den verfinsterten Theil des Sonnendurchmessers ε nennen und in Secunden ausdrücken, so ist $\varepsilon = \tau' + \tau - \Delta'$; will man die Eintheilung des Sonnendurchmessers in Zwölftel, Zolle genannt, haben, so ist $\varepsilon = 6 \frac{(\tau' + \tau - \Delta')}{\tau'}$ in Zollen. Setzen wir $m' = \frac{\Delta' - \tau'}{\tau'}$, so wird $\varepsilon = 6(1 - m')$ sein, so lange die Finsterniss nicht ringförmig ist.

Berechnung der Coordinaten.

180. Es seien x°, y° und x, y die Coordinaten des Mondes zu den wahren Zeiten T und τ des ersten Meridians (§ 176), vorausgesetzt, dass T und τ wenig von der Conjunctionszeit des Mondes und der Sonne in Rectascension abweichen. Am bequemsten werden x und y durch die Gleichungen

$$x = x^\circ + p(\tau - T), \quad y = y^\circ + q(\tau - T)$$

ausgedrückt. Setzen wir

$$x^\circ = p\,.\,T'; \; y^\circ = \varepsilon + q\,T'; \; p = n\sin N, \; q = n\cos N,$$

so erhalten wir

$$x = p(\tau - T + T') = n\sin N(\tau - T + T')$$
$$y = \varepsilon + q(\tau - T + T') = \varepsilon + n\cos N(\tau - T + T').$$

Wenn die relative geocentrische Bewegung des Mondes gegen die Sonne geradlinig und gleichförmig angenommen werden könnte, so müssten p und q die Veränderungen der Coordinaten x und y in einer Zeiteinheit bedeuten. $T - T'$ wäre dann die Zeit der geocentrischen Conjunction des Mondes und der Sonne in Rectascension; n die relative geocentrische Bewegung des Mondes gegen die Sonne auf der Projectionsebene während derselben Zeiteinheit; N der Winkel der Richtung dieser Bewegung mit der positiven Seite der Achse der Ordinaten y, und ε der Werth der Ordinate y zur Conjunctionszeit. Wegen der ungleichförmigen Bewegung des Mondes sind aber T', N, n, p, q und ε veränderliche Grössen, welche für verschiedene Zeiten numerisch zu bestimmen sind. Wir werden annehmen, dass τ, T, T' in Stunden und Decimaltheilen der Stunde ausgedrückt sind, so dass p, q, n die stündlichen Bewegungen bezeichnen; wir haben dann

$$p = \frac{x - x^\circ}{\tau - T}, \; q = \frac{y - y^\circ}{\tau - T}, \; T' = \frac{x^\circ}{p}, \; \varepsilon = y^\circ - q\,T',$$
$$tg\,N = \frac{p}{q}, \; n = \frac{p}{\sin N} = \frac{q}{\cos N},$$

wobei N so angenommen werden muss, dass n immer positiv herauskommt.

Statt τ nimmt man nach einander die Zeiten

$$T - 2^{St}, \; T - 1^{St}, \; T, \; T + 1^{St}, \; T + 2^{St}$$

und berechnet für jede dieser Zeiten die Werthe der Coordinaten x und y; alsdann werden die entsprechenden Werthe

von p, q, ε, N und n bestimmt; man kann dabei ohne merklichen Fehler annehmen, dass die Werthe von p, q, N und n zu den Zeiten

$$T - 1^{St},\ T - \tfrac{1}{2}^{St},\ T + \tfrac{1}{2}^{St},\ T + 1^{St}$$

gehören.

Bezeichnen wir die den Zeiten $T - 1^{St}$ und $T + 1^{St}$ entsprechenden Werthe von x und y mit x_{-1} und y_{-1}, x_{+1} und y_{+1}, so sind $\frac{x_{+1} - x_{-1}}{2}$ und $\frac{y_{+1} - y_{-1}}{2}$ sehr nahezu die Werthe von p und q zur Zeit T.

Die Coordinaten x und y des Mondes sind Functionen nur von der Zeit τ des ersten Meridians; aber die Coordinaten ξ und η des scheinbaren Orts K der Sonne (Fig. 12) auf der Projectionsebene sind Functionen sowohl von dieser Zeit τ, als auch von der geographischen Breite und Länge des Beobachtungsorts, welche zur Berechnung des Stundenwinkels t und des parallactischen Winkels v der Sonne nöthig sind. Hansen hat vorgeschlagen, ξ und η auf folgende Weise bequem auszudrücken.

Es seien t und t° die geocentrischen Stundenwinkel der Sonne am Beobachtungsorte zu den wahren Zeiten τ und τ° des ersten Meridians; man hat die identischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin t &= \sin t^\circ + \sin t - \sin t^\circ \\ &= \sin t^\circ + \cos\tfrac{1}{2}(t + t^\circ)\,\frac{\sin\frac{1}{2}(t - t^\circ)}{\frac{1}{2}(\tau - \tau^\circ)}\,(\tau - \tau^\circ), \\ \cos t &= \cos t^\circ + \cos t - \cos t^\circ \\ &= \cos t^\circ - \sin\tfrac{1}{2}(t + t^\circ)\,\frac{\sin\frac{1}{2}(t - t^\circ)}{\frac{1}{2}(\tau - \tau^\circ)}\,(\tau - \tau^\circ). \end{aligned}$$

Sind t und t° in Graden und $\tau - \tau^\circ$ in Stunden gegeben, so muss $\tau - \tau^\circ = \frac{t - t^\circ}{15}$ sein; setzen wir

$$k = \frac{15 \sin\frac{1}{2}(t - t^\circ)}{\frac{1}{2}(\tau - \tau^\circ)},$$

so ist

$$\sin t = \sin t^\circ + k\cos \tfrac{1}{2}(t+t^\circ)(\tau-\tau^\circ)$$
$$\cos t = \cos t^\circ - k\sin \tfrac{1}{2}(t+t^\circ)(\tau-\tau^\circ).$$

Man erhält also

$$\xi = \Pi\varrho \sin z' \sin v$$
$$= \Pi\varrho\cos\varphi' \sin t^\circ + k\Pi\varrho\cos\varphi'\cos\tfrac{1}{2}(t+t^\circ)(\tau-\tau^\circ)$$
$$\eta = \Pi\varrho\sin z'\cos v = \Pi\varrho\sin\varphi'\cos\delta' - \Pi\varrho\cos\varphi'\sin\delta'\cos t^\circ$$
$$+ k\Pi\varrho\cos\varphi'\sin\delta'\sin\tfrac{1}{2}(t+t^\circ)(\tau-\tau^\circ),$$

wo man $\cos\varphi$, und $(1-\gamma)\sin\varphi$, statt $\varrho\cos\varphi'$ und $\varrho\sin\varphi'$ schreiben kann; es ist hier $\gamma = \frac{1}{294{,}34}$; $1-\gamma = 0{,}99660$.

Wenn das Zeitintervall $\tau-\tau^\circ$ sehr klein wird, dann ist auch $t-t^\circ$ ein kleiner Winkel und man kann

$$\sin\tfrac{1}{2}(t-t^\circ) = 3{,}14159 \,.\, \tfrac{1}{2}\frac{(t-t^\circ)}{180^\circ} = \frac{1}{57{,}296}\cdot\tfrac{1}{2}(t-t^\circ)$$

annehmen; in diesem Fall verwandelt sich k in

$$k' = \frac{15}{57{,}296},\ \log k' = 9{,}41797-10.$$

Berücksichtigung der Strahlenbrechung.

181. Hansen hat zuerst gezeigt (Astronomische Nachrichten, Bd. XV, Nr. 347), dass die Strahlenbrechung nicht ohne Einfluss auf die Erscheinung einer Sonnenfinsterniss, Sternbedeckung u. s. w. ist.

Es sei T der Mittelpunkt der Erde als Kugel betrachtet; O der Beobachtungsort (Taf. VI, Fig. 13), Z das Zenith, BS der Lichtstrahl, welcher bei B in die irdische Atmosphäre eintritt und die Brechung in der Luft erleidet. In Folge der zunehmenden Dichtigkeiten der Luftschichten mit der Annäherung an die Oberfläche der Erde, beschreibt der Lichtstrahl beim Durchgange

durch die Atmosphäre die Curve BO; der Winkel, welchen die Tangenten am Anfange B und am Ende O dieser Curve mit einander bilden, ist die sogenannte astronomische Strahlenbrechung oder die Refraction. Es sei E der Punkt, in welchem die verticale Linie ZO des Beobachters durch die anfängliche Richtung EBS des Lichtstrahls BS geschnitten wird. Aus E erscheint die Sonnenfinsterniss ohne Einfluss der Strahlenbrechung zu derselben Zeit und in derselben Gestalt wie sie vom Beobachter in O gesehen werden kann. Um also die Wirkung der Strahlenbrechung auf eine Finsterniss zu berücksichtigen, braucht man nur das Auge des Beobachters aus O nach E zu versetzen, oder statt des Radius TO der Erde die Linie TE anzunehmen.

Nennt man die Dichtigkeit der Luft an der Oberfläche der Erde d, die brechende Kraft der Luft daselbst μd, die wahre Zenithdistanz z und die entsprechende astronomische Strahlenbrechung δz, so hat man nach der Theorie der Strahlenbrechung, (Fig. 13):

$$TB = OT \cdot \frac{\sin(z-\delta z)}{\sin EBT} \cdot \sqrt{1+\mu d}.$$

Es sei $OT = a =$ dem Halbmesser der Erde; im Dreiecke EBT ist der Winkel $TEB = 180° - z$ und man hat

$$TB . \sin EBT = TE . \sin z;$$

folglich findet man die Gleichung

$$TE = a \cdot \frac{\sin(z-\delta z)}{\sin z} \cdot \sqrt{1+\mu d}.$$

Für die Barometerhöhe 29,6 englische Zoll und die Temperatur der Luft + 7,4 Grad Réaumur ist $\mu d = 0{,}00058$; setzen wir $z - \delta z = 90°$, $\delta z = 34',9$, so ist $TE = a . 1{,}00023$. Schreiben wir überhaupt

$$TE = a(1+g'),$$

so ist

$$1 + g = \frac{\sin(z - \delta z)}{\sin z} \cdot \sqrt{1 + \mu d}.$$

Wenn $\mu d = 0{,}00058$ und die mittlere astronomische Strahlenbrechung δz nach Bessel angenommen wird, so lässt sich leicht folgende Tafel der Logarithmen von $(1+g')$ berechnen:

Wahre Z. D.	$\log(1+g')$	Wahre Z. D.	$\log(1+g')$	Wahre Z. D.	$\log(1+g')$
90°	0,00011	87°	0,00003	84°	0,00001
89	0,00006	86	0,00002	83	0,00001
88	0,00004	85	0,00001	82	0,00001
87°	0,00003	84°	0,00001	80°	0,00000.

Die Strahlenbrechung wird in Betracht gezogen, wenn in den Grundgleichungen allenthalben $\varrho(1+g)$ statt ϱ eingesetzt wird; ist die Höhe grösser als 10°, so ist der Einfluss der Refraction unmerklich; schon bei der Höhe von 5° ist er unbedeutend.

Wenn die Phase der Finsterniss an einem solchen Orte zu berechnen ist, wo der Mittelpunkt der Sonne im Horizonte gesehen werden soll, oder wo die scheinbare Höhe der Sonne gleich Null ist, so muss die wahre Distanz $\mathfrak{z}'$ vom scheinbaren Zenith $90° + 34'\,51'' - 9''$ oder $90°\,34',7$ betragen, wo $34'\,51''$ die mittlere Refraction und $9''$ die Sonnenparallaxe im Horizont bedeuten. Unsere Gleichungen enthalten aber die wahre Distanz z' der Sonne vom geocentrischen Zenith; es ist also nöthig, den Werth von z' zu bestimmen, welcher dem $\mathfrak{z}' = 90°\,34',7$ entspricht.

Es seien φ die geographische, φ' die geocentrische Breite des gesuchten Orts, e die Excentricität der Erdmeridiane, A das Azimuth der aufgehenden oder untergehenden Sonne von der Seite des Meridians gezählt, wo sich der sichtbare Weltpol befindet; man hat dann nahezu in Bogenminuten:

$$z' - \mathfrak{z}' = (\varphi - \varphi') \cos A, \quad \varphi - \varphi' = e^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\sin 1'},$$

$$\cos A = \frac{\sin \delta'}{\cos \varphi},$$

wo δ' die Declination der Sonne bedeutet; da φ' wenig von φ abweicht, so ist

$$z' = \mathfrak{z}' + e^2 \frac{\sin \varphi' \sin \delta'}{\sin 1'} = 90^\circ 34',7 + e^2 \frac{\sin \varphi' \sin \delta'}{\sin 1'}.$$

Nach den neuesten Bestimmungen ist $e^2 = 0{,}006795$ und man erhält

$$z' = 90^\circ 34',7 + 23',3 \sin \varphi' \sin \delta',$$
$$\cos z' = -\sin(34',7 + 23',3 \sin \varphi' \sin \delta')$$
$$\sin z' = +\cos(34',7 + 23',3 \sin \varphi' \sin \delta');$$

wird $\sin z' = 1$ gesetzt, so kann der Fehler dieser Annahme nicht 0,0001 übersteigen.

Vorausberechnung der Sonnenfinsterniss an einem gegebenen Orte.

182. Die Aufgabe verlangt die Bestimmung der Zeit des Anfanges und des Endes der Finsterniss, der Grösse derselben und der Punkte am Umfange der Sonnenscheibe, in welchen die Sonne vom Monde berührt wird. Zur Bequemlichkeit der Rechnung werden wir x, y, ξ, η, Π und D in Secunden ausdrücken; wir erhalten dann*)

$$x = (\alpha - \alpha') \cos \delta \sqrt[3]{\cos(\alpha - \alpha')}$$

*) Um die Sinusse kleiner Winkel in Bogensecunden auszudrücken, kann man die Tafel für $x - \sin x$ benutzen, welche Herr Götze in der ersten Ausgabe unserer Praktischen Astronomie, Bd. II, S. 167 und Encke in den Astronomischen Nachrichten, Bd. XXX, Nr. 714 gegeben haben.

$$y = (\delta - \delta')\sqrt[3]{\cos(\delta - \delta')} + \tfrac{1}{2}\sin 1'' \frac{\sin\delta'}{\cos\delta}\cdot x^2,$$
$$\xi = \varrho(\pi - \pi')\sqrt[3]{\cos(\pi - \pi')}\,.\sin z' \sin v,$$
$$\eta = \varrho(\pi - \pi')\sqrt{\cos(\pi - \pi')}\,.\sin z' \cos v,$$

wo $(\alpha - \alpha')$, $(\delta - \delta')$ und $(\pi - \pi')$ in Bogensecunden gegeben werden müssen. In diesem Fall bedeutet D dasselbe wie Δ'' und kann statt dessen geschrieben werden. Man hat also für den Anfang und das Ende der Sonnenfinsterniss:

$D = r + r'(1 - \varrho \sin\pi \cos z')$ bei partiellen Finsternissen,
$D = r - r'(1 - \varrho \sin\pi \cos z')$ bei totalen Finsternissen,
$D = r'(1 - \varrho \sin\pi \cos z') - r$ bei ringförmigen Finsternissen.

In allen diesen Fällen ist

$$D\sin\sigma = x - \xi,\quad D\cos\sigma = y - \eta,$$
$$x = p(\tau - T + T'),\quad y = \varepsilon + q(\tau - T + T');$$

ξ und η sind Functionen von z' und v, oder von φ', δ' und t, wenn man $\sin z' \sin v$ und $\sin z' \cos v$ durch φ', δ' und t ausdrückt (§ 177).

Setzen wir

$$\Pi = \varrho(\pi - \pi')\sqrt[3]{\cos(\pi - \pi')}$$

und

$$p(\tau^\circ - T + T') - \varrho\Pi\cos\varphi'\sin t^\circ = m'\sin M'$$
$$\varepsilon + q(\tau^\circ - T + T') - \varrho\Pi\sin\varphi'\cos\delta' + \varrho\Pi\cos\varphi'\sin\delta'\cos t^\circ = m'\cos M'$$
$$p - k\Pi\varrho\cos\varphi'\cos\tfrac{1}{2}(t + t^\circ) = n'\sin N'$$
$$q - k\Pi\varrho\cos\varphi'\sin\delta'\sin\tfrac{1}{2}(t + t^\circ) = n'\cos N',$$

so kommt

$$D\sin\sigma = m'\sin M' + n'\sin N'(\tau - \tau^\circ)$$
$$D\cos\sigma = m'\cos M' + n'\cos N'(\tau - \tau^\circ),$$

oder

$$D.\sin(\sigma - N') = m'\sin(M' - N')$$
$$D.\cos(\sigma - N') = m'\cos(M' - N') + n'(\tau - \tau^\circ).$$

Wenn wir

$$\sigma - N' = \psi'$$

setzen, so ist

$$\sin\psi' = \frac{m' \sin(M' - N')}{D},$$

$$\tau = \tau^\circ - \frac{m'}{n'}\cos(M' - N') + \frac{D}{n'}\cos\psi'.$$

Die Winkel M' und N' sind so zu nehmen, dass m' und n' immer positiv herauskommen. Man erhält zwei Werthe von ψ', die demselben Sinus entsprechen; die Cosinusse beider Werthe sind numerisch gleich, aber einer dieser Cosinusse ist positiv, der andere negativ. Ist $\sin(M' - N')$ positiv, so gehört der eine von beiden Werthen von ψ' dem ersten und der andere dem zweiten Kreisquadranten; ist $\sin(M' - N')$ negativ, so gehört ein Werth von ψ' dem dritten und der andere dem vierten Quadranten; für den Anfang der Finsterniss muss $\cos\psi'$ negativ und für das Ende positiv sein, da aus zwei Werthen, welche man für τ erhält, der kleinere, oder die frühere Zeit dem Anfange entsprechen muss.

Die Vorausberechnung der Zeit des Anfanges und des Endes der Finsterniss lässt sich indirect durch allmähliche Annäherungen auf folgende Weise ausführen.

Gegeben sind die geographische Breite φ und Länge λ des Orts; daraus werden φ' und ϱ abgeleitet; zunächst nimmt man $D = r + r'$ und $\tau = \tau^\circ = T - T'$ an, d. h. statt der gesuchten Zeit τ wird eine beliebige der Conjunction naheliegende wahre Zeit des ersten Meridians gewählt; der entsprechende Stundenwinkel der Sonne ist $t = t^\circ = 15^\circ\tau \pm \lambda$, wo $+$ zur östlichen und $-$ zur westlichen Länge gehört; τ° wird in Stunden, t, t° und λ in Graden ausgedrückt; man nimmt auch t° statt $\frac{1}{2}(t + t^\circ)$ und k' statt k (§ 180) an; alsdann bestimmt man für die gewählte Zeit τ° die Werthe von $(\alpha - \alpha')$, δ, δ', $\pi - \pi'$, T', ε, p, q, M', m', N', n' und berechnet die beiden

Werthe des Winkels ψ' und der Zeit τ. Man findet auf diese Weise die genäherte Zeit τ' des Anfanges und die genäherte Zeit τ'' des Endes der Finsterniss; die Fehler können dabei auf mehrere Zeitminuten hinauslaufen. Um genauere Bestimmungen zu erlangen, wird die Rechnung wiederholt und zwar besonders für τ' und für τ''; es werden nämlich zuerst die Werthe von δ', Π, $T-T'$, ε, p, q, M', m', N', n' gesucht, welche der Zeit τ' gehören und dann ψ' und die Zeit des Anfanges der Finsterniss berechnet.

Auf ähnliche Weise wird die Zeit des Endes bestimmt, indem man von τ'' ausgeht. Die gewonnenen Resultate werden meistens bis auf eine Zeitminute sicher sein; wollte man die Genauigkeit weiter treiben, so wiederholt man nochmals die Rechnung. Es ist hinreichend, die erste Rechnung mit vierstelligen und die zweite mit fünfstelligen Logarithmen auszuführen.

Es trifft sich bisweilen, dass man in der ersten Rechnung einen imaginären Werth von ψ', oder $\sin\psi'$ numerisch grösser als 1 erhält, obgleich die Finsterniss an dem gegebenen Orte möglich ist. Es wird dann $\cos\psi' = 0$ gesetzt und mit dem dadurch hervorgehenden Werthe von τ wird die Rechnung wiederholt.

Hansen hat zur Erleichterung der Rechnung folgende Tafel gegeben, welche die Werthe von $\log k'$ anzeigt, die statt $\log k'$ in den zweiten und dritten Rechnungen zu gebrauchen sind, um genauere Resultate zu bekommen. Das Argument der Tafel ist $t-t^\circ$ in Graden ausgedrückt.

$t-t^\circ$	$\log k'$	Diff.	$t-t^\circ$	$\log k'$	Diff.	$t-t^\circ$	$\log k'$	Diff.	$t-t^\circ$	$\log k'$	Diff.
0°	9,41797	2	12°	9,41717	28	24°	9,41479	55	36°	9,41080	82
2	795	7	14	689	33	26	424	60	38	9,40998	86
4	788	11	16	656	38	28	364	64	40	912	92
6	777	16	18	618	42	30	300	69	42	820	95
8	761	19	20	576	46	32	231	73	44	725	101
10	742	25	22	530	51	34	158	78	46	624	105
12	9,41717		24	9,41479		36	9,41080		48	9,40519	

Der Winkel σ befindet sich zwischen dem Declinationskreise der Sonne und der Linie, welche die scheinbaren Oerter der Sonne und des Mondes verbindet; da $\sigma = N' + \psi'$ ist und ψ' zwei Werthe hat, einen für den Anfang und den anderen für das Ende der Finsterniss, so hat auch σ zwei Werthe, welche die äusseren Berührungen der Sonne mit dem Monde beim Anfange und Ende der Finsterniss am Sonnenrande bestimmen. Der Winkel σ wird von Norden nach Osten u. s. w. gezählt.

Für den Anfang und das Ende der ringförmigen Finsterniss liegt der Anfangspunkt des Winkels σ im Südpunkt des Sonnenrandes; das Wachsen von σ geschieht dann in derselben Richtung, wie oben gesagt wurde, also in diesem Fall nach Westen.

Will man die Winkel in Bezug auf den Höhenkreis der Sonne angeben, welche am Sonnenrande die Berührungen der Sonne mit dem Monde bestimmen und vom höchsten Punkte des Sonnenrandes abgezählt werden, so braucht man nur den parallactischen Winkel v zu berechnen und dem σ mit gehörigem Zeichen (+ oder —) hinzuzufügen.

Die Zeit und die Grösse des Maximums der Finsterniss am gegebenen Orte.

183. Wenn δ', Π, p, q u. s. w. für die Mitte der Finsterniss gegeben sind und man rechnet so, wie in § 182 erklärt wurde, so findet man die Zeit (τ) dieser Mitte als arithmetisches Mittel aus der Zeit des Anfanges und der Zeit des Endes der Finsterniss; es ist also

$$(\tau) = \tau^\circ - \frac{m'}{n'} \cos(M' - N').$$

Zugleich ist (τ) die Zeit der grössten Phase der Finsterniss am gegebenen Orte oder die Zeit des Minimums von Δ'; nun ist

$$D = \Delta'(1 - \varrho \sin\pi . \cos z')$$

und Δ' hängt von den Halbmessern r' und r der Sonne und des Mondes ab. Wegen der Veränderlichkeit von r', r, π und z', fällt das Maximum der Finsterniss nicht genau mit dem Minimum von D zusammen; aber diese Aenderungen sind so klein, dass wir ohne erheblichen Fehler die Grösse des Maximums der Finsterniss aus dem Minimum von D ableiten können. Dazu müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} D\sin\sigma &= p(\tau - T + T') - \Pi\varrho\cos\varphi'\sin t \\ D\cos\sigma &= \varepsilon + q(\tau - T + T') - \Pi\varrho\sin\varphi'\cos\delta' \\ &\qquad + \Pi\varrho\cos\varphi'\sin\delta'\cos t \end{aligned}$$

in Bezug auf die Zeit differenziirt werden. Wenn τ in Stunden und t in Graden ausgedrückt sind, so erhält man

$$\delta\sin t = k'\cos t . \delta\tau,\ \delta\cos t = -k'\sin t . \delta\tau;\ k' = \frac{15}{57{,}296}.$$

Vernachlässigen wir sehr kleine Aenderungen von p, q, $T - T'$, Π und δ', so giebt die Differenziirung von $D\sin\sigma$ und $D\cos\sigma$ folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin\sigma\,\delta D + D\cos\sigma\,\delta\sigma &= (p - k'\Pi\varrho\cos\varphi'\cos t)\,\delta\tau = n'\sin N'\,\delta\tau \\ \cos\sigma\,\delta D - D\sin\sigma\,\delta\sigma &= (q - k'\Pi\varrho\cos\varphi'\sin\delta'\sin t)\,\delta\tau \\ &= n'\cos N'\,\delta\tau. \end{aligned}$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit $\sin\sigma$, die zweite mit $\cos\sigma$, so giebt die Summe der Producte durch $\delta\tau$ dividirt, den Ausdruck

$$\frac{\delta D}{\delta\tau} = n'(\sin N'\sin\sigma + \cos N'\cos\sigma) = n'\cos(\sigma - N').$$

Die Bedingung des Minimums von D besteht darin, dass $\frac{\delta D}{\delta\tau} = 0$ gesetzt wird, was dann stattfinden kann, wenn

$cos(\sigma - N') = 0$ angenommen wird. Da $\sigma - N' = \psi'$ ist, so erreicht D sein Minimum, und die grösste Phase der Finsterniss tritt ein, wenn $cos\,\psi' = 0$ ist, oder wenn ψ' gleich $90°$ oder $270°$ sein wird.

Dieser Schluss lässt sich auch geometrisch erklären; σ ist der Winkel zwischen dem Declinationskreise der Sonne und der Linie D, welche die scheinbaren Oerter der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes miteinander verbindet; N ist der Winkel zwischen demselben Declinationskreise und der Richtung der relativen scheinbaren Bahn des Mondes auf der Projectionsebene; also ist $\sigma - N' = \psi'$ der Winkel, welchen diese Bahn mit der Linie D macht. Offenbar wird der scheinbare Abstand der Sonne vom Monde am kleinsten sein, wenn D senkrecht zur relativen Bahn des Mondes steht, oder wenn $\psi' = \pm 90°$ ist.

Dagegen ist die häufig gemachte, auch in der ersten Ausgabe unserer Praktischen Astronomie, Bd. II zugelassene Annahme, dass bei der grössten Phase der Finsterniss $cos(\sigma - N) = 0$ sein soll, eine unrichtige, wie Hansen und Professor Zech bemerkt haben, da N sich auf die geocentrische und N' auf die scheinbare relative Bahn des Mondes beziehen; der Unterschied $N' - N$ kann in manchen Fällen mehr als $20°$ betragen.

Vom Anfange bis zur Mitte der Finsterniss vermindert sich D mit der Zunahme der Zeit τ, aber von der Mitte bis zum Ende der Finsterniss vergrössert sich D mehr und mehr. Im ersten Fall muss also der Differenzialquotient $\frac{\delta D}{\delta \tau}$ negativ und im zweiten positiv sein; da $\frac{\delta D}{\delta \tau} = n' cos\,\psi'$ ist und n' immer positiv bleibt, so ist $cos\,\psi'$ beim Anfange der Finsterniss negativ und beim Ende positiv, wie wir schon bemerkt haben.

Es sei $D°$ der Minimalwerth von D; es ist leicht, denjenigen Werth des Winkels $\sigma - N = \psi$ zu bestimmen, welcher zur Zeit der grössten Phase gehört, wenn D in $D°$ übergeht.

$D°$ und ψ können als Functionen entweder von v und s',

oder von φ', δ' und t betrachtet werden. Aus den allgemeinen Gleichungen

$$D\sin\sigma = x-\xi,\ D\cos\sigma = y-\eta$$

lassen sich leicht folgende Ausdrücke ableiten:

$$D\sin(\sigma-N) = x\cos N - y\sin N + \xi\sin N - \eta\cos N$$
$$D\cos(\sigma-N) = x\sin N + y\cos N - \xi\cos N - \eta\sin N.$$

Nun ist

$$x\cos N - y\sin N = -\varepsilon\sin N$$
$$x\sin N + y\cos N = \varepsilon\cos N + n(\tau - T + T')$$
$$\eta\sin N - \xi\cos N = \Pi\varrho\sin z'\sin(N-v)$$
$$= \Pi\varrho(\sin\varphi'\cos\delta' - \cos\varphi'\sin\delta'\cos t)\sin N$$
$$-\Pi\varrho\cos\varphi'\sin t\cos N,$$
$$\eta\cos N + \xi\sin N = \Pi\varrho\sin z'\cos(N-v)$$
$$= \Pi\varrho(\sin\varphi'\cos\delta' - \cos\varphi'\sin\delta'\cos t)\cos N$$
$$+\Pi\varrho\cos\varphi'\sin t\sin N.$$

Es ist $\sigma - N = \psi$ gesetzt worden; wir erhalten daher erstens allgemeine Gleichungen, unabhängig von z' und v:

$$D\sin\psi = -\varepsilon\sin N + \Pi\varrho\sin z'\sin(N-v)$$
$$D\cos\psi = \varepsilon\cos N + n(\tau - T + T') - \Pi\varrho\sin z\cos(N-v).$$

Wenn wir zweitens

$$b\sin B = \sin\delta'\sin N,\quad c\sin C = \sin\delta'\cos N$$
$$b\cos B = \cos N,\quad c\cos C = \sin N$$

setzen, so entstehen folgende, von φ', δ' und t abhängige Ausdrücke:

$$D\sin\psi = -\varepsilon\sin N + \Pi\varrho\sin\varphi'\sin N - \Pi\varrho\cos\varphi' b\sin(B+t)$$
$$D\cos\psi = \varepsilon\cos N + n(\tau - T + T') - \Pi\varrho\sin\varphi'\cos\delta'\cos N$$
$$+\Pi\varrho\cos\varphi' c\sin(C-t).$$

Da wir $\psi = \sigma - N$, $\psi' = \sigma - N'$ angenommen haben, so ist $\psi = \psi' + N' - N$, und man hat im Allgemeinen:

$$\cos\psi = \cos\psi' \cos(N'-N) - \sin\psi' \sin(N'-N)$$
$$\sin\psi = \sin\psi' \cos(N-N') + \cos\psi' \sin(N'-N).$$

Für die grösste Phase der Finsterniss hat man $D = D^{\circ}$,
$$\psi' = 90^{\circ} \text{ oder } 270^{\circ},\ \cos\psi' = 0,\ \sin\psi' = \pm 1;$$
also in diesem Fall wird
$$\cos\psi = \mp \sin(N'-N),\quad \sin\psi = \pm \cos(N'-N).$$

Wenn wir diese $\cos\psi$ und $\sin\psi$ in die Ausdrücke von $D\sin\psi$ und $D\cos\psi$ einführen und D° statt D schreiben, so bekommen wir die Gleichungen von D° und t oder τ zu berechnen; es bleibt aber noch übrig, $N'-N$ zu bestimmen. Dazu dienen die anfänglichen Gleichungen
$$n' \sin N' = n \sin N - k' \Pi \varrho \cos\varphi' \cos t,$$
$$n' \cos N' = n \cos N - k' \Pi \varrho \cos\varphi' \sin\delta' \sin t,$$
aus welchen sich leicht folgende ableiten lassen:
$$n' \sin(N'-N) = k' \Pi \varrho \cos\varphi' (\sin N \sin\delta' \sin t - \cos N \cos t)$$
$$= -k' \Pi \varrho \cos\varphi' b . \cos(B+t)$$
$$n' \cos(N'-N) = n - k' \Pi \varrho \cos\varphi' (\sin N \cos t + \cos N \sin\delta' \sin t)$$
$$= n - k' \Pi \varrho \cos\varphi' . c . \cos(C-t).$$

Da $\varrho \cos\varphi' = \cos\varphi$, ist, so kommt zur Zeit der grössten Phase
$$-\operatorname{cotg}(N'-N) = tg\,\psi = \frac{n - k' \Pi \cos\varphi, . c . \cos(C-t)}{k' \Pi \cos\varphi, . b . \cos(B+t)}.$$

Bei Sonnenfinsternissen ist n bedeutend grösser als $k' \Pi$ oder $k'(\pi - \pi')$; bei der grössten Phase kann also ψ nicht viel von 90° oder von 270° abweichen; der Unterschied kann selten 20° übersteigen; öfters ist er geringer.

Wir können auch $tg\,\psi$ durch z' und v' ausdrücken. Man hat überhaupt
$$\cos\varphi' \cos t = \cos z' \cos\delta' - \sin z' \sin\delta' \cos v$$
$$\cos\varphi' \sin t = \sin z' \sin v;$$
substituiren wir diese Ausdrücke in die Gleichungen, welche $n' \sin(N'-N)$ und $n' \cos(N'-N)$ bestimmen, so ist

$$n' \sin(N'-N) = k' \Pi \varrho [\sin z' \sin \delta' \cos(v-N) - \cos z' \cos \delta' \cos N]$$

$$n' \cos(N'-N) = n - k' \Pi \varrho [\sin z' \sin \delta' \sin(v-N) + \cos z' \cos \delta' \sin N].$$

Da $cotg(N'-N) = -tg\,\psi$ ist, so hat man zur Zeit der grössten Phase

$$tg\,\psi = -\frac{[n - k' \Pi \varrho (\sin z' \sin \delta' \sin(v-N) + \cos z' \cos \delta' \sin N]}{k' \Pi \varrho (\sin z' \sin \delta' \cos(v-N) - \cos z' \cos \delta' \cos N)}.$$

Erscheint die grösste Phase im Horizont, so ist nahezu $\sin z' = 1$, und es ist dann nöthig $\varrho . 1{,}0002$ statt ϱ anzuwenden.

Der erste Ausdruck von $cotg(N'-N)$ zeigt uns, dass $N'-N$ mit der Abnahme der Polhöhe numerisch abnimmt; bei einer gegebenen Polhöhe ist $N'-N$ am grössten, wenn $\cos(B+t) = \pm 1$ ist, oder wenn $B+t = 0°$ oder $180°$ ist; z. B. unter dem Aequator und zu den Zeiten des Aequinoctiums ($\varphi' = 0$, $\delta' = 0$) hat man $B = 0$, $C = 0$, $b = \cos N$, $c = \sin N$; nehmen wir an $N = 63°$, $\Pi = \pi - \pi' = 60'$, $n = 35'$, $t = 0°$, so ist $N'-N$ nahe an $24°$.

Wenn dagegen $\cos(B+t) = 0$, oder $B+t = \pm 90°$ ist, so wird $N' = N$ und $\psi' = \psi$.

Allgemeine Bemerkungen über die Grenzen der Sichtbarkeit einer Sonnenfinsterniss auf der Oberfläche der Erde.

184. Die Umdrehung der Erde um ihre Achse, die fortrückenden Bewegungen des Mondes und der Erde, die Grösse und die Gestalt der Erde, des Mondes und der Sonne, sowie ihre

gegenseitigen Entfernungen bewirken, dass in verschiedenen Gegenden, von welchen aus die Finsterniss bemerkt werden kann, diese Finsterniss verschieden erscheint; und diese Gegenden sind überhaupt durch vier Curven getrennt von denjenigen Gegenden, für welche die Finsterniss unsichtbar bleibt; solche Curven bilden die nördliche und südliche, die westliche und östliche Grenze der Finsterniss.

Die Phase der Finsterniss wird durch den entsprechenden Werth von Δ' oder D gegeben; um zu erklären, wie die Grenzen der Phase zu bestimmen sind, denken wir uns eine Reihe von Punkten auf der Erdoberfläche, in welchen die gegebene Phase zu verschiedenen Zeiten als die grösste von allen Phasen erscheint, die dort sichtbar sind. So liegen auf einer Seite der durch diese Punkte gehenden Curve die Länder, wo noch grössere Phasen bemerkt werden können; auf der anderen Seite der Curve befinden sich die Länder, wo nur kleinere Phasen sichtbar sind. Eine solche Curve bildet also in gewissem Sinn die Grenze der Phase; man kann aber noch eine Grenze anderer Art finden. Betrachten wir auf der Oberfläche der Erde solche Punkte, in welchen die gegebene Phase nur im Horizonte bei aufgehender oder untergehender Sonne zu sehen ist, so befinden sich einerseits von der Curve, die durch diese Punkte geht, die Länder, wo die gegebene Phase unsichtbar ist, weil die Sonne zur Zeit der Phase unter dem Horizonte sich verbirgt; auf der anderen Seite der Curve aber liegen die Länder, wo die Phase beobachtet werden kann, weil die Sonne dort über dem Horizont steht.

Wenn die Lage solcher Punkte berechnet wird, in welchen die grösste der sichtbaren Phasen gleich der Summe der Halbmesser der Sonne und des Mondes ist, so bekommt man die Punkte, wo nur die äusseren Berührungen der Ränder des Mondes und der Sonne oder bloss die Contacte zu sehen sind; bestimmt man noch die Punkte auf der Erde, wo die äusseren Berührungen im Horizonte bemerkt werden, und verbindet sie gehörig miteinander durch Linien, so findet man alle Curven, die

den Raum auf der Erde begrenzen, ausserhalb dessen die Finsterniss nicht wahrgenommen werden kann.

Betrachtet man die inneren Berührungen der Ränder des Mondes und der Sonne, oder die Phase, bei welcher die Differenz der Halbmesser des Mondes und der Sonne den Abstand der Mittelpunkte von einander ausdrückt, so findet man auf eine ähnliche Weise die Grenzen der Sichtbarkeit der totalen oder ringförmigen Finsternisse.

Nördliche und südliche Grenzcurve einer gegebenen Phase der Sonnenfinsterniss.

185. Der Kegel des Halbschattens des Mondes, da, wo er die Erde trifft, ist nie so ausgedehnt, dass die ganze Erde auf einmal in sein Inneres eintreten kann *). Wenn bei seinem Vor-

*) Es sei h der lineare Halbmesser des Mondes, h' der Sonne, a der Erde, u des Halbschattenkreises, da, wo der Halbschatten der Erde begegnet; R und d die Entfernungen der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes von der Erde, in denselben Einheiten ausgedrückt wie h, h', a und u. Da zur Zeit der Sonnenfinsternisse Breite des Mondes immer klein ist, so findet man ohne merklichen Fehler

$$u = \frac{R.h + d.h'}{R - d}.$$

Bekanntlich hat man $\frac{h}{a} = 0{,}2725$; $\frac{h'}{a} = \frac{\sin 16' 1'',8}{\sin 8'',85}$; $\frac{R}{a} = \frac{1}{\sin \pi'}$, $\frac{d}{a} = \frac{1}{\sin \pi}$, wo π und π' die Horizontalparallaxen des Mondes und der Sonne zur Zeit der Finsterniss sind; man bekommt also:

überziehen auf der Erdoberfläche nur ein Theil des Kegels der Erde begegnen kann, der andere Theil aber über die Erde hinausragt, so entsteht auf der Erde nur eine Grenzcurve der Finsterniss, die nördliche oder die südliche. Tritt aber der Kegel des Halbschattens seiner Breite nach ganz in die Erde ein, so bilden sich auf der Erde zwei Grenzcurven von derselben Art. In den Punkten, die solchen Grenzcurven gehören, wird die gegebene Phase der Finsterniss von allen in diesen Punkten sichtbaren Phasen die grösste sein. Der entsprechende Werth des Winkels ψ' muss 90° oder 270° sein; er wird von der Richtung der scheinbaren relativen Bahn des Mondes, von Norden nach Süden bis zur Verbindungslinie der scheinbaren Oerter der Sonne und des Mondes hin gezählt. Da auf der nördlichen Grenzcurve der Mittelpunkt der Sonne nördlich und auf der südlichen Grenzcurve südlich vom Mittelpunkte des Mondes erscheint, so entspricht $\psi' = 90°$ der nördlichen und $\psi' = 270°$ der südlichen Grenzcurve.

Die verschiedenen Punkte der Grenzcurven werden durch ihre geographischen Längen λ und Breiten bestimmt; die gesuchten Grössen sind also λ und φ' oder $\varphi_{,}$, die vermittelst der oben aufgestellten Gleichungen berechnet werden können. Die Gleichungen enthalten verschiedene veränderliche Grössen, aus welchen man beliebig eine als Argument oder unabhängige Veränderliche wählen kann. Hansen hat vorgeschlagen, den Stundenwinkel t der Sonne an dem zu bestimmenden Punkte als Argument anzunehmen, weil meistens t kein Maximum oder Minimum hat und auf den Grenzcurven den ganzen Umkreis (360°) durchläuft, was für die Rechnung vortheilhaft ist.

$$\frac{u}{a} = \frac{0{,}2725 \sin \pi + \sin 16' 1'',8 \cdot \frac{\pi}{8'',85}}{\sin \pi - \sin \pi'}.$$

Der kleinste Werth von π ist 53′50″, der grösste Werth von π' ist 9″; demnach kann $\frac{u}{a}$ nicht grösser sein als 0,577.

Wählen wir zuerst t zum Argument, so lassen sich $\varphi_{,}$ und ψ aus folgenden Gleichungen ableiten:

$$D^{\circ} \sin\psi + \varepsilon \sin N = \Pi(1-\gamma)\cos\delta' \sin N \sin\varphi_{,} - \Pi . b . \sin(B+t)\cos\varphi_{,} \quad . \; . \; . \; . \quad (I)$$

$$tg\,\psi = \frac{n - k'.\Pi\cos\varphi_{,}.c.\cos(C-t)}{k'.\Pi\cos\varphi_{,}.b.\cos(B+t)},$$

wo D° die gegebene Phase bedeutet, welche an dem zu bestimmenden Punkte die grösste Phase sein muss.

Setzen wir

$$a\cos A = \Pi(1-\gamma)\sin N\cos\delta'$$
$$a\sin A = \Pi . b . \sin(B+t) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (II),$$

wo B, b, C, c die früheren Bedeutungen (§ 183) haben, so kommt aus der Gleichung (I)

$$\sin(\varphi_{,} - A) = \frac{D^{\circ}\sin\psi + \varepsilon\sin N}{a} \quad . \; . \; . \quad (III).$$

Man kann $\varphi_{,}$ und ψ indirect bestimmen. Da ψ nicht viel von ψ' abweicht, so wird vorläufig $\sin\psi = +1$ für die nördliche und $\sin\psi = -1$ für die südliche Grenze angenommen; dann lässt sich der genäherte Werth von $\varphi_{,}$ aus der letzten Gleichung berechnen und man benutzt diesen Werth, um aus der Gleichung für $tg\,\psi$ den Winkel ψ zu finden, welcher in die Gleichung für $\sin(\varphi_{,} - A)$ eingesetzt einen genaueren Werth von $\varphi_{,}$ ergeben wird.

Die dem angenommenen Stundenwinkel t entsprechende wahre Zeit τ des ersten Meridians und die geographische Länge des Orts, werden nach den Formeln

$$\tau = T - T' - \frac{\varepsilon\cos N}{n} + \frac{\Pi(1-\gamma)}{n}\sin\varphi_{,}\cos\delta'\cos N + \frac{D^{\circ}\cos\psi}{n} - \frac{\Pi\cos\varphi_{,}}{n}c.\sin(C-t),$$

$$\lambda = t - 15\tau$$

berechnet, nachdem $\varphi_{,}$ schon gefunden ist; die Grössen $T-T'$, ε, N, n u. s. w. müssen der Zeit τ angehören. Die Polhöhe φ findet man aus der Tafel in § 178.

Wenn man die geographische Lage einer Reihe aufeinanderfolgender Punkte der Grenzcurven sucht, so werden nach und nach 0°, 10°, 20°, ..., 340°, 350° für t substituirt und die entsprechenden Werthe von $\varphi_{,}$, τ und λ berechnet; auszuschliessen sind nur diejenigen Stundenwinkel t, welche ausserhalb des jedem Orte entsprechenden Tagbogens des Orts liegen. Statt in jedem Falle von $\psi = 90°$ oder von $\psi = 270°$ vorläufig auszugehen, ist es vortheilhafter, die den vorhergehenden Punkten gehörigen Werthe von ψ zu berücksichtigen und vermittelst der Differenzen den Winkel ψ für den nächstfolgenden Punkt zu bestimmen.

Da $\varphi_{,}$ aus dem Werthe von $\sin(\varphi_{,}-A)$ abgeleitet wird, so erhält man zwei Werthe von $\varphi_{,}$, die zu demselben $\sin(\varphi_{,}-A)$ gehören; wenn aber t den ganzen Umkreis durchlaufen kann, so bleibt nur ein Werth von $\varphi_{,}$, welcher die Aufgabe löst, der andere, grösser als 90°, muss verworfen werden. Ist hingegen t begrenzt, so entsprechen jedem, zwischen dem Maximum und Minimum enthaltenen t, zwei Werthe von $\varphi_{,}$, die innerhalb von $+90°$ und $-90°$ liegen.

Falls $\frac{\varepsilon \sin N + D° \sin\psi}{n}$ kleiner als Eins ist sowohl bei positiven, als auch bei negativen Werthen von $D° \sin\psi$, so erhält man zwei Grenzcurven für $\varphi_{,}$, die nördliche und die südliche. Wenn aber entweder bei positiven oder bei negativen Werthen von $D° \sin\psi$, $\frac{\varepsilon \sin N + D° \sin\psi}{a}$ numerisch grösser als Eins wird, dann verschwindet die nördliche oder die südliche Grenze.

186. Es kann der Fall eintreten, dass $\cos(B+t) = 0$ oder $\sin(B+t) = \pm 1$ wird; dann erreichen A und a ihre grössten Werthe und ψ wird gleich ψ'. Nennen wir A' und a' die entsprechenden Werthe von A und a, setzen dabei für $\sin\varphi_{,}$ und $\cos\varphi_{,}$ ihre Ausdrücke in Function von φ' und ϱ, so ist

$$tg\,A' = \frac{\pm b}{sin\,N\,cos\,\delta'} = \pm\frac{tg\,\delta'}{sin\,B},\quad \alpha' = \Pi\varrho,$$
$$sin\,(\varphi' \pm A') = \frac{\varepsilon\,sin\,N \pm D^{\circ}}{\Pi\varrho}.$$

Dieser Gleichung, welche die Grenze von φ' bestimmt, können vier verschiedene Werthe von φ' genügen; zwei von ihnen gehören den Punkten, an welchen die Sonne unter dem Horizonte steht; einer der beiden übrigen entspricht der nördlichen und der andere der südlichen Grenze, falls beide Grenzen vorhanden sind. Ist $\frac{\varepsilon\,sin\,N + D^{\circ}}{\Pi\varrho}$ oder $\frac{\varepsilon\,sin\,N - D^{\circ}}{\Pi\varrho}$ grösser als Eins, so wird die nördliche oder die südliche Grenze imaginär. Die correspondirenden Werthe von τ und λ lassen sich aus Ausdrücken von τ und λ ableiten, indem man $t = 90^{\circ} - B$ oder $t = 270^{\circ} - B$ annimmt.

187. Die vorgetragene Art $\varphi_{,}$ und λ zu berechnen ist immer brauchbar, so lange t keines Maximums oder Minimums fähig ist. In gewissen Fällen kann es aber kommen, dass $sin\,(\varphi_{,} - A) = \pm 1$ wird und sogar diese Grenzen übersteigt. In solchen Fällen kann t nicht den ganzen Umkreis durchlaufen und ist zwischen einem Maximum und einem Minimum enthalten. Wenn nämlich $sin\,(\varphi_{,} - A) = \pm 1$ wird, so ist auch

$$a = \varepsilon\,sin\,N + D^{\circ}\,sin\,\psi;\quad cos\,A = \frac{\Pi\,(1-\gamma)\,sin\,N\,cos\,\delta'}{\varepsilon\,sin\,N + D^{\circ}\,sin\,\psi};$$
$$sin\,(B + t) = \frac{(\varepsilon\,sin\,N + D^{\circ}\,sin\,\psi)}{\Pi . b}\,.\,sin\,A.$$

Die letzte Gleichung giebt zwei Werthe von t; der eine ist der grösste, der andere der kleinste von allen Stundenwinkeln t der Sonne, welche zur Auflösung der Aufgabe anzuwenden sind. In der Nachbarschaft solcher Grenzwerthe von t ist $sin\,(\varphi_{,} - A)$ wenig von ± 1 verschieden, und daher kann man $\varphi_{,}$ nicht mit Sicherheit bestimmen. Dann ist es vortheilhafter $\varphi_{,}$ zum Argument anzunehmen und den dem gewählten Werthe von $\varphi_{,}$ gehörigen Werth von t und von ψ nach den Formeln

$$sin(B+t) = \frac{\Pi(1-\gamma) sin\,\varphi, cos\,\delta'.\, sin N}{\Pi b.\, cos\,\varphi,} - \frac{(\varepsilon\, sin N + D^{\circ} sin\,\psi)}{\Pi b.\, cos\,\varphi,}$$

$$tg\,\psi = \frac{n - k'.\Pi\, cos\,\varphi,.c.\, cos(C-t)}{k'\Pi\, cos\,\varphi,.b.\, cos(B+t)}$$

zu berechnen. Man setzt zuerst $sin\,\psi = +1$ für die nördliche und $sin\,\psi = -1$ für die südliche Grenzcurve; damit lässt sich t annähernd aus der Gleichung für $sin(B+t)$ ableiten; dieser Werth von t wird benutzt, um $tg\,\psi$ zu berechnen und daraus ψ zu bestimmen; hat man ψ genauer gefunden, so lässt sich t genauer ermitteln. Die entsprechenden Werthe von τ und λ werden nach den Formeln

$$\tau = T - T' + \frac{\Pi(1-\gamma)}{n} sin\,\varphi, cos\,\delta' \, cos N - \frac{\varepsilon.\, cos N}{n}$$
$$- \frac{\Pi}{n} cos\,\varphi,.c\, sin(C-t) + \frac{D^{\circ}.\, cos\,\psi}{n},$$

$$\lambda = t - 15\tau$$

berechnet.

188. Dasselbe Verfahren kann im Allgemeinen angewandt werden zur Bestimmung der nördlichen oder südlichen Grenzcurve. Für eine Reihe der um 2° oder 4° zunehmenden oder abnehmenden Winkel $\varphi,$, die zwischen den Werthen von $\varphi,$ liegen, welche den Orten gehören, wo die südliche oder die nördliche Grenzcurve von der westlichen und östlichen Grenzcurve berührt werden, kann man die entsprechenden Stundenwinkel t, die Zeiten τ und die geographischen Längen λ berechnen und dadurch ebenso viele Punkte der Grenzcurve angeben. Unbrauchbar ist dieses Verfahren nur dann, wenn man zu solchen Stundenwinkeln t gelangt, für welche nahezu $sin(B+t) = \pm 1$, oder $cos(B+t) = 0$ ist; in diesem Falle ist auch nahezu $\psi = \psi'$; es wird dann vortheilhaft, t als Argument anzunehmen und $\varphi,$ so zu bestimmen, wie es in § 185—186 erklärt wurde.

In beiden hier vorgetragenen Methoden kann man nicht die genauen Werthe der Hülfsgrössen N, ε, n u. s. w. gleich Anfangs erhalten; es werden vorläufig dafür annähernde Werthe an-

genommen und nach der Auflösung der Aufgabe schärfere Werthe bestimmt; dann wird die zweite Auflösung genaue Resultate geben.

189. Die dritte und bequemste Art, die nördliche und südliche Grenzcurve zu ermitteln, hat Professor Zech vorgeschlagen; er nimmt die Zeit τ des ersten Meridians zum Argument an und erreicht den Vortheil, dass die Werthe der Hülfsgrössen N, n, ε u. s. w. sogleich genau zu berechnen sind. Es sei

$$\sin V = \cos\varphi' \sin t$$
$$\cos V . \cos W = \cos\varphi' \cos t, \quad \cos V . \sin W = \sin\varphi';$$

daraus folgt:

$$\sin z' \sin v = \sin V$$
$$\sin z' \cos v = \cos V \sin(W - \delta')$$
$$\cos z' = \cos V . \cos(W - \delta').$$

Hier ist v der parallactische Winkel und z' die geocentrische Zenithdistanz der Sonne. Damit die Sonne über dem Horizonte sich befindet, ist es erforderlich, dass z' nicht 90° übersteigt, oder dass $\cos z'$ positiv sei. Man kann den Winkel W immer so wählen, dass auch $\cos V$ positiv bleibt; alsdann werden die Winkel V und W so angenommen, dass $\cos V$ und $\cos(W - \delta')$ zugleich positiv werden.

Für eine Reihe der beliebig angenommenen Zeiten τ, die zwischen der Zeit des frühesten Anfangs und der Zeit des spätesten Endes der Finsterniss auf der Erde enthalten sind, berechnet man die Coordinaten x, y, sowie Π, δ', N, n u. s. w. Da man hat

$$\xi = \Pi\varrho \sin V = x - D^\circ \sin\sigma$$
$$\eta = \Pi\varrho \cos V \sin(W - \delta') = y - D^\circ \cos\sigma,$$

so erhält man

für die nördliche Grenze

$\psi' = 90°, \quad \sigma = 90° + N'$

$$\sin V = \frac{x - D°.\cos N'}{\Pi\varrho}$$

$$\sin(W - \delta') = \frac{y + D° \sin N'}{\Pi\varrho \cos V}$$

für die südliche Grenze

$\psi' = 270°, \sigma = 270° + N'$

$$\sin V = \frac{x + D° \cos N'}{\Pi\varrho}$$

$$\sin(W - \delta') = \frac{y - D° \sin N'}{\Pi\varrho \cos V}$$

$$tg(N' - N) = \frac{+k'\Pi\varrho \cos\varphi' b . \cos(B + t)}{n - k'\Pi\varrho \cos\varphi' c \ \cos(C - t)}.$$

Man berechnet V, W, φ' und t zuerst unter der Voraussetzung, dass $N' = N$ und $\varrho = 1$ ist; hat man φ' und t annähernd gefunden, so lässt sich $N' - N$, also auch N' bestimmen; mit diesem N' wird die Rechnung wiederholt, um V, W, ϱ, φ' und t genauer zu erhalten; dann ist die geographische Länge

$$\lambda = t - 15\tau.$$

190. Vermittelst der angestellten Gleichungen können verschiedene Aufgaben gelöst werden; wir begnügen uns folgende anzuführen.

1) *Auf einem gegebenen Breitenparallel die geographische Länge λ des Orts zu bestimmen, wo zur gegebenen Zeit die grösste aus allen dort erscheinenden Phasen der Finsterniss stattfindet; auch die Grösse $D°$ dieser Phase anzugeben.*

Hier sind φ', ϱ und τ oder t bekannte Grössen, je nachdem die wahre Zeit τ des ersten Meridians oder die wahre Ortszeit $\frac{1}{15}t$ gegeben ist. Wenn τ gegeben ist, so kann man die Hülfsgrössen ε, Π, δ', N, n, $T - T'$ genau für diese Zeit erhalten, und aus den Ausdrücken $D \sin\sigma = x - \xi$, $D \cos\sigma = y - \eta$, wo $\sigma = N + \psi$ ist, bekommt man folgende Gleichungen:

$$f' = -\varepsilon + \Pi\varrho \sin\varphi' \cos\delta'$$

$$b' \sin B' = \sin\delta' \sin(N + \psi), \ \ldots \ c' \sin C' = \sin\delta' \cos(N + \psi)$$

$$b' \cos B' = \cos(N + \psi) \qquad c' \cos C' = \sin(N + \psi),$$

$$\sin(B' + t) = \frac{f' \sin(N + \psi)}{\Pi\varrho \cos\psi' . b'} - \frac{n(\tau - T + T') \sin\psi}{\Pi\varrho \cos\psi' . b'}$$

$$D° = -f' \cos(N + \psi) + n(\tau - T + T') \cos\psi$$
$$+ \Pi\varrho \cos\varphi' . c' \sin(C' - t).$$

Da D° die grösste Phase der Finsterniss bedeutet, so ist

$$tg\,\psi = \frac{n - k' \Pi \varrho \cos\varphi' c \,.\cos(C-t)}{k' \Pi \varrho \cos\varphi' .\, b \,.\cos(B+t)}.$$

Es wird vorläufig $\psi = 90^\circ$ oder $\psi = 270^\circ$ angenommen, je nachdem φ' der nördlichen oder der südlichen Grenzcurve angehört; man berechnet einen genäherten Werth von t und benutzt denselben, um ψ zu bestimmen; hat man ψ gefunden, so rechnet man t genauer, und dann werden sowohl D° als auch $\lambda = t - 15\tau$ bestimmt.

Auf diese Weise kann man t genau erhalten, ohne zuerst auf D° Rücksicht zu nehmen; will man aber nicht neue Hülfsgrössen B', b', C', c' suchen und lieber die schon bekannten B, b, C, c gebrauchen, so sind die Gleichungen

$$f = -\varepsilon + \Pi \varrho \sin\varphi' \cos\delta',$$

$$\sin(C-t) = \frac{f.\cos N}{\Pi \varrho \cos\varphi' . c} - \frac{n(\tau - T + T')}{\Pi \varrho \cos\varphi' . c} + \frac{D^\circ \cos\psi}{\Pi \varrho \cos\varphi' . c},$$

$$D^\circ = \frac{f.\sin N}{\sin\psi} - \frac{\Pi \varrho \cos\varphi' . b \,.\sin(B+t)}{\sin\psi}$$

anzuwenden. Es wird zuerst $\psi = 90^\circ$ oder $\psi = 270^\circ$ angenommen, oder $\cos\psi = 0$ gesetzt und t nahezu richtig abgeleitet; mit diesem Werthe von t wird ψ, aus dem Ausdrucke von $tg\,\psi$ berechnet und D° bestimmt; dann wird t nochmals berechnet und sowohl t, als auch D° sicherer bestimmt; die geographische Länge ist

$$\lambda = t - 15\tau.$$

Wenn, statt τ, t gegeben ist, so kann man sogleich ψ finden; vermittelst der erwähnten Gleichungen sind τ und D° leicht zu bestimmen.

Für die nördliche Grenze muss ψ nicht zu viel von 90° abweichen, für die südliche Grenze ist ψ näher zu 270° als zu 90° zu nehmen. Jedem gegebenen Werthe von τ entsprechen zwei Werthe von t und zwei Werthe von D°; kommt D° positiv heraus, so ist der nördliche, wird D° negativ, so ist der südliche Theil der Sonne verfinstert.

191. 2) *Die Curve zu bestimmen, auf welcher die grösste Phase der Finsterniss im wahren Mittage, oder in der wahren Mitternacht gesehen wird.*

Im wahren Mittage ist $t = 0$, in der wahren Mitternacht ist $t = 180°$; mit diesem Werthe von t werden ψ, $D°$, τ und λ berechnet, wie oben gezeigt ist, indem man verschiedene, zwischen den äussersten Grenzen liegende Werthe von φ, beliebig annimmt.

Wenn die nördliche und die südliche Grenzcurve reell sind, so hat die Curve ihre Endpunkte auf diesen Grenzen; wenn aber die nördliche oder die südliche Grenze imaginär wird, so liegt einer der Endpunkte der Curve der grössten Phase im Mittage oder zur Mitternacht auf der Curve der grössten Phase im Horizont, da, falls man noch weiter gehen wollte, man an solche Punkte gelangen würde, in welchen während der grössten Phase der Finsterniss die Sonne sich unter dem Horizont verbirgt. Dieser Endpunkt wird dadurch bezeichnet, dass sowohl zu $t = 0$, als auch zu $t = 180°$ der parallactische Winkel $v = 0$ gehört; dieser Werth, in die Gleichungen der grössten Phase im Horizont eingeführt, wird entsprechende Werthe von z' und τ bestimmen.

Alle Hülfsgrössen gelten für die *Zeit* τ; ist τ gefunden, so erhält man

$$\lambda = -15\tau,\ \varphi' = z' + \delta' \text{ für den wahren Mittag,}$$
$$\lambda = 180° - 15\tau,\ \varphi' = z' + \delta' \text{ für die wahre Mitternacht.}$$

Der Bogen der Curve, auf welchem die grösste Phase im wahren Mittage gesehen wird, sondert die Gegenden, wo die Finsterniss, oder der grössere Theil derselben am Vormittage stattfindet, von den Gegenden ab, wo diese Erscheinung am Nachmittage vorkommt. Dagegen sondert der Bogen der Curve, auf welchem die grösste Phase in der wahren Mitternacht beobachtet wird, die Gegenden, wo die Finsterniss oder der grössere

Theil derselben am Abend wahrzunehmen ist, von den Gegenden ab, wo diese Erscheinung am Morgen stattfindet.

Ist der Pol des Erdäquators innerhalb des Bereiches der Finsterniss enthalten, so geht die Curve der grössten Phase im wahren Mittage oder in der wahren Mitternacht durch diesen Pol.

192. 3) *Auf einem gegebenen Breitenparallel die Zeit des Eintreffens der Phase und der geographischen Länge λ des Orts zu bestimmen, wo die gegebene Phase D° als die grösste Phase der Finsterniss vorkommt.*

Es sei

$$f = -\varepsilon + \Pi\varrho \sin\varphi' \cos\delta', \quad g = \frac{f.\sin N}{\Pi\varrho \cos\varphi'.b};$$

nehmen wir zuerst $\psi = 90^\circ$ oder $\psi = 270^\circ$ an, je nachdem φ' der nördlichen oder der südlichen Grenzcurve angehört, so ist $\cos\psi = 90^\circ$ und man bekommt t aus der Gleichung

$$\sin(B+t) = g\left(1 \mp \frac{D^\circ}{f \sin N}\right).$$

Mit diesem genäherten Werthe von t wird ψ aus dem Ausdruck

$$tg\,\psi = \frac{n - k'\Pi\varrho \cos\varphi'.c.\cos(C-t)}{k'.\Pi\varrho \cos\varphi'.b.\cos(B+t)}$$

abgeleitet und dann t genauer nach der Gleichung

$$\sin(B+t) = g\left(1 - \frac{D^\circ \sin\psi}{f.\sin N}\right)$$

berechnet; τ und λ werden ebenso gefunden, wie oben gezeigt ist.

Es lassen sich zwei Werthe von t, also auch von τ und λ erhalten; man muss aber hier, so wie bei der Auflösung anderer Aufgaben auf den Tagbogen Rücksicht nehmen, um solche Stundenwinkel t auszuschliessen, bei welchen die Sonne unter dem Horizonte sich befindet. Will man die Strahlenbrechung in Be-

tracht ziehen, besonders wenn z' nahe an 90° ist, so ist es nöthig, ϱ' oder $\varrho(1+g')$ statt ϱ zu gebrauchen (§ 181).

Oestliche und westliche Grenzcurven.

1) Orte, an welchen die Finsterniss oder eine gegebene Phase derselben am frühesten oder am spätesten gesehen wird.

193. Beim Fortrücken des Mondes kommt der Kegel des Halbschattens, oder des Vollschattens, zur ersten Berührung mit der Oberfläche der Erde in dem Punkte, wo der Anfang der Sonnenfinsterniss (partiellen oder totalen) früher als in allen anderen Orten gesehen wird. Gleich darauf tritt der Kegel in die Erde hinein, um später auszutreten; vor dem gänzlichen Verlassen der Erde gelangt er zur letzten Berührung mit der Erdoberfläche in dem Punkte, wo das späteste Ende der Finsterniss auf der Erde stattfindet. In beiden Fällen liegt die berührende Seite des Kegels im Horizonte des Berührungspunktes und richtet sich zum Sonnenrand, in welchem die Verfinsterung anfängt oder endigt. Der Radius der Erde am Berührungspunkte befindet sich in einer Ebene mit der berührenden Seite und der Achse des Kegels; die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes erscheinen dann nahe am Horizont des Beobachters in der Ebene, welche durch die Sonne und das geocentrische Zenith geht.

Wenn statt des Anfanges oder des Endes der Finsterniss überhaupt, die früheste oder die späteste Erscheinung einer gegebenen Phase zu berechnen ist, so werden dabei dieselben Rechnungsarten angewandt; nur kommt statt des Halbschattenkegels ein anderer Kegel in Betracht, welcher dieselbe Achse und denselben Scheitel hat wie der Halbschattenkegel, aber einen

kleineren Winkel zwischen der Achse und der Seite enthält; die Grösse dieses Winkels hängt von der gegebenen Phase ab.

Es sei P (Taf. VI, Fig. 14) der Nordpol des Aequators an der Himmelssphäre, Z das geocentrische Zenith, S und L die geocentrischen Orte der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes, l der relative scheinbare Ort des Mittelpunktes des Mondes. Der gegebenen Phase entsprechend, werden die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes im scheinbaren Abstande $Sl = \Delta'$ von einander am frühesten gesehen, wenn vor der Cnnjunctionszeit der geocentrische Abstand Δ der Sonne vom Monde so eben die Grösse $\Delta' + \varrho(\pi - \pi')$ erreicht und der Beobachter sich an dem Orte befindet, wo der geocentrische Abstand durch die Differenz der der Horizontalparallaxen $\varrho(\pi - \pi')$ vermindert wird. Die Grenze des verfinsterten Theiles der Sonne befindet sich dann im Horizonte; S, L und l liegen dabei an dem grossen Kreise ZS und der parallactische Winkel $ZSP = v$ ist sowohl dem geocentrischen Positionswinkel $PSL = S$, als auch dem scheinbaren Positionswinkel $PSl = \sigma$ gleich.

Derselbe Umstand findet auch nach der Conjunctionszeit statt, wenn der geocentrische Abstand Δ wieder die Grösse $\Delta' + \varrho(\pi - \pi')$ erreicht und der Beobachter den Punkt einnimmt, wo das späteste Ende der Finsterniss stattfindet.

Es folgt daraus, dass die Gleichungen

$$s = \sigma = v, \; \Delta = \Delta' + \varrho(\pi - \pi'), \; D = \Delta'(1 - \varrho \sin\pi \cos z'),$$
$$x = \Delta \sin S = \Delta \sin v, \; y = \Delta \cos S = \Delta \cos v$$

anzuwenden sind, wenn die Zeit τ des frühesten Anfangs oder des spätesten Endes der gegebenen Phase und die geographische Lage der entsprechenden Punkte gesucht werden.

Man kann hier nahezu $\sin z' = 1$ setzen; wenn die Strahlenbrechung in Rechnung gezogen wird, so geben die allgemeinen Ausdrücke von $D \sin(\sigma - N)$ und $D \cos(\sigma - N)$, § 183 folgende, für den hier zu betrachtenden Fall geltende Gleichungen:

$$sin(v-N) = \frac{-\varepsilon\, sin N}{D+\varrho' \Pi},\ \Pi = \pi - \pi';\ \varrho' = 1{,}0002 . \varrho$$

$$\tau = T - T' - \varepsilon\frac{cos N}{n} + \frac{(D+\varrho' . \Pi)}{n} cos(v-N) \quad . \quad (1).$$

Man bekommt für $v-N$ zwei Werthe, welche demselben $sin(v-N)$ entsprechen; einer von ihnen gehört dem frühesten Anfange und der andere dem spätesten Ende der gegebenen Phase an. Das Zeichen von $cos(v-N)$, positiv oder negativ, muss so angenommen werden, dass die Zeit des Anfanges kleiner als die Zeit des Endes herauskommt.

In unserem Falle ist s' wenig von 90° verschieden und wir können annähernd

$$sin\,\varphi' = cos\,\delta' \, cos v,\ \varrho = 1 - \frac{sin\,2\varphi'}{294{,}33} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$s' = 90° + 34',7 + 23'3\, sin\,\varphi' \, sin\,\delta' \pm \xi',$$

annehmen, wo bei partiellen und totalen Finsternissen das Zeichen (+) dem Anfange und das Zeichen (—) dem Ende der Finsterniss zugehört; in beiden Fällen ist $\xi' = r'$. Bei ringförmigen Finsternissen ist auch $\xi' = r'$, aber das Zeichen (+) entspricht dem Ende und das Zeichen (—) dem Anfange dieser Finsterniss.

Die Aufgabe wird indirect gelöst, indem man vorläufig $\varrho' = 1$ setzt und die Hülfsgrössen δ', Π, $T-T'$, ε u. s. w. für die Zeit τ annähernd annimmt. Bei der Berechnung des frühesten Anfanges einer partiellen Finsterniss kann man für τ die Zeit annehmen, welche zwei Stunden oder eine Stunde der Conjunctionszeit vorangeht, je nach der Grösse von ε oder dem Declinationsunterschiede des Mondes und der Sonne in der Conjunction; für das späteste Ende einer partiellen Finsterniss wird statt τ die Zeit angenommen, welche um zwei Stunden oder um eine Stunde grösser ist als die Conjunctionszeit. Bei der Berechnung von totalen und ringförmigen Finsternissen kann man τ durch die Conjunctionszeit ersetzen. Alsdann werden der Winkel v und die Zeit τ nach den Gleichungen (1), φ', ϱ und s'

nach den Gleichungen (2) bestimmt; man kann also die Hülfsgrössen δ', Π, $T-T'$, ε u. s. w. für die nahezu richtige Zeit τ erhalten und die Rechnung wiederholen, um genaue Werthe von v und von τ zu bekommen.

Die geographische Lage der Punkte, wo der früheste Anfang und das späteste Ende der Phase stattfindet, kann nach folgenden strengen Formeln bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \cos\varphi' \sin t &= \sin z' \sin v \\ \cos\varphi' \cos t &= \cos z' \cos\delta' - \sin z' \sin\delta' \cos v \\ \sin\varphi' &= \cos z' \sin\delta' + \sin z' \cos\delta' \cos v; \end{aligned}$$

östliche geographische Länge $\lambda = t - 15\tau$.

Nennen wir φ_0' und t_0 die Werthe von φ' und t, wenn man $z' = 90°$ annimmt, und setzen

$$\Theta = 34',7 + 23'3 \sin\varphi_0' \sin\delta \pm \xi',$$

so kommt

$$\varphi' = \varphi_0' - \frac{\Theta \sin\delta'}{\cos\varphi_0'}, \quad t = t_0 + \frac{\Theta \cos\delta' \sin t^0}{\cos\varphi_0'}.$$

2) Auf- und Untergangscurven, oder diejenigen, an welchen eine gegebene Phase im Horizont gesehen wird.

194. Ausser den Punkten des frühesten Anfangs und des spätesten Endes der Phase giebt es noch unendlich viele andere Punkte, in welchen die Finsterniss im Horizont, bei aufgehender oder untergehender Sonne beobachtet werden kann. Wenn der Kegel des Halbschattens des Mondes nach und nach in die Erde hineingeht, so kommen immer zwei neue Seiten des Kegels zur Berührung mit der Oberfläche der Erde; eine Seite liegt östlich und die andere westlich von der Ebene, welche durch die Achse des Kegels und durch den Mittelpunkt der Erde geht. An beiden Berührungspunkten kann die Finsterniss im Horizont bemerkt werden; der Mond aber befindet sich dann seitwärts vom grössten Kreise der Himmelssphäre, welcher die Sonne mit dem geocentrischen Zenith verbindet.

Verschiedene Punkte der Erdoberfläche gelangen zu verschiedenen Zeiten paarweise zu solchen Berührungen mit den Seiten des Kegels des Halbschattens oder des Kernschattens des Mondes; sie gehören alle den sogenannten Auf- und Untergangscurven an, weil entweder der Anfang der Finsterniss beim Aufgange und das Ende beim Untergange der Sonne, oder der Anfang beim Untergange und das Ende beim Aufgange der Sonne stattfinden. Diese Curven bezeichnen die westliche und die östliche Grenze der Sonnenfinsterniss auf der Erde.

Die Zeiten der Erscheinung einer gegebenen Phase der Finsterniss im Horizont und die geographische Lage der entsprechenden Punkte lassen sich auf verschiedene Weise berechnen.

1) Es wird zuerst $\varDelta'$ der gegebenen Phase gemäss bestimmt und bei weiteren Rechnungen folgende allgemeine Gleichungen angewandt:

$$D = \varDelta'(1 - \varrho \sin\pi \cos z'),\quad \varrho' = 1{,}0002 \,.\, \varrho,\quad \Pi = \pi - \pi',$$
$$\sin\psi = \frac{-\varepsilon \sin N}{D} + \frac{\Pi \varrho' \sin z' \sin(N - v)}{D} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

oder

$$\sin(N - v) = \frac{D \sin\psi + \varepsilon \sin N}{\Pi \varrho' \sin z'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$\tau = T - T' - \varepsilon \frac{\cos N}{n} + \frac{\Pi \varrho'}{n} \sin z' \cos(N - v) + \frac{D \cos\psi}{n} \quad . \; . \quad (3).$$

Man kann hier nahezu $z' = 90°$ setzen und

$$\sin\varphi' = \cos\delta' \cos v$$

annehmen, was für die Berechnung von $\varrho = 1 - \frac{1}{294{,}3} \cdot \sin^2\varphi'$ eine genügende Annäherung gewährt; hat man also den Werth des Winkels v, so wird man auch ϱ erhalten.

Wir können eine Reihe beliebiger Werthe von v annehmen, die zwischen den Grenzen enthalten sind, welche die Werthe des Winkels v ausdrücken in den Berührungspunkten der süd-

lichen oder nördlichen Grenzcurve mit der westlichen und östlichen Grenzcurve. Da N bekannt ist und nahezu $\sin z' = 1$ ist, so wird jeder Werth des Winkels v, in die Gleichung (1) eingeführt, den Werth des $\sin\psi$ geben, und falls $\sin\psi$ numerisch kleiner als Eins herauskommt, so werden für jedes v zwei entsprechende Werthe des Winkels ψ bestimmt; einer der beiden Werthe von ψ entspricht der westlichen und der andere der östlichen Grenzcurve. Man wird auch aus der Gleichung (3) zwei Werthe für die Zeit τ finden: nämlich die Zeit des Anfanges und die Zeit des Endes der Phase im Horizont.

Um zu entscheiden, welcher Werth von ψ dem Anfange und welcher dem Ende der Phase angehört, so ist in Betracht zu ziehen, dass vom Anfange bis zur Mitte der Sonnenfinsterniss die Mittelpunkte der Sonne und des Mondes näher und näher zu einander kommen, von der Mitte aber bis zum Ende der Finsterniss sich diese Mittelpunkte mehr und mehr von einander entfernen. Der Differentialquotient $\frac{\delta D}{\delta\tau}$ von D in Bezug auf die Zeit muss im ersten Fall negativ und im zweiten positiv sein. Setzen wir zuerst $\sin z' = 1$, differenziiren dann die Gleichungen

$$D\sin\psi = -\varepsilon\sin N + \Pi\varrho'\sin(N-v)$$
$$D\cos\psi = \varepsilon\cos N + n(\tau - T + T') - \Pi\varrho'\cos(N-v)$$

in Bezug auf D, ψ, τ und v (da ε, Π, N, n nahezu als constant zu betrachten sind) und eliminiren $\delta\psi$, so kommt

$$\frac{\delta D}{\delta\tau} = n\cos\psi - \Pi\varrho'\sin(\psi + N - v)\cdot\frac{\delta v}{\delta\tau},$$

wo wir σ statt $\psi + N$ schreiben können, da $\sigma - N = \psi$ ist. Wenn $z' = 90°$ angenommen wird, so entstehen die Gleichungen

$$\cos\varphi'\sin t = \sin v,\ \cos\varphi'\cos t = -\sin\delta'\cos v.$$

Differenziiren wir die erste dieser Gleichungen in Bezug auf t und v, so kommt

$$\cos\varphi'\cos t.\delta t = \cos v.\delta v;$$

dividirt man durch

$$\cos\varphi' \cos t = -\sin\delta' \cos v,$$

so ist

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\sin\delta'.$$

Wenn die Zeit τ in Stunden und der Winkel t in Graden ausgedrückt werden, so hat man

$$\partial t = k'.\partial\tau, \text{ wo } k' = \frac{15}{57{,}296} \text{ ist.}$$

Wir erhalten auf diese Weise

$$\frac{\partial v}{\partial\tau} = k' \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = -k' \sin\delta',$$

$$\frac{\partial D}{\partial\tau} = n \cos\psi + k'.\Pi\varrho' \sin(\sigma - v) \sin\delta'.$$

Zur Zeit der Sonnenfinsterniss ist n immer grösser als $k'.\Pi\varrho'$, und δ' kann nicht 23° 28′ übersteigen, so dass $\sin(\sigma - v)\sin\delta'$ numerisch kleiner bleibt als 0,4; ob also $\frac{\partial D}{\partial\tau}$ negativ oder positiv sein wird, hängt im Allgemeinen davon ab, dass $\cos\psi$ negativ oder positiv ist. Wir haben aber gesehen, dass $\frac{\partial D}{\partial t}$ im Anfange der Finsterniss negativ und am Ende positiv sein muss; es folgt daraus überhaupt, dass bei dem Anfange der Sonnenfinsterniss man

$$\psi > 90° \text{ und } \psi < 270°$$

zu nehmen hat. Am Ende der Finsterniss muss aber

$$\psi < 90° \text{ und } \psi > 270°$$

sein. Diese Regel erleidet eine Ausnahme, wenn ψ nahezu 90° oder 270° ist; man wird dann beide Glieder im Ausdrucke von $\frac{\partial D}{\partial\tau}$ berechnen, um sicher festzustellen, ob $\frac{\partial D}{\partial\tau}$ negativ oder positiv ist.

Wenn numerisch $\sin\psi$ grösser als $\sin(N-v)$ ist, so wird es vortheilhafter sein, ψ als Argument statt v anzunehmen. Substituirt man in die Gleichung (2) einen gehörig gewählten Werth des Winkels ψ, so werden, falls ein reelles Resultat hervorgeht, zwei entsprechende Werthe von $N-v$ bestimmt; einer gehört der westlichen und der andere der östlichen Grenzcurve.

Hat man v gefunden, so sind die genäherten Werthe von φ' und t leicht nach den Gleichungen

$$\sin\varphi' = \cos\delta'\cos v,$$
$$\cos\varphi'\sin t = \sin v, \quad \cos\varphi'\cos t = -\sin\delta'\cos v$$

zu berechnen; um aber φ' und t genau zu erhalten, ist es nöthig, z' oder die wahre Distanz des Mittelpunktes der Sonne vom geocentrischen Zenith zu kennen. Im Horizont befindet sich derjenige Punkt A (Taf. VI, Fig. 15) der Sonnenscheibe, welcher auf der Grenze des verfinsterten Theiles, am nächsten zum Mittelpunkt der Scheibe liegt. Es sei P der Nordpol des Aequators an der Himmelssphäre, Z das scheinbare Zenith des Beobachters, S und l die scheinbaren Orte der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes. Z liegt in der Verlängerung der verticalen geraden Linie nach oben; dann ist der Winkel ZSP nahezu gleich dem parallactischen Winkel v; der Winkel PSl ist gleich dem Winkel, welchen wir mit σ bezeichnet haben; Sl ist der scheinbare Abstand Δ' der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes von einander, Al der scheinbare Halbmesser des Mondes, welcher in der Nähe des Horizonts dem geocentrischen Halbmesser r des Mondes sehr nahezu gleich ist. Im sphärischen Dreieck ASZ sind die Seiten: $ZA = 90°$, $AS = \Delta' - r$ und der Winkel $ASZ = PSl - ZSl = \sigma - v$, wo σ und v von dem nördlichen Theile des Declinationskreises PS der Sonne nach der Seite der zunehmenden Rectascensionen hin, bis zu Sl und ZS gezählt werden. Denken wir den Bogen AB aus A senkrecht auf ZS gezogen, so ist AZ nahezu dem Bogen BZ gleich;

wegen der Kleinheit des Bogens AS kann man $ZS - ZA = BS = AS.\cos ZSl$ annehmen; es ist also

$$ZS - ZA = (\varDelta' - r)\cos(\sigma - v).$$

Nennen wir h' die scheinbare und h die wahre, wegen der Refraction und Parallaxe verbesserte Höhe des Mittelpunktes der Sonne über dem Horizont, so bekommt man

$$h' = -(\varDelta' - r)\cos(\sigma - v) = -(\varDelta' - r)\cos(\psi + N - v),$$
$$h = -(\varDelta' - r)\cos(\psi + N - v) - 34',7.$$

Mithin ist die wahre Distanz z' des Mittelpunktes der Sonne vom geocentrischen Zenith

$$z' = 90° + 34',7 + 23',3 \sin\varphi' \sin\delta' + (\varDelta' - r)\cos(\psi + N - v).$$

Mit Hülfe des genäherten Werthes von φ' kann man z' berechnen und nach den Gleichungen, die am Ende des § 193 angeführt sind, φ' und t genau bestimmen. Setzen wir

$$\Theta' = 34'7 + 23',3 \sin\varphi' \sin\delta' + (\varDelta' - r)\cos(\psi + N - v)$$

und bezeichnen mit φ'_0 und t_0 die Werthe von φ' und t', die in der Annahme von $z' = 90°$ gefunden waren, so ist

$$\varphi' = \varphi'_0 - \frac{\Theta' \sin\delta'}{\cos\varphi'_0}, \quad t = t_0 + \frac{\Theta' \cos\delta' \sin t_0}{\cos\varphi'_0},$$

die geographische Länge $\lambda = t - 15\tau$.

Da δ', $\pi - \pi'$, ε, $T - T'$, N und n veränderlich sind, so sucht man zuerst τ annähernd mit Werthen dieser Hülfsgrössen zur Conjunctionszeit, und nachdem τ nahezu gefunden ist, bestimmt man δ, $\pi - \pi'$, ε u. s. w. für die Zeit τ und wiederholt die Rechnung, um ψ, v und τ genauer zu erforschen.

195. Eine andere Rechnungsart besteht darin, dass man zuerst die geocentrischen Breiten $\varphi'_{,}$ und $\varphi'_{,,}$ der nördlichen und südlichen Grenze berechnet; dann werden

$$\varphi'_{,} - 2°, \quad \varphi'_{,} - 4°, \; \ldots \; \varphi'_{,,} + 4°, \quad \varphi'_{,,} + 2°$$

nach und nach statt φ' angenommen und τ, t, λ gesucht.

Es sei

$$f = -\varepsilon + \Pi\varrho' \sin\varphi' \cos\delta',$$

$$i = \frac{f.\sin N}{D}, \quad g = \frac{f.\sin N}{\Pi\varrho' \cos\varphi'},$$

$$\varrho = 1 - \frac{1}{294,3} \cdot \sin^2\varphi', \quad \varrho' = \varrho . 1,0002;$$

wir erhalten demnach:

$$\cos t^0 = -tg\,\varphi'\,tg\,\delta'; \quad t = t^0 - \frac{\Theta' \cos\delta' \sin t^0}{\cos\varphi'},$$

$$\sin\psi = i\left(1 - \frac{\sin(B+t)}{g}\right),$$

$$\tau = T - T' + \frac{f\cos N}{n} - \frac{\Pi\varrho' \cos\varphi'}{n} \cdot c.\sin(C-t) + \frac{D\cos\psi}{n}.$$

$$\lambda = t - 15\tau.$$

Es entstehen hier vier Auflösungen; jedem *cos t* gehören zwei Werthe von *t* an; und jedem *sin ψ* entsprechen zwei Werthe von *ψ*. Auf diese Weise werden vier Punkte bestimmt: 1) der Punkt, wo der Anfang der gegebenen Phase der Finsterniss, und 2) der Punkt, wo das Ende der Phase beim Aufgange der Sonne stattfinden; 3) der Punkt, wo der Anfang, und 4) der Punkt, wo das Ende der Phase beim Untergange der Sonne stattfinden.

Sind δ' und φ' gleichnamig (beide nördlich oder beide südlich), so gehört der Stundenwinkel *t* dem zweiten Quadranten beim Untergange und dem dritten beim Aufgange der Sonne an; sind dagegen δ' und φ' ungleichnamig, so gehört *t* dem ersten Quadranten beim Untergange und dem vierten Quadranten beim Aufgange der Sonne an. Wissen wir ferner, dass $\psi > 90°$ und $\psi < 270°$ bei dem Anfange und $\psi < 90°$ und $\psi > 270°$ bei dem Ende der Finsterniss ist; mithin wird es leicht sein, die vier erwähnten Punkte von einander zu unterscheiden und ihre Lage zu bestimmen.

3) Punkte, in welchen die nördliche und die südliche Grenzcurve von der westlichen oder östlichen Grenzcurve berührt werden.

196. Die vier zu bestimmenden Punkte werden ermittelt, wenn die Bedingungsgleichung der grössten Phase mit den Gleichungen der Auf- und Untergangscurven verbunden wird. Man hat also

$$tg\,\psi = -\frac{n + k'\Pi\varrho'(\sin z'\sin\delta'\sin(N-v) - \cos z'\sin N\cos\delta'}{k'\Pi\varrho'(\sin z'\sin\delta'\cos(N-v) - \cos z'\cos N\cos\delta')}$$
$$\cos z' = -\sin[34',7 + 23,3\sin\varphi'\sin\delta' + (\varDelta' - r)\cos(\psi + N - v)].$$

Wir können hier $\sin z' = 1$ setzen und im Ausdrucke von $\cos z'$ die genäherten Mittelwerthe 90° und 270° statt ψ annehmen; es ist demnach

$$\cos z' = -\sin 1'(34',7 + 23',3\sin\varphi'\sin\delta') \pm \sin(\varDelta' - r)\sin(N - v),$$

wo das Zeichen (+) für die beiden Berührungspunkte mit der nördlichen und das Zeichen (—) für die beiden Berührungspunkte mit der südlichen Grenzcurve anzuwenden ist.

Man bekommt die beiden Berührungspunkte mit der nördlichen Grenzcurve vermittelst der allgemeinen Gleichungen

$$D = \varDelta'(1 - \varrho'\sin\pi\cos z'),\quad \varrho' = \varrho.1,0002$$
$$\sin(N - v) = \frac{\varepsilon\sin N + D\sin\psi}{\Pi\varrho'\sin z'}$$
$$\tau = T - T' - \frac{\varepsilon\cos N}{n} + \frac{\Pi\varrho'\cos(N - v)}{n} + \frac{D\cos\psi}{n},$$

wo ψ aus dem oben gegebenen Ausdruck von $tg\,\psi$ zu berechnen ist. Man kann zuerst $z' = 90°$, $\varrho' = 1$ und $\psi = 90°$ setzen, um v und τ nahezu aus den Gleichungen

$$\sin(N - v) = \frac{\varepsilon\sin N + \varDelta'}{\pi - \pi'}$$
$$\tau = T - T' - \frac{\varepsilon\cos N}{n} + \frac{(\pi - \pi')\cos(N - v)}{n}$$

zu ermitteln, indem dabei die Werthe von δ', $\pi - \pi'$, ε, $T - T'$, N, n für die Conjunctionszeit angenommen werden. Mit den

gefundenen Werthen von v werden φ' und ϱ nahezu aus den Gleichungen

$$\sin\varphi' = \cos\delta' \cos v\,, \quad \varrho = 1 - \frac{1}{294{,}3}\sin^2\varphi'\,,$$

bestimmt; derselbe Werth von v, in den Ausdruck von $tg\,\psi$ substituirt, dient zur Ableitung von ψ, indem schon der $\cos z'$ berechnet ist und für ψ der am nächsten bei 90° liegende Werth angenommen wird. Hat man die Werthe von D, ϱ', $\cos z'$, ψ, und für die genäherte Zeit τ die Hülfsgrössen δ', $\pi - \pi'$, ε, $T - T'$, N, n gefunden, so wird die Rechnung wiederholt, um die Werthe von v und τ genauer zu erhalten. Dann lassen sich h, φ', t und λ ebenso ermitteln, wie in § 194 erklärt wurde.

Bei der Untersuchung der beiden Berührungspunkte an der südlichen Grenzcurve nimmt man zuerst $\psi = 270°$ an und bestimmt v aus der Gleichung

$$\sin(N - v) = \frac{\varepsilon \sin N - \Delta'}{\pi - \pi'}\,;$$

im Uebrigen wird ebenso verfahren, wie wir oben erwähnt haben.

4) Curve der grössten Phase der Finsterniss im Horizont.

197. Die in § 196 erwähnten vier Berührungspunkte gehören dieser Curve; andere Punkte lassen sich ermitteln, wenn die Bedingungen der grössten Phase und des Eintreffens der Sonnenfinsterniss im Horizont durch Gleichungen ausgedrückt werden. Solche Gleichungen sind die, welche wir im Anfange des § 196 angeführt haben; hier aber kann man v als eine unabhängige Variable, oder als beliebig anzunehmendes Argument betrachten. Für jeden Werth von $N - v$, den man in die Ausdrücke von $tg\,\psi$ und $\cos z'$ einsetzt, werden zwei reelle Werthe von ψ erhalten. Mithin giebt die Gleichung

$$D° = \Delta'(1 - \varrho' \sin\pi \cos z')$$

oder

$$D^{\circ} = \frac{-\varepsilon \sin N + \Pi\varrho' \sin z' \sin(N-v)}{\sin\psi}$$

die correspondirenden Werthe von D°; es müssen nur diejenigen Werthe von ψ ausgeschlossen werden, die einen Werth von D° geben, welcher ausserhalb der Grenzen liegt, die im Verlauf der Finsterniss zulässig sind. Da aus zwei entsprechenden Werthen von $\sin\psi$ einer dem positiven und der andere dem negativen $\sin\psi$ gehört, so muss man einen von diesen beiden Werthen von ψ ausschliessen. Auch der Winkel $N-v$ kann Grenzen haben, wenn es sich ereignet, dass beide gewissen Werthen von $N-v$ entsprechende Werthe von ψ zu solcher Bestimmung von D° führen, welche die möglichen Grenzen von D übersteigen.

Sind einmal die correspondirenden Werthe von v und D° gefunden, so wird man nach bekannten Grundsätzen sowohl die Grösse der Phase, als auch die Werthe von τ, φ', t und λ berechnen können, wie wir gezeigt haben.

Falls die westliche und die östliche Grenzcurve ganz von einander abgesondert werden, so erstreckt sich die Curve der grössten Phase im Horizont im Innern der westlichen und östlichen Grenzcurve in zwei von einander abgesonderten Zweigen.

An beiden Punkten, wo $D^{\circ} = 0$ ist, also auch wo

$$\varepsilon \sin N = \Pi\varrho' \sin z' \sin(N-v)$$

wird, hat man $\sin\psi = \frac{0}{0}$ und die Curve der grössten Phase im Horizont erleidet eine Unterbrechung ihrer Stetigkeit. Da es willkürlich bleibt, in welchem Halbkreise ψ zu nehmen ist, so ergeben sich zwei um 180° verschiedene Werthe von ψ, die den Gleichungen genügen und zu zwei verschiedenen Bestimmungen von φ' und λ führen. An ein Paar der Werthe von φ' und λ knüpft sich der nach Norden gehende Zug unserer Curve und und an das andere der nach Süden gerichtete Zug. Diese

Unterbrechung der Stetigkeit findet nicht statt, wenn die Finsterniss nirgends auf der Erde total oder ringförmig werden kann.

Ueber die Figur der Grenzcurven.

198. Die nördliche und die südliche Grenzcurve bestehen immer aus einem stetigen, in sich zurückkehrenden Zweige und haben keine mehrfachen Punkte; aber nicht die ganze nördliche oder südliche Curve, sondern nur ein Theil derselben bildet die eigentliche Grenzcurve der Finsterniss; der andere Theil fällt in die Nachtseite der Erde. Der Anfangspunkt und der Endpunkt dieser Curven sind die Punkte, in welchen sie von der westlichen und östlichen Grenzcurve berührt werden. Im § 185 haben wir die Fälle erwähnt, in welchen die nördliche und die südliche Grenzcurve beide reell sind, sowie auch die Fälle, in welchen nur eine Grenzcurve, die nördliche oder die südliche, reell bleibt.

Mannigfaltiger ist die Figur der westlichen und östlichen Grenzcurve. Gleich nach der Zeit des frühesten Anfanges der Finsterniss auf der Erde wird eine gewisse Phase derselben, z. B. die äussere Ränderberührung, gleichzeitig an zwei Punkten der Erdoberfläche im Horizont stattfinden. Denken wir uns eine Ebene, die durch den Mittelpunkt der Erde geht und senkrecht zur Achse des Mondhalbschattenkegels steht, so schneidet diese Ebene den Kegel und die Erde, als Kugel betrachtet, in Kreisen, von denen einer der sogenannte Halbschattenkreis ist und seinen Mittelpunkt auf der Achse des Kegels hat; der andere Kreis umfasst die Erde und sein Mittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkte der Erde zusammen. Die beiden Kreise schneiden sich gegenseitig in zwei Punkten, die in gleichen Entfernungen und

auf entgegengesetzten Seiten von der Ebene liegen, die durch die Mittelpunkte der beiden Kreise und die Achse des Kegels geht. Die geocentrischen Orte des Mondes und der Sonne befinden sich in dieser Ebene, die scheinbaren, aus dem einen und dem anderen der erwähnten Punkte gesehenen Orte des Mondes werden auf einer und auf der anderen Seite von dieser Ebene und in gleichen Abständen von derselben beim Aufgange oder Untergange der Sonne bemerkt. Es entstehen auf diese Weise an der Himmelssphäre zwei Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Seite haben und aus Bogen bestehen, welche die geocentrischen und scheinbaren Mondorte mit dem Sonnenorte verbinden.

Es sei MCL (Taf. VI, Fig. 16) die relative geocentrische Bahn des Mondes, M und L die geocentrischen Mondorte vor und nach der Conjunction, S der Sonnenort, PNS der nördliche Theil des Declinationskreises der Sonne und $NS = \varepsilon$ der Unterschied der Declinationen der Mittelpunkte des Mondes und der Sonne zur Conjunctionszeit; dann ist der Winkel $LNP = MNS = N$, und wenn wir SC senkrecht zu LM ziehen, so ist SC der kürzeste Abstand des Mondes von der Sonne im Verlauf der Finsterniss und man hat $SC = NS . \sin MNS$ oder $SC = \varepsilon \sin N$, $NC = \varepsilon \cos N$. Wenn m der scheinbare und M der entsprechende geocentrische Ort des Mittelpunktes des Mondes bedeutet, zu der Zeit, die dem frühesten Anfang der Finsterniss nachfolgt, so hat man bei der Erscheinung der Phase der Finsterniss im Horizont sehr nahezu $Lm = (\pi - \pi')\varrho' = \Pi\varrho'$, $Sm = \Delta'$, $LS = \Delta$, und es bildet sich das Dreieck SMm; in der Verlängerung der Seite Mm liegt das Zenith Z_w des Beobachters, welcher den Mittelpunkt des Mondes in m sieht. Gleichzeitig damit wird auch ein anderer Beobachter dieselbe Phase der Finsterniss im Horizont erblicken, wenn er an einem solchen Punkte der Erdoberfläche sich befindet, aus welchem er den scheinbaren Ort des Mittelpunktes des Mondes in m' sieht, vorausgesetzt, dass $Sm' = \Delta'$ und $Mm' = (\pi - \pi')\varrho' = \pi\varrho'$ ist; es bildet sich

also ein zweites Dreieck SMm', und in der Verlängerung der Seite Mm' liegt das Zenith Z'_w des zweiten Beobachters*).

Vor dem Durchgange des Mondes durch C (Fig. 16) vermindert sich der Abstand $\varDelta$ des Mondes von der Sonne mehr und mehr; nach dem Durchgange vergrössert sich $\varDelta$ fortwährend und es muss zu einer gewissen Zeit $SL = SM$ werden. Nehmen wir $SL = \varDelta$, $Sl = \varDelta' = Sl'$, $Ll = Ll' = \Pi\varrho$ an, so sind l und l' die scheinbaren correspondirenden Orte, L der geocentrische Ort des Mondes, vorausgesetzt, dass Π oder $\pi - \pi'$ der Zeit angehören, zu welcher der Mond in L sich befindet. Alsdann bilden sich zwei Dreiecke SLl und SLl'; in den Verlängerungen der Bögen Ll und Ll' liegen die Zenithe Z_0 und

*) Die Bildung der beiden Dreiecke SMm und SMm', auf entgegengesetzten Seiten des Bogens SM, lässt sich analytisch erklären. Wenn wir die Erde als Kugel betrachten, so ist für die Finsterniss im Horizont $\varDelta' = D$ und die Gleichzeitigkeit derselben Phase giebt folgende Bedingungsgleichung:

$$\Pi\varrho'[\cos(N-v) - \cos(N-v_,)] = D(\cos\psi_, - \cos\psi),$$

wo v, ψ dem einen und $v_,$, $\psi_,$ dem anderen Punkte entsprechen. Man hat auch im Allgemeinen

$$\Pi\varrho'[\sin(N-v) - \sin(N-v_,)] = D(\sin\psi - \sin\psi_,).$$

Da $\psi + N = \sigma$, $\psi_, + N = \sigma_,$ ist, so werden aus diesen Gleichungen folgende abgeleitet:

$$\Pi\varrho'(\cos v - \cos v_,) = D(\cos\sigma_, - \cos\sigma)$$
$$\Pi\varrho'(\sin v - \sin v_,) = D(\sin\sigma_, - \sin\sigma).$$

In unserer Fig. 16 sind: $LS = \varDelta$, $Sl = \varDelta' = D$, $Ll = \Pi\varrho'$; der Winkel $NSl = \sigma$, $NSl' = \sigma_,$, $LSN = S$; bezeichnen wir den Winkel LSl durch ξ, so ist auch der Winkel $LSl' = \xi$; man hat also $\sigma = S - \xi$ und findet

$$\Pi\varrho'(\cos v - \cos v_,) = -D.2\sin S.\sin\xi,$$
$$\Pi\varrho'(\sin v - \sin v_,) = +D.2\sin S.\sin\xi;$$

$\Pi\varrho'$, D, S und ξ können als bekannte Grössen betrachtet werden; wenn v gegeben ist, so kann man auch $v_,$ berechnen, und sowohl das Dreieck SLl, als auch das Dreieck SLl' genügen den Gleichungen, welche die Phase und die Zeit der Finsterniss bestimmen.

Z_o' derjenigen östlichen Punkte der Erdoberfläche, an welchen nach der Conjunctionszeit dieselbe Phase der Finsterniss im Horizont gleichzeitig gesehen wird.

Die Möglichkeit der Bildung zweier correspondirenden Dreiecke setzt die Erfüllung von zwei Bedingungen voraus, dass nämlich $SL < (Ll + Sl)$ und $(SL + Sl) Ll$ oder $SL > (Ll - Sl)$ sein muss, d. h.

$$\Delta < [(\pi - \pi')\varrho' + \Delta'] \text{ und } \Delta > [(\pi - \pi')\varrho' - \Delta'].$$

Diese Grenzen von Δ hängen von dem numerischen Werthe des kürzesten geocentrischen Abstandes $\varepsilon \sin N$ des Mondes von der Sonne im Verlauf der Finsterniss ab; es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden:

1) $\varepsilon \sin N$ ist grösser als $(\pi - \pi')\varrho' - \Delta'$.

199. Die Berührung der Oberfläche des Halbschattenkegels mit der Oberfläche der Erde findet nur statt zur Zeit des frühesten Anfangs und des spätesten Endes der Finsterniss; in beiden Fällen erhält man $\Delta = (\pi - \pi')\varrho' + \Delta'$, und die Dreiecke, von welchen oben die Rede war, können nicht entstehen. Zu jeder anderen Zeit, die zwischen dem frühesten Anfange und spätesten Ende der Finsterniss enthalten ist, wird Δ kleiner als $(\pi - \pi')\varrho' + \Delta'$; aber gemäss der Voraussetzung bleibt Δ immer grösser als $(\pi - \pi')\varrho' - \Delta'$ und die Bildung der Dreiecke wird möglich. Nehmen wir z. B. an, dass ε und δ' beide nördlich sind, so liegt im Westen das Zenith Z_w näher am nördlichen Weltpol P (Fig. 16), als das ihm correspondirende Zenith Z'_w; aber im Osten ist das Zenith Z_o weiter von P entfernt als das Zenith Z'_o. Die Lage von Z_w und Z'_w verändert sich mit der Zunahme der Zeit, und da die Zenithe im Osten eine entgegengesetzte Lage gegen den Weltpol haben als im Westen, so müssen die Curven, welche beide correspondirenden Zenithe Z_w, Z'_w und Z_o, Z'_o an der Himmelssphäre beschreiben, sich in einem zwischenliegenden Punkte gegenseitig schneiden und die Gestalt

einer ausgedehnten und gebogenen 8 annehmen. Dieselbe Figur wird auch die Curve auf der Oberfläche der Erde haben, die durch die Punkte geht, welche jenen Zenithen entsprechen. Der Durchschnittspunkt des einen Zweiges der Curve mit dem anderen Zweige ist ein Doppelpunkt, in welchem entweder der Anfang der Finsterniss bei aufgehender und das Ende bei untergehender Sonne, oder der Anfang bei Untergang und das Ende bei Aufgang der Sonne gesehen wird. Die beiden Zweige zusammengenommen, haben die Figur einer 8 und bilden die westliche und östliche Grenze der Finsterniss oder die sogenannten Auf- und Untergangscurven.

2) $\varepsilon \sin N$ ist kleiner als $(\pi - \pi')\varrho' - \Delta'$.

200. In diesem Fall kann $\Delta = (\pi - \pi')\varrho' + \Delta'$ und $\Delta = (\pi - \pi') - \Delta'$ sein, sowie auch kleiner als $(\pi - \pi')\varrho' - \Delta'$ werden. Zur Zeit des frühesten Anfanges der Finsterniss hat man $\Delta = (\pi - \pi')\varrho' + \Delta'$, die Dreiecke SMm und SMm' (Fig. 16) verwandeln sich dann in eine gerade Linie und man findet einen einzigen Punkt im Westen, wo dieser Anfang sichtbar ist; dadurch wird auch die Lage eines dem Punkte zugehörigen Zeniths bestimmt. Wenn

$$\Delta < [(\pi - \pi')\varrho' + \Delta'] \text{ und } \Delta > [(\pi - \pi')\varrho' - \Delta']$$

ist, so kann dieselbe Phase der Finsterniss an zwei Punkten der Erdoberfläche gleichzeitig im Horizont beobachtet werden; es bilden sich zwei Dreiecke, wie SMm, SMm' (Fig. 16) und jedem solchen Dreiecke entspricht die Lage des Zeniths Z_w und Z'_w im Westen. Erreicht Δ den Werth $(\pi - \pi')\varrho' - \Delta'$, so verwandeln sich wieder die Dreiecke in eine gerade Linie, und da sich im Westen ein einziger Punkt auf der Erde findet, für welchen $\Delta = (\pi - \pi')\varrho' - \Delta'$ ist, so bekommt man die Lage des anderen einzigen Zeniths im Westen. Fällt Δ kleiner als $(\pi - \pi')\varrho' - \Delta'$ aus, so können die erwähnten Dreiecke gar nicht entstehen; nirgends auf der Erde wird man dann die Finsterniss

der Sonne im Horizont sehen können; sie kann nur bei einer gewissen Höhe der Sonne so lange beobachtet werden, bis Δ den Werth von $(\pi-\pi')\varrho'-\Delta'$ nochmals erreicht, was im Osten stattfindet. In diesem Zeitmoment verwandeln sich die Dreiecke wieder in eine gerade Linie, welche die Lage des einzigen Zeniths bestimmt und dem im Osten gelegenen Beobachtungspunkt entspricht. Später wird zum zweiten Mal $\Delta > [(\pi-\pi')\varrho'-\Delta']$ und $\Delta < [(\pi-\pi')\varrho'+\Delta']$, der Mond ist noch weiter nach Osten fortgerückt; es bilden sich zum zweiten Mal die beiden Dreiecke SLl, SLl', welche die Lage der Zenithe Z_0 und Z'_0 zweier Punkte auf der Erde bestimmen, wo dieselbe Phase der Finsterniss gleichzeitig im Horizont sichtbar ist. Zur Zeit des spätesten Endes der Finsterniss überhaupt auf der Erde wird zuletzt $\Delta = (\pi-\pi')\varrho'+\Delta'$; die Dreiecke verwandeln sich wieder in eine gerade Linie, die durch das Zenith des einzigen Punktes geht, in welchem die Finsterniss noch im Horizont beobachtet werden kann.

Aus dem Gesagten folgt, dass die Curve, welche im Westen die Zenithe auf der Himmelssphäre beschreiben, nicht die Curve durchschneiden kann, in welcher die östlichen Zenithe sich befinden. Wenn also $\varepsilon \sin N$ kleiner ist als $(\pi-\pi')\varrho'+\Delta'$, so sind die westliche und östliche Grenze der Finsterniss zwei von einander abgesonderte und in sich zusammenhängende Curven oder Ovale. Das westliche Oval enthält die Punkte, wo die Finsterniss der Sonne im Horizont beobachtet wird bei abnehmenden Werthen von Δ, zwischen $\Delta = (\pi-\pi')\varrho'+\Delta'$ und $\Delta = (\pi-\pi')\varrho'-\Delta'$. Dagegen entspricht das östliche Oval den zunehmenden Werthen von Δ, enthalten zwischen den Grenzen $\Delta = (\pi-\pi')\varrho'-\Delta'$ und $\Delta = (\pi-\pi')\varrho'+\Delta'$. Das westliche Oval bezieht sich auf die Anfangsmomente und das östliche auf die Endmomente der Finsterniss im Horizont. Der erste Punkt des westlichen Ovals ist der, wo der früheste Anfang, und der letzte Punkt des östlichen Ovals ist der, wo das späteste Ende der Finsterniss auf der Erde stattfindet. Der letzte

Punkt des westlichen Ovals und der erste Punkt des östlichen Ovals sind die, für welche $\varDelta = (\pi - \pi')\varrho' - \varDelta'$ ist.

Durchkreuzungspunkt der Auf- und Untergangscurven.

201. Wenn $\varepsilon \sin N > [(\pi - \pi')\varrho' - \varDelta']$ ist, so nehmen diese Curven die Figur einer *8* an und durchschneiden sich unweit des Punktes, wo die grösste Phase der Finsterniss im Horizont zur Zeit des wahren Mittags oder der wahren Mitternacht stattfindet.

Die westlichen und östlichen Zweige der Auf- und Untergangscurve werden in zwei Punkten von der Curve der grössten Phase durchschnitten; diese Punkte und der Durchkreuzungspunkt der beiden Zweige mit einander bilden ein kleines Dreieck, so dass der Unterschied in den geographischen Breiten meistens nur einige Minuten betragen kann.

Die Mitte der Finsterniss im Durchkreuzungspunkte findet dann statt, wenn die Sonne in der oberen oder unteren Culmination nahezu den Meridian erreicht und wenig über den Horizont sich erhebt. Wir haben $\varepsilon = \delta - \delta'$ gesetzt, wo δ die geocentrische Declination des Mondes und δ' die Declination der Sonne bedeuten. Wenn ε und δ' ungleichnamig sind (eine positiv oder nördlich und die andere negativ oder südlich), so ereignet sich die Mitte der Finsterniss nahezu im wahren Mittag, weil die Sonne und das Zenith sich in diesem Fall auf einer und derselben Seite vom sichtbaren Weltpol befinden; die Finsterniss beginnt bei Sonnenaufgang und endigt bei Sonnenuntergang, so dass die Dauer der Finsterniss nahezu dem in Zeit aus-

gedrückten, sogenannten Tagbogen gleich ist. Sind aber ε und δ' gleichnamig, so hat man die Mitte der Finsterniss nahezu um die Zeit der wahren Mitternacht zu erwarten, weil die Sonne und das Zenith sich auf entgegengesetzten Seiten vom sichtbaren Weltpol befinden; man hat dann den Anfang der Finsterniss beim Untergang und das Ende beim Aufgang der Sonne; ihre Dauer ist nahezu dem in Zeit ausgedrückten Nachtbogen gleich.

Es seien $\tau_{,}$ und $\tau_{,,}$ die wahren Zeiten des ersten Meridians beim Anfange und Ende der Finsterniss, $v_{,}$, $\psi_{,}$ und $v_{,,}$, $\psi_{,,}$ die Werthe der Winkel v, ψ zu den Zeiten $\tau_{,}$ und $\tau_{,,}$.

Betrachten wir den Fall, dass ε und δ' ungleichnamig sind, so beziehen sich $\tau_{,}$, $v_{,}$ und $\psi_{,}$ auf den Untergang und $\tau_{,,}$, $v_{,,}$ und $\psi_{,,}$ auf den Aufgang der Sonne; man hat dann $v_{,}$ im ersten und $v_{,,}$ im vierten Quadranten des Kreises zu nehmen; $\cos\psi_{,}$ ist negativ und $\cos\psi_{,,}$ ist positiv. Mithin bekommen wir

$$\sin\psi_{,,} = \frac{-\varepsilon \sin N + \Pi\varrho' \sin(N - v_{,,})}{\sin D},\ \cos\psi_{,,}\ \text{positiv},$$

$$\tau_{,,} = T - T' - \frac{\varepsilon \cos N}{n} + \frac{\Pi\varrho' \cos(N - v_{,,})}{n} + \frac{D\cos\psi_{,,}}{n}.$$

Wegen der sehr kurzen Dauer der Finsterniss werden wir die Aenderung der Declination der Sonne und den Unterschied der Werthe von z' beim Anfange und Ende der Finsterniss unberücksichtigt lassen; es ist dann $v_{,} = 360° - v_{,,}$ und man hat für den Anfang der Finsterniss die Gleichungen

$$\sin\psi_{,} = \frac{-\varepsilon \sin N + \Pi\varrho' \sin(N + v_{,,})}{D},\ \cos\psi_{,}\ \text{negativ},$$

$$\tau_{,} = T - T' - \frac{\varepsilon \cos N}{n} + \frac{\Pi\varrho' \cos(N + v_{,,})}{n} + \frac{D\cos\psi_{,}}{n}.$$

Der halbe Tagbogen, in Zeit ausgedrückt, ist nahezu

$$\tau = \tfrac{1}{15} t = \frac{\tau_{,,} - \tau_{,}}{2} + \frac{\Pi\varrho'}{n} \sin N \sin v_{,,} + \frac{D}{n}(\cos\psi_{,,} - \cos\psi_{,})$$

Ausserdem haben wir noch die Gleichungen

$$\cos\varphi' \sin t = \sin z' \sin v_{,,}$$
$$\cos\varphi' \cos t = \cos\delta' \cos z' - \sin\delta' \sin z' \cos v_{,,}$$
$$\sin\varphi' = \sin\delta' \cos z' + \cos\delta' \sin z' \cos v_{,,}$$
$$z' = 90^\circ + \Theta, \quad \Theta = 34',7 + 23',3 \sin\delta' . \sin\varphi'$$
$$\varrho = 1 - \frac{1}{294,3} \sin^2\varphi', \quad \varrho' = 1,0002 . \varrho.$$

Man kann die Winkel $v_{,,}$, $\psi_{,,}$ und t auf indirectem Wege bestimmen. Da in unserem Fall $v_{,,}$ ein kleiner Winkel ist, so nehmen wir zuerst an $v_{,,} = 2^\circ$ und $v_{,,} = 4^\circ$; unter diesen beiden Voraussetzungen werden die entsprechenden Werthe von $\psi_{,,}$, $\tau_{,,}$ und $\psi_{,}$, $\tau_{,}$ berechnet, sowie $\frac{15}{2}(\tau'' - \tau') = t$ abgeleitet. Nun lassen sich t und φ' mit den angenommenen Werthen von $v_{,,}$ nach den Formeln

$$tg\, t^\circ = -\frac{tg\, v_{,,}}{\sin\delta'}, \quad t = t^\circ - \frac{\Theta \sin t^\circ . \cos t^\circ}{tg\,\delta' \cos v_{,,}},$$
$$\sin\varphi'_\circ = \cos\delta' \cos v_{,,}, \quad \varphi' = \varphi'_\circ - \frac{\Theta . \sin\delta'}{\cos\varphi'_\circ}$$

bestimmen. Die beiden Rechnungsarten werden gewöhnlich nicht miteinander übereinstimmende Resultate geben; nehmen wir an, dass

die erste Rechnungsart	die zweite Rechnungsart
für $v_{,,} = 2^\circ$ giebt $t = a'$	für $v_{,,} = 2^\circ$ giebt $t = b'$
für $v_{,,} = 4^\circ$ giebt $t = a''$	für $v_{,,} = 4^\circ$ giebt $t = b''$;

wenn wir kleine Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen, so können wir annähernd den wahren Werth v von $v_{,,}$ aus den Gleichungen

$$a'' = a' + 120'.x, \qquad b'' = b' + 120'.y,$$
$$t = a' + (v - 2^\circ)'.x, \quad t = b' + (v - 2^\circ)'.y$$

ableiten, wo x und y zu bestimmende Quotienten bedeuten daraus folgt

$$x = \frac{a'' - a'}{120'}, \quad y = \frac{b'' - b'}{120'};$$

hier sind die Unterschiede $a''-a'$ und $b''-b'$ in Minuten auszudrücken. Hat man x und y gefunden, so können auch leicht v und t bestimmt werden; es ist nämlich

$$v = 2^\circ + \frac{(b'-a')'}{x-y}, \quad t = a' + \frac{x}{x-y}\cdot(b'-a')';$$

hier bezeichnet $(b'-a')'$ die Minuten, welche in dem Unterschiede $b'-a'$ enthalten sind.

Wenn es sich trifft, dass v viel von 2° abweicht, so wiederholt man die ganze Rechnung nach der einen und der zweiten Art. Hat man v und t hinlänglich genau ermittelt, so werden dann φ' und die geographische Länge $\lambda = t - 15\tau$ berechnet.

Sind ε und δ' gleichnamig, so findet der Anfang der Finsterniss beim Untergange und das Ende beim folgenden Aufgange der Sonne statt; man hat hier

$$\sin\psi_{,} = \frac{-\eta \sin N + \Pi\varrho' \sin(N-v_{,,})}{D}, \quad \cos\psi_{,} \text{ negativ},$$

$$\tau_{,} = T - T' - \frac{\varepsilon\cos N}{n} + \frac{\Pi\varrho'}{n}\cdot\cos(N-v_{,,}) + \frac{D\cos\psi_{,}}{n},$$

$$\sin\psi_{,,} = \frac{-\varepsilon\sin N + \Pi\varrho'\sin(N+v_{,,})}{D}, \quad \cos\psi_{,,} \text{ positiv},$$

$$\tau_{,,} = T - T' - \frac{\varepsilon\cos N}{n} + \frac{\Pi\varrho'}{n}\cos(N+v_{,,}) + \frac{D\cos\psi_{,,}}{n}.$$

Hier ist $\frac{15}{2}(\tau_{,,}-\tau_{,}) = t$ der Stundenwinkel der Sonne von Mitternacht an gerechnet, und man hat

$$+\cos\varphi'\sin t = \sin z'\sin v_{,,}$$

$$-\cos\varphi'.\cos t = \cos\delta'\cos z' - \sin\delta'\sin z'\cos v_{,,};$$

$$tg\,t_\circ = +\frac{tg\,v_{,,}}{\sin\delta'}, \quad t = t_\circ + \frac{\Theta.\sin t_\circ\cos t_\circ}{tg\,\delta'\cos v_{,,}}.$$

Man erhält $v_{,,}$, $t_{,,}$, $\psi_{,,}$ und φ', λ auf indirectem Wege auf ähnliche Weise, wie oben gezeigt wurde.

Der Ort, an welchem beim Anfange oder beim Ende einer gegebenen Phase der Finsterniss die Sonne im geocentrischen Zenith gesehen wird.

202. In diesem Fall ist $\varphi' = \delta'$, $t = 0$, $v = 0$, $s' = 0$ und

$$\sin\psi = -\frac{s \sin N}{D},$$

$$\tau = T - T' - \frac{s \cos N}{n} + \frac{D \cos\psi}{n},$$

$$\lambda = -15\tau.$$

Hier muss numerisch $D < s \sin N$ sein; $\cos\psi$ ist negativ am Anfange und positiv am Ende der Finsterniss.

Die Curve der centralen Finsterniss; Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit der Finsterniss.

203. Die centrale Finsterniss ist diejenige grösste Phase der Finsterniss, für welche $D = 0$ ist; wir erhalten folglich

$$x = \xi = \Pi \cos\varphi_{,} \sin t,$$
$$y = \eta = \Pi(1-\gamma)\sin\varphi_{,} \cos\delta' - \Pi \cos\varphi_{,} \sin\delta' \cos t,$$

wo $\varphi_{,}$ die reducirte Breite des Beobachtungsortes, t den Stundenwinkel der Sonne bedeuten, und $\gamma = \frac{1}{294{,}3}$ ist.

Um verschiedene Punkte der gesuchten Curve zu bestimmen, wird in der Nähe der Conjunction eine Reihe beliebiger, gleichmässig fortschreitender wahrer Zeiten τ des ersten Meridians so gewählt, dass die entsprechenden Werthe von x und y nicht Π oder $\pi - \pi'$ übersteigen. Für die einzelne Zeit τ dieser Reihe

berechnet man δ', $\pi - \pi' = \Pi$, x und y; die correspondirenden Werthe von $\varphi_{,}$, t und λ werden auf folgende Weise abgeleitet.

Es sei

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_{,}\sin t &= \sin V \\ \cos\varphi_{,}\cos t &= (1-\gamma)\cos V \\ (1-\gamma)\sin\varphi_{,} &= \cos V.\sin W \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\varphi),$$

wo die Hülfswinkel V und W so gewählt werden, dass $\cos V$ und $\cos(W-\delta')$ positiv herauskommen. Man erhält mithin

$$x = \Pi\sin V; \quad y = \Pi(1-\gamma)\cos V\sin(W-\delta'),$$

woraus $\sin V$ und $\sin(W-\delta')$ sich bestimmen lassen, da π, δ', x und y bekannte Grössen bezeichnen; hat man die Winkel V und W gefunden, so ist es leicht, $\varphi_{,}$ und t aus den Gleichungen (φ) zu berechnen; es ist alsdann

$$\lambda = t - 15\tau.$$

Diese bequeme Rechnungsart hat Herr Professor Zech vorgeschlagen; man kann aber auch $\varphi_{,}$ und λ auf eine ähnliche Weise ermitteln, wie in der „Theorie der Sonnenfinsternisse" von Hansen auseinandergesetzt ist.

Für centrale Finsternisse hat man $D = 0$, demnach erhalten wir die Gleichungen:

$$0 = -\varepsilon\sin N + \Pi'(1-\gamma)\sin\varphi_{,}\cos\delta'\sin N \\ \qquad\qquad - \Pi'.\cos\varphi_{,}.b.\sin(B+t)$$

$$\tau = T - T' - \frac{\varepsilon\cos N}{n} + \frac{\Pi'(1-\gamma)}{n}\sin\varphi_{,}\cos\delta'\cos N \\ \qquad\qquad + \Pi'\cos\varphi_{,}.c.\sin(C-t),$$

wo B, b, C, c die frühere Bedeutung haben (§ 183); $\Pi' = \Pi(1+g')$ ist und $1+g'$ aus der Tabelle (§ 181) entnommen wird. Wenn man

$$a.\sin A = b.\sin(B+t)$$
$$a.\cos A = (1-\gamma)\cos\delta'\sin N$$

setzt, so kommt

$$\sin(\varphi_{,} - A) = \frac{s \sin A}{\Pi' a}.$$

Falls t den ganzen Umkreis (360°) durchlaufen kann, so wird eine Reihe beliebiger Werthe von t: 0°, 10°, 20° . . . . . 340°, 350° angenommen und zu jedem gegebenen t werden die entsprechenden Werthe von $\varphi_{,}$ und $\lambda = t - 15\tau$ berechnet. Auf diese Weise lässt sich die Aufgabe leicht und direct lösen.

Wenn aber t nur von einem Minimum bis zu einem Maximum sich erstrecken kann, so wird $\varphi_{,}$ statt t zum Argument gewählt, eine Reihe passender Werthe von $\varphi_{,}$ gebildet und jedem einzelnen $\varphi_{,}$ entsprechend, wird t nach der Gleichung

$$\sin(B + t) = \frac{-s \sin N}{\Pi'.b.\cos\varphi_{,}} + \frac{(1-\gamma)\cos\delta' \sin N \sin\varphi_{,}}{\Pi'.b.\cos\varphi_{,}}$$

berechnet; man bekommt daraus zwei Werthe von t und auch zwei Werthe von λ, da $\lambda = t - 15\tau$ ist.

Um den Anfangspunkt und Endpunkt der centralen Finsterniss zu erhalten, braucht man nur in den Gleichungen der Auf- und Untergangscurven $D = 0$ anzunehmen. Zur Bestimmung des Punktes, wo die centrale Finsterniss am frühesten gesehen wird, und des Punktes, wo diese Finsterniss am spätesten beobachtet wird, können folgende Gleichungen dienen:

$$\sin(v - N) = \frac{-s \sin N}{\Pi \varrho'}, \quad \varrho' = 1{,}0002\,\varrho,$$

$$\tau = T - T' - \frac{-s \cos N}{n} + \frac{\Pi \varrho'}{n} \cos(v - N),$$

$$\cos z' = -\sin 1' (34',7 + 23',3 \sin\varphi_{,} \sin\delta')$$

$$\cos\varphi' \sin t = \sin z' \sin v,$$

$$\cos\varphi' \cos t = \cos z' \cos\delta' - \sin z' \sin\delta' \cos v$$

$$\sin\varphi' = \cos z' \sin\delta' + \sin z' \cos\delta' \cos v$$

$$\lambda = t - 15\tau.$$

Man nimmt zuerst $\cos z' = 0$, $\sin z' = 1$, $\varrho = 1$ an und sucht φ' nach der Gleichung $\sin\varphi' = \cos\delta'.\cos v$; man bestimmt dann ϱ, $\cos z'$ und endlich φ' und λ.

Es werden im Allgemeinen zwei Werthe von $v - N$ bestimmt, einer gehört dem frühesten Anfang und der andere dem spätesten Ende der centralen Finsterniss an; dem ersten entspricht der negative $\cos(v - N)$ und dem zweiten der positive $\cos(N - V)$.

204. Die Dauer einer totalen oder ringförmigen Finsterniss ist so kurz, dass es erlaubt ist, während derselben Π, N, n, δ', B, b, C, c als constant zu betrachten. Wir haben

$$D = r - r'(1 - \sin\pi\cos z') \text{ bei totalen Finsternissen,}$$
$$D = r'(1 - \sin\pi\cos z') - r \text{ bei ringförmigen Finsternissen}$$

anzunehmen. Wenn wir den Winkel ψ durch ψ beim Anfange der Totalität (oder Ringförmigkeit) bezeichnen, so ist $180° + \psi$ der entsprechende Winkel bei dem Ende derselben, da am Anfange solcher Finsterniss der Mittelpunkt des Mondes sich in einer entgegengesetzten Lage in Bezug auf den Mittelpunkt der Sonne befindet, als am Ende derselben; nehmen wir $D\sin\psi$ und $D\cos\psi$ positiv an am Ende der totalen oder ringförmigen Finsterniss, so werden $D\sin\psi$ und $D\cos\psi$ am Anfange der Finsterniss negativ und numerisch gleich gross sein.

Es mögen τ' und τ'' die Werthe von τ; t' und t'' die Werthe des Stundenwinkels t der Sonne am Anfange und am Ende der totalen oder ringförmigen Finsterniss bedeuten; wenn wir

$$E = -\varepsilon\sin N + \Pi'.(1-\gamma)\sin\varphi_{,}\cos\delta'\sin N,$$
$$F = \varepsilon\cos N + n(T' - T) - \Pi'(1-\gamma)\sin\varphi_{,}\cos\delta'\cos N$$

setzen, so sind E und F als constante Grössen zu betrachten. Die bekannten allgemeinen Gleichungen können hier in folgender Gestalt ausgedrückt werden:

$$-D\sin\psi = E - \Pi'.\cos\varphi, b.\sin(B + t')$$
$$+D\sin\psi = E - \Pi'\cos\varphi, b.\sin(B + t'')$$
$$-D\cos\psi = F + \Pi'\cos\varphi, c.\sin(C - t') + n\tau'$$
$$+D\cos\psi = F + \Pi'\cos\varphi, c.\sin(C - t'') + n\tau''.$$

Ziehen wir eine dieser Gleichungen von der anderen gleichartigen ab, drücken $\tau'' - \tau'$ in Zeitsecunden, $t'' - t'$ in Bogensecunden aus und machen $\frac{t' + t''}{2} = t$, so kommt

$$2D\sin\psi = -\Pi'\cos\varphi, b\cos(B + t).15\sin 1''.(\tau'' - \tau'),$$
$$2D\cos\psi = n(\tau'' - \tau') - \Pi'\cos\varphi, c\cos(C - t).15\sin 1''(\tau'' - \tau).$$

Diese Gleichungen geben

$$\tau'' - \tau' = \frac{2D\cos\psi}{n - \Pi'\cos\varphi, c.\cos(C - t)\,15\sin 1''}$$
$$tg\,\psi = \frac{\Pi'\cos\varphi,.b.\cos(B + t)\,15\sin 1''}{n - \Pi'\cos\varphi,.c.\cos(C - t)\,15\sin 1''}.$$

Der Winkel ψ ist so anzunehmen, dass $\cos\psi$ positiv wird, wenn Δ' positiv ist und negativ, wenn Δ' negativ ist; übrigens fällt bei totalen oder ringförmigen Finsternissen der Winkel ψ so klein aus, dass man immer $\cos\psi = 1$ annehmen kann; um die Dauer solcher Finsternisse anzugeben, braucht man also den Winkel ψ gar nicht zu berechnen. Ungefähr senkrecht zur Curve der centralen Finsterniss geht die Curve, auf welcher die grösste Phase im wahren Mittage oder in der wahren Mitternacht gesehen wird.

Zusammenstellung der Formeln und Beispiel: Vorausberechnung der Sonnenfinsterniss am 18. August 1887.

205. Wenn der Verlauf einer Sonnenfinsterniss nur ungefähr angegeben werden soll, so kann man die Erde als eine Kugel von mittlerem Halbmesser betrachten (oder $\varrho = 1 - \frac{1}{600}$ setzen) und δ', $\pi - \pi' = \Pi$, N, n, ε, B, b, C, c als nahezu constant und gleich ihren Werthen zur Conjunctionszeit annehmen; vierstellige Logarithmen sind für die auszuführenden Rechnungen hinlänglich. Die dadurch verursachten Fehler werden nicht sehr erheblich sein; falls eine grössere Genauigkeit verlangt wird, so ist es doch vortheilhaft, mit solchen vorläufigen Rechnungen anzufangen und später bessere Resultate zu suchen. Um die Correctionen zu erhalten, ist es nöthig, die Rectascensionen und Declinationen des Mondes und der Sonne, die Parallaxen und Halbmesser des Mondes, die Coordinaten x, y und die Hülfsgrössen $T - T'$, ε, N, $\log n$, B, $\log b$, C, $\log c$ von Stunde zu Stunde zu berechnen, wie in unserem Beispiele angezeigt wird; dabei ist es hinreichend fünfstellige Logarithmen zu gebrauchen. Sind schon der Anfang und das Ende der Phasen der Verfinsterung für verschiedene Orte auf der Erdoberfläche nahezu bekannt, so wird man die diesen Zeiten entsprechenden Werthe von δ', x, y, ε, $T - T'$, N, n u. s. w. durch Interpolation finden und hiemit die Momente der Phasen genauer bestimmen können.

Wir verdanken dem Herrn Lieutenant von Rediger die Vorausberechnung der Sonnenfinsterniss vom 18. August 1887; es wurden dabei die Mondtafeln von Hansen und die Sonnentafeln von Leverrier benutzt; es wäre zu weitläufig, alle Details der Rechnungen hier mitzutheilen, wir begnügen uns mit den Hauptmomenten der Rechnung.

Elemente der Finsterniss für mittlere Pariser Zeit.

Zeit	AR des Mondes $= \alpha$	AR der Sonne $= \alpha'$	Decl. des Mondes $= \delta$ nördlich	Decl. der Sonne $= \delta'$ nördlich
15^h	146° 39′ 32″,2	148° 2′ 16″,9	+ 13° 55′ 6″,2	+ 12° 55′ 51″,3
16	147 16 13 ,8	4 34 ,6	46 4 ,0	55 2 ,5
17	147 52 53 ,4	6 56 ,0	36 56 ,2	54 13 ,7
18	148 29 31 ,5	9 15 ,5	27 42 ,8	53 24 ,9
19	149 6 8 ,1	11 34 ,9	18 23 ,8	52 36 ,1
20	149° 42′ 43″,8	148° 13′ 54″,4	+ 13° 8′ 59″,2	+ 12° 51′ 47″,2

Zeit	Zeitgleichung (—)	Mondhalbmesser $= r$	Sonnenhalbmesser $= r'$	Aequ. Mondparallaxe $= \pi$	Sonnenparallaxe $= \pi'$
15^h	$3^m 35^s,07$	16′ 25″,5		1° 0′ 10″,6	
17	33 ,97	26 ,1	15′ 48″,67	13 ,0	8″,7
19	32 ,86	26 ,8		15 ,4	
21	$3^m 31^s,75$	16′ 27″,4		1° 0′ 17″,6	

Diese Mond- und Sonnenorte sind geocentrische; die Zeitgleichung ist hier von der mittleren Zeit abzuziehen, um die wahre Zeit zu erhalten. Die geocentrische Conjunctionszeit des Mondes mit der Sonne in Rectascension (AR) findet am 18. August 1887 statt um $17^h 24^m 39^s,6$ mittlere Pariser Zeit, oder um $17^h 21^m 5^s,8$ wahre Pariser Zeit; mithin ist auch zu dieser Zeit $T - T' = 17^h 21^m 5^s,8 = 17^h 35161$ in Stunden ausgedrückt.

Berechnung der Coordinaten x und y in Secunden; Bestimmung der Hülfsgrössen:

$$x = (\alpha - \alpha') \cos \delta [\cos(\alpha - \alpha')]^{\frac{1}{2}}.$$

$$y = (\delta - \delta')[\cos(\delta - \delta')]^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} \sin 1''. \frac{\sin \delta'}{\cos \delta} \cdot x^2,$$

$$n \sin N = \frac{x - x^\circ}{T - T'}, \quad n \cos N = \frac{y - y_0}{T - T'},$$

x und y sind die Werthe der Coordinaten zur Zeit T, x° und y° sind ihre Werthe zur Zeit T'; T ist die laufende wahre Pariser Zeit, T' ist die wahre Pariser Zeit, gewählt nahe an der Conjunction; $T - T'$ wird in Stunden ausgedrückt.

$$b \cdot \sin B = \sin \delta' \sin N, \quad c \cdot \sin C = \sin \delta' \cos N,$$
$$b \cdot \cos B = \cos N, \quad c \cdot \cos C = \sin N,$$

N, n, B, b, C, c gelten für die Zeit $\frac{1}{2}(T + T')$.

$T = 15^h - 3^m 35^s{,}1$	$16^h - 3^m 34^s{,}5$	$17^h - 3^m 34^s{,}0$	$18^h - 3^m 33^s{,}4$	$19^h - 3^m 32^s{,}9$	$20^h - 3^m 32^s{,}3$
$x = -4817''{,}9$	$-2819''{,}1$	$-818''{,}9$	$+1182''{,}6$	$+3185''{,}2$	$+5188''{,}6$
$y = +3567''{,}8$	$+3065''{,}9$	$+2562''{,}8$	$+2058''{,}6$	$+1558''{,}3$	$+1046''{,}9$
$T = 15^h 30^m - 3^m 34^s{,}8$	$16^h 30^m - 3^m 34^s{,}3$	$17^h 30^m - 3^m 33^s{,}7$	$18^h 30^m - 3^m 33^s{,}2$	$19^h 30^m - 3^m 32^s{,}6$	$20^h 30^m - 3^m 32^s{,}0$
$N = 104° 5'{,}7$	$104° 7'{,}1$	$104° 8'{,}4$	$104° 9'{,}7$	$104° 11'{,}1$	$104° 12' 8$
$Log\, n = 3{,}31405$	$3{,}31439$	$3{,}31471$	$3{,}31499$	$3{,}31522$	$3{,}31538$
$T' = -1^h{,}9103$	$-0^h{,}9093$	$+0^h{,}0910$	$+1^h{,}0907$	$+2{,}0900$	$+3{,}0893$
$\varepsilon = +2357''{,}5$	$+2356''{,}3$	$+2356''{,}4$	$+2356''{,}6$	$+2358''{,}8$	$+2360''{,}6$
$B = 138° 18'{,}5$	$138° 23'{,}1$	$138° 27'{,}5$	$138° 32'{,}0$	$138° 36'{,}8$	$138° 42'{,}2$
$Log\, b = 9{,}51348{-}10$	$9{,}51357$	$9{,}51371$	$9{,}51380$	$9{,}51394$	$9{,}51433$
$C = -3° 12'{,}9$	$-3° 13'{,}0$	$-3° 13'{,}1$	$-3° 13'{,}2$	$-3° 13'{,}3$	$-3° 13'{,}4$
$Log\, c = 9{,}98740{-}10$	$9{,}98736$	$9{,}98736$	$9{,}98728$	$9{,}98723$	$9{,}98718$

Für partielle Finsterniss (äussere Ränderberührung):

$$D = r + r'(1 - \varrho \sin \pi \cos z')$$

Totale Finsterniss / Ringförmige Finsterniss (innere Ränderberührungen):

$$D = r - r'(1 - \varrho \sin \pi \cos z') \qquad D = r'(1 - \varrho \sin \pi \cos z')$$

$$\Pi = \pi - \pi'; \quad \varrho' = 1{,}0002 \cdot \varrho.$$

Die beiden Orte, welche die äusseren Ränderberührungen zuerst und zuletzt sehen.

$$sin(v-N) = \frac{-\varepsilon\, sin N}{D+\Pi\varrho'},\quad sin\varphi'_0 = cos\delta' cos v,$$

$$tg t^0 = \frac{sin v}{-cos v\, sin\delta'};$$

$$\tau = T - T' - \frac{\varepsilon\, cos N}{n} + \left(\frac{D+\Pi\varrho'}{n}\right) cos(v-N);$$

$cos(v-N)$ ist für den Anfang negativ, für das Ende positiv.

$$\Theta = 34',7 + 23',3 sin\varphi'_0 sin\delta' \pm r',$$

für den Anfang (+), für das Ende (—).

$$\varphi' = \varphi'_0 - \frac{\Theta\, sin\delta'}{cos\varphi'_0},\quad t = t_0 + \frac{\Theta' cos\delta' sin t^0}{cos\varphi'_0}$$

$$\lambda = t - 15\tau \quad . \ . \ . \quad \text{(östliche Länge)}.$$

In unserem Beispiel ist der Punkt

des frühesten Anfanges:	des spätesten Endes:
$\varphi' = +37°5'$, $\lambda = 31°19'$;	$\varphi' = +9°54'$;
wahre Pariser Zeit $15^h 11^m$.	wahre Pariser Zeit $20^h 4^m,5$.

Westlich-östliche Grenze der äusseren Ränderberührungen (entsprechende Auf- und Untergangscurve).

V, oder $N-v$ Argument,

$$sin\psi = -\frac{\varepsilon\, sin N + \Pi\varrho' sin z' sin(N-v)}{D},$$

$$\tau = T - T' - \frac{\varepsilon\, cos N}{n} + \frac{\Pi\varrho' sin z' cos(N-v)}{n} + \frac{D\, cos\psi}{n},$$

φ'_0 und t_0 werden ebenso gerechnet, wie oben gezeigt ist.

$$z' = 90° + \Theta',\ \Theta' = 34',7 + 23',3 sin\varphi'_0 sin\delta' + r' cos(\psi + N - v),$$

für den Anfang der Finsterniss: $\psi > 90°$ und $\psi < 270°$,
für das Ende der Finsterniss: $\psi < 90°$ und $\psi > 270°$.

Bei Sonnenaufgang ist t negativ, bei Untergang positiv, numerisch kleiner als 180°. Die Grenzen des Arguments $N-v$

sind die Werthe von $N-v$ in den Berührungspunkten der südlichen oder nördlichen Grenzcurve mit der westlichen und östlichen Grenzcurve. In unserem Beispiel sind die Grenzen des Arguments

$$N-v = 5^\circ 35' \text{ und } N-v = 174^\circ 26'$$

$$\varphi' = \varphi'_\circ - \frac{\theta' \sin\delta'}{\cos\varphi'_\circ}, \quad t = t_\circ + \frac{\theta' \cos\delta' \sin t_\circ}{\cos\varphi'_\circ};$$

$$\lambda = t - 15\tau.$$

Alle Rechnungselemente gehören zur Zeit τ; die Länge λ ist östlich von Paris gezählt. In unserem Beispiel geht die westlich-östliche Grenzcurve durch folgende Punkte:

$\varphi' =$	$+19^\circ 11'$	$+30^\circ 30'$	$+42^\circ 31'$	$+55^\circ 58'$	$+72^\circ 8'$	$+70^\circ 31'$
$\lambda =$	$27^\circ 48'$	$33^\circ 2'$	$28^\circ 49'$	$17^\circ 26'$	$340^\circ 44'$	$238^\circ 55'$
$\varphi' =$	$+48^\circ 6'$	$+29^\circ 17'$	$+15^\circ 18'$	$+3^\circ 5'$	$-8^\circ 21',4$	$-8^\circ 21',6$
$\lambda =$	$202^\circ 12'$	$188^\circ 57'$	$180^\circ 42'$	$172^\circ 51'$	$159^\circ 42'$	$156^\circ 45'$
$\varphi' =$	$+3^\circ 8'$	$+15^\circ 15'$	$+29^\circ 14'$	$+48^\circ 5'$	$+70^\circ 30'$	$+72^\circ 10'$
$\lambda =$	$150^\circ 50'$	$152^\circ 54'$	$160^\circ 20'$	$177^\circ 41'$	$218^\circ 7'$	$349^\circ 12'$
$\varphi' =$	$+56^\circ 1'$	$+42^\circ 33'$	$+30^\circ 32'$	$+19^\circ 12'$		
$\lambda =$	$349^\circ 12'$	$1^\circ 36'$	$11^\circ 3'$	$25^\circ 3'$		

(+) bedeutet die nördliche, (—) die südliche geocentrische Breite.

Nördliche und südliche Grenzcurve der äusseren Ränderberührungen.

1. τ Argument, von der Zeit des frühesten Anfanges bis zur Zeit des spätesten Endes.

Nördliche Grenze	Südliche Grenze
$\sin V = \frac{x - D\cos N'}{\Pi\varrho}$,	$\sin V = \frac{x + D\cos N'}{\Pi\varrho}$,
$\sin(W-\delta') = \frac{y + D\sin N'}{\Pi\varrho}$,	$\sin(W-\delta') = \frac{y - D\sin N'}{\Pi\varrho}$;

$\cos V$ und $\cos(W-\delta')$ müssen positiv sein.

$$tg(N'-N) = \frac{k'\Pi\varrho\cos\varphi'.b\cos(B+t)}{n-k'\Pi\varrho\cos\varphi'.c\cos(C-t)};\quad \log k' = 9{,}41797^{-10}.$$

$$\cos\varphi'\sin t = \sin V;\qquad \sin\varphi' = \cos V\sin W$$

$$\cos\varphi'\cos t = \cos V\cos W\qquad \lambda = t - 15\tau.$$

Zuerst werden V, W, φ' und t in der Voraussetzung $N' = N$ und $\varrho = 1$ berechnet; mit diesen beiläufigen Werthen von φ' und t wird $N'-N$ bestimmt und mit dem gefundenen Werthe von N' wird die ganze Rechnung wiederholt, um V, W, ϱ, φ' und t genauer zu erhalten.

2. Grenzbreite: φ'_0

$$\sin(\varphi'_0 \mp A') = \frac{\varepsilon\sin N \mp D}{\Pi\varrho},$$

$$tg A' = \pm\frac{tg\,\delta'}{\sin B},\quad t = 90^\circ - B \text{ oder } 270^\circ - B,$$

jenachdem $\sin(B+t)$ positiv oder negativ herauskommt; es ist ferner

$$f = -\varepsilon + \Pi\varrho\sin\varphi'_0\cos\delta',$$

$$\tau = T - T' + \frac{f\cos N}{n} - \Pi\varrho\cos\varphi'_0\sin(C-t),$$

$$\lambda = t - 15\tau.$$

Man nimmt nun φ' zum Argument und bestimmt für jeden der Werthe von φ', welche innerhalb der zulässigen Grenzen liegen, die entsprechendenden Werthe von t, τ und λ nach den Formeln:

$$g = \frac{f.\sin N}{\Pi\varrho\cos\varphi'.b},\quad f = -\varepsilon + \Pi\varrho\sin\varphi'\cos\delta',$$

$$\sin(B+t) = g\left(1 - \frac{D\sin\psi}{f.\sin N}\right);$$

$$tg\,\psi = \frac{n - k'.\Pi\varrho\cos\varphi'.c.\cos(C-t)}{k'\Pi\varrho\cos\varphi'.b.\cos(B+t)},\quad \log k' = 9{,}41797^{-10};$$

$$\tau = T - T' + \frac{f\cos N}{n} - \frac{\Pi\varrho\cos\varphi'}{n}.c.\sin(C-t) + \frac{D\cos\psi}{n},$$

$$\lambda = t - 15\tau.$$

Alle Hülfsgrössen gelten für die Zeit τ. Man setzt zuerst $\psi = 90°$ für die nördliche und $\psi = 270°$ für die südliche Grenzcurve; man rechnet damit t annähernd, bestimmt ψ und wiederholt die Rechnung, um t und τ genauer zu bekommen.

In unserem Beispiel ist die nördliche Grenze imaginär; die südliche Grenze geht durch folgende Punkte:

$$\varphi'_{o} = +24°38' \text{ (nördlich)}, \lambda = 69°19',$$

$\varphi' = +20°$	$+24°$	$+24°$	$+20°$	$+15°$
$\lambda = 31°29'$	$53°\ 4'$	$78°14'$	$91°27'$	$102°14'$
$\varphi' = +10°$	$+\ 5°$	$0°$	$-\ 5°$	$-\ 8°$
$\lambda = 111°21'$	$120°32'$	$131°23'$	$144°27'$	$155°12'$

Die Punkte, in welchen die nördliche oder die südliche Grenzcurve von der westlichen oder östlichen Grenzcurve berührt werden.

In unserem Beispiel ist die nördliche Grenze imaginär; für die südliche Grenzcurve kann ψ nicht viel von 270° abweichen; man wird also bei der vorläufigen Rechnung $\psi = 270°$ setzen können.

Nach den Formeln des § 196 erhalten wir

für den Berührungspunkt

der südlichen Grenzcurve mit der westlichen Grenzcurze	der südlichen Grenzcurve mit der östlichen Grenzcurve
$\psi = 264°17'$, $t = 264°47'$,	$\psi = 275°34'$, $t = 88°39'$
reducirte Breite $\varphi_{,} = +\ 19°7'$	$\varphi_{,} = -8°33'$
östliche Länge von $P..\lambda = 27°50'$	$\lambda = 156°47'$
wahre Par. Zeit $= \tau = 15^h 47^m,8$	$\tau = 19^h 27^m,5$
$N-v = 174°26'$	$N-v = 5°35'$

Curve der grössten Phase im Horizont (äussere Ränderberührungen).

$N-v$ Argument; da N bekannt ist, so hat man auch v;

$$\sin\varphi'_{o} = \cos\delta' \cos v,\quad tg\, t° = \frac{+\sin v}{-\cos v \sin\delta'}$$

$$z' = 90° + 34',7 + 23',3 \sin\varphi'_{o} \sin\delta' \pm r'.\sin(N-v)$$

(—) wenn ψ nahe an 90°, und (+) wenn ψ nahe an 270° ist. Die Grenzen des Arguments $N-v$ sind offenbar die Werthe von $N-v$ in den Berührungspunkten der südlichen oder nördlichen Grenzcurve mit der westlichen und östlichen Grenzcurve; in unserem Beispiel sind die Grenzen des Arguments $N-v = 5°35'$ und $N-v = 174°26'$.

Setzen wir $\sin z' = 1$, was keine erheblichen Fehler verursacht, so ist

$$tg\,\psi = \frac{-n + k'\Pi\varrho'[\sin\delta'\sin(N-v) - \cos z'\cos\delta'\sin N]}{k'\Pi\varrho'[\sin\delta'\cos(N-v) - \cos z'\cos\delta'.\cos N]};$$

$$D° = \frac{-\varepsilon\sin N + \Pi\varrho'\sin(N-v)}{\sin\psi}; \quad \varrho' = \varrho.1{,}0002;$$

$$\tau = T - T' - \frac{\varepsilon\cos N}{n} + \frac{\Pi\varrho'}{n}\cos(N-v) + \frac{D°\cos\psi}{n};$$

$$z' = 90° + \Theta', \quad \varphi' = \varphi'_0 - \frac{\Theta'\sin\delta'}{\cos\varphi'_0};$$

$$t = t° + \frac{\Theta'\cos\delta'\sin t_0}{\cos\varphi'_0}, \quad \lambda = t - 15\tau.$$

In unserem Beispiel ist die Curve der äusseren Ränderberührungen, als die grösste Phase im Horizont, durch folgende Punkte bestimmt:

$\varphi' =$	+ 19° 11′	+ 30° 31′	+ 42° 32′	+ 56° 0′	+ 72° 9′	+ 70° 30′
$\lambda =$	26° 26′	22° 4′	15° 15′	3° 10′	328° 26′	228° 30′
$\varphi' =$	+ 48° 6′	+ 29° 16′	+ 15° 17′	+ 3° 4′	− 8° 22′	
$\lambda =$	189° 57′	174° 57′	167° 4′	161° 51′	158° 12′	

Die Grenzen der totalen Finsterniss werden auf dieselbe Weise berechnet; man braucht dazu nur

$$D = r - r'(1 - \varrho\sin\pi\cos z')$$

anzunehmen.

Die beiden Orte, welche die centrale Finsterniss zuerst und zuletzt sehen.

$$\sin(N-v) = \frac{\varepsilon\sin N}{\Pi\varrho'}, \quad \varrho' = \varrho.1{,}0002$$

$$\tau = T - T' - \frac{\varepsilon\cos N}{n} + \frac{\Pi\varrho'}{n}\cos(N-v)$$

$$\sin\varphi'_0 = \cos\delta'\cos v; \quad tg\,t_0 = \frac{+\sin v}{-\cos v\,.\sin\delta'}$$

$$\Theta = 34',7 + 23',3\sin\varphi'_0\sin\delta$$

$$\varphi' = \varphi'_0 - \Theta\cdot\frac{\sin\delta'}{\cos\varphi'_0}, \quad t = t_0 + \frac{\Theta\cos\delta'\sin t_0}{\cos\varphi'_0},$$

$$\lambda = t - 15\tau.$$

In unserem Beispiel ist der Punkt

des frühesten Anfanges	des spätesten Endes der centralen Finsterniss
$\varphi' = +51°25'$	$\varphi' = +\ 24°20'$
$\lambda = \quad 7°46'$;	$\lambda = \quad 171°56'$
wahre Pariser Zeit $16^h 16^m,9$;	$18^h 58^m,8$.

Curve der centralen Finsterniss.

τ Argument.

$$\sin V = \frac{x}{\Pi\varrho'}, \quad \cos V \text{ positiv},$$

$$\sin(W-\delta') = \frac{y}{\Pi\varrho'\cos V}, \quad \cos(W-\delta') \text{ positiv},$$

$$\cos\varphi'\sin t = \sin V, \qquad \sin\varphi' = \cos V\sin W$$

$$\cos\varphi'\cos t = \cos V\cos W, \qquad \lambda = t - 15\tau.$$

In unserem Beispiel geht die Curve durch folgende Punkte:

$\varphi' =$	$+57°48'$	$58°\ 5'$	$53°27'$	$47°\ 0'$	$39°\ 6'$	$27°28'$
$\lambda =$	$41°40'$	$80°22'$	$103°16'$	$119°41'$	$134°47'$	$160°50'$
$\tau =$	$16^h 30^m$	$17^h\ 0^m$	$17^h 30^m$	$18^h\ 0^m$	$18^h 30^m$	$19^h\ 0^m$

Centrale Finsterniss im wahren Mittag.

τ Argument $= T - T' = 17^h 21^m 5^s,8$ wahre Pariser Zeit

$$\sin(\varphi' - \delta') = \frac{\varepsilon}{\Pi\varrho}$$

$$\lambda = -15(T - T') \text{ oder } 360° - 15(T - T')$$

$$\varphi' = 53°49'; \quad \lambda = 99°53'.$$

Verlauf der Finsterniss an einem gegebenen Orte (in St. Petersburg, äussere Ränderberührungen).

Polhöhe $= +59°56',5$; $\varphi' = 59°46',5$; $\log\varrho = 9{,}99891$.

Oestliche Länge von Paris $= 1^h 51^m 53^s$

$$D = r + r'(1 - \varrho \sin\pi \cos z'); \; \Pi = \pi - \pi'$$
$$m' \sin M' = n \sin N(\tau_0 - T + T') - \Pi\varrho \cos\varphi' \sin t_0$$
$$m' \cos M' = \varepsilon + n \cos N(\tau_0 - T + T') - \Pi\varrho \sin\varphi' \cos\delta' + \Pi\varrho \cos\varphi' \sin\delta' \cos t_0$$
$$n' \sin N' = n \sin N - k' \Pi\varrho \cos\varphi' \cos t_0$$
$$n' \cos N' = n \cos N - k' \Pi\varrho \cos\varphi' \sin\delta' \sin t_0$$
$$\log k' = 9{,}41797^{-10},$$

wo τ_0 eine der gesuchten möglichst nahe wahre Zeit des Meridians der Ephemeride bedeutet und t_0 der entsprechende Stundenwinkel der Sonne an gegebenen Ort ist.

$$\sin\psi' = \frac{m' \sin(M' - N')}{D}$$
$$\tau = \tau_0 - \frac{m'}{n'} \cos(M' - N') + \frac{D \cos\psi'}{n'};$$

$\cos\psi'$ ist negativ für den Anfang und positiv für das Ende der Finsterniss.

Maximum der Finsterniss:

$$\tau = \tau_0 - \frac{m'}{n'} \cos(M' - N')$$
$$D^\circ = \pm \frac{m'}{n'} \sin(M' - N')$$
$$d = \frac{D^\circ - r}{r'(1 - \varrho \sin\pi \cos z')}$$

grösste Phase $= (6 - 6 \,.\, d)$ Zoll.

In dem Ausdruck von D° ist das Zeichen $(+)$ oder $(-)$ zu nehmen, je nachdem $\sin(M' - N')$ positiv oder negativ ist.

Die Punkte am Umfange der Sonnenscheibe, in welchen die Sonne vom Monde berührt wird, werden in Bezug auf den Declinationskreis der Sonne von Norden nach Osten gezählt und durch den Winkel $N' + \psi'$ bestimmt, welcher zwei Werthe hat, einen für

den Anfang und den anderen für das Ende der Finsterniss. Wie die Rechnung zu führen ist, wurde in § 182 erklärt. In unserem Beispiel findet man für St. Petersburg:

Anfang der Finsterniss	Ende der Finsterniss
mittlere St. Petersburger Zeit	
$17^h 25^m,1$	$19^h 20^m,9$ am 17. August 1887
$N' + \psi' = 275°,6$	$107°,2$
$z' = 83° 45'$	$69° 17'$

grösste Phase $= 9',5$ Zoll.

Allgemeine Bemerkungen über die Beobachtungen von Sonnenfinsternissen und Sternbedeckungen; sowie von der Wichtigkeit einiger Umstände, welche diese Erscheinungen begleiten.

206. Um die Beobachtungen mit Genauigkeit anstellen zu können, muss man vorher nicht bloss die Zeit des Anfanges und des Endes für die verschiedenen Phasen der Verfinsterung wissen, sondern auch den Ort, in welchem die Erscheinung auf dem scheinbaren Rande der Sonne, oder bei Sternbedeckungen auf dem des Mondes stattfinden wird; die Methoden, die man hierbei befolgen muss, haben wir schon früher erläutert. Wenn der Beobachter ein Fernrohr braucht, welches keine Fäden hat und sich nur vertical und horizontal bewegen lässt, so muss man den Punkt des Randes des Gestirnes bestimmen, in welchem sich die gegebene Phase der Verfinsterung ereignen wird, indem man hierbei diesen Punkt vom obersten Theile des Randes des Gestirnes abzählt, wie wir es schon früher auseinandergesetzt haben. Alsdann ist es am bequemsten, sich eine kleine Zeichnung anzu-

fertigen, welche die Kreisscheibe des Gestirns darstellt, und auf dieser bezeichnet man sich den obersten Theil des Randes und den Punkt, wo der Anfang und das Ende der Verfinsterung stattfinden wird; benutzt man nun nachher diese Zeichnung bei den Beobachtungen, so muss man sich ferner erinnern, dass im astronomischen Fernrohre die Gegenstände sich in umgekehrter Gestalt darstellen.

Zur bequemeren Beobachtung schlägt Bessel vor, die Ocularröhre so einzurichten, dass in ihrem Innern ein deutlich zu sehender Faden eingespannt ist, und dass man diese Röhre ganz frei um die optische Achse des Fernrohrs herum bewegen kann; an dem äusseren Umfange der Ocularröhre herum ist eine Kreistheilung von 0° bis 360° angebracht, und auf diese ein Zeiger gerichtet, der an der Hauptröhre fest angebracht ist, so dass er folglich bei der Drehung des Oculars unbeweglich bleibt. Wenn das Fernrohr parallactisch aufgestellt ist, so kann man die Richtung der täglichen Bewegung auf der Theilung der Ocularröhre ein- für allemal bestimmen; ist das Fernrohr nicht parallactisch aufgestellt, so kann man einige Minuten vor dem Eintritte der Erscheinung selbst den Faden auf den Rand der Sonne oder des Mondes, oder noch besser auf einen nicht zu grossen Flecken dieser Gestirne stellen, und darauf die Ocularröhre so lange drehen, dass der Rand des Gestirnes oder der Fleck auf demselben, bei der scheinbaren täglichen Bewegung dieses Gestirns, immer mit dem Faden im Gesichtsfelde des Fernrohrs in Berührung bleibt. Alsdann wird der Theilstrich auf der Ocularröhre, welcher dem Zeiger gegenübersteht, die Lage des Fadens bestimmen, welche der täglichen Bewegung des Gestirns entspricht, und wenn man dann diese Theilung auf der Ocularröhre um 90° dreht, so wird die Lage des Fadens sehr nahe mit dem Declinationskreise des Gestirns zusammenfallen, und das obere Ende dieses Fadens (in astronomischen Fernröhren das untere, weil diese Fernröhre die Gegenstände umkehren) wird in unserer Halbkugel dem Nordpunkte des scheinbaren Randes des

Gestirns entsprechen; dreht man darauf die Ocularröhre um den früher mehrfach erwähnten Winkel Q von diesem Nordpunkte aus nach der gehörigen Seite herum, so wird der Faden alsdann eine solche Lage einnehmen, dass das eine seiner Enden auf dem Rande des Gestirns den Ort angeben wird, an welchem die dem Winkel Q entsprechende Phase der Verfinsterung stattfinden wird; das andere Ende aber wird dem diametral entgegengesetzten Orte des Randes entsprechen; da aber immer die Seite des Gestirns bekannt ist, auf welcher die Erscheinung sich ereignet, so wird man niemals darüber im Zweifel sein können, auf welches Ende des Fadens man seine Aufmerksamkeit zu richten hat. Bei dieser Stellung des Fadens würde er nur dann den gewünschten Punkt am Rande des Gestirns anzeigen, wenn man ihn auf den Mittelpunkt der Sonne oder des Mondes brächte. Dieses ist aber bei stark vergrössernden Fernröhren, welche nur einen Theil der Sonne oder des Mondes zeigen, nicht mit der nöthigen Genauigkeit ausführbar. Der Faden muss daher dem, die Mittelpunkte der Gestirne verbindenden grössten Kreise senkrecht gestellt und alsdann mit dem sichtbaren Gestirne zur Berührung gebracht werden; dieser Berührungspunkt giebt nun den Ort an, wo die erwartete Erscheinung stattfinden wird.

Es kann sich zuweilen ereignen, dass an einem Abende der Mond kurz nach einander mehrere Sterne verfinstert, und dieses wird z. B. geschehen, wenn der Mond das Sternbild der Pleiaden bedeckt; alsdann aber kann man, anstatt die Bedeckung eines jeden Sternes für sich vorauszuberechnen, eine allgemeine Figur anfertigen, welche sehr bequem alle zu erwartenden Bedeckungen in den verschiedenen Fällen zeigt. Hierzu wählt man sich nun eine Epoche, welche dem Mittel der Zeiten der Bedeckungen vieler benachbarten Sterne entspricht; auch ist es gut, zu dieser Epoche irgend eine volle mittlere Stunde in Greenwich zu nehmen, welche dem erwähnten Mittel so nahe als möglich liegt, und für welche man dann gleich ohne Interpolation den Ort des

Mondes aus dem Nautical Almanac entnehmen kann. Es sei diese Greenwicher mittlere Zeit $= T$; darauf sucht man in dem Nautical Almanac die geraden Aufsteigungen und Abweichungen des Mondes für die drei Zeiten $T - 1^h$, T und $T + 1^h$, ebenso die Horizontalparallaxe des Mondes und seinen wahren Halbmesser r, und berechnet alsdann die diesen mittleren Greenwicher Zeiten entsprechenden Sternzeiten $S - 1^h 0^m 10^s$, S und $S + 1^h 0^m 10^s$, die sich auf den Meridian eines Beobachtungsortes beziehen sollen, dessen geocentrische Breite $= \varphi'$ ist, und der als bekannt angesehen werden muss; mit diesen gegebenen Grössen berechnet man sich nun für die eben erwähnten Zeiten die scheinbaren geraden Aufsteigungen α', α'', α''', und die scheinbaren Abweichungen δ', δ'', δ''' für den Mond, und zwar in Graden, Minuten und Zehnteln von Minuten ausgedrückt, indem man sich bei der ganzen Berechnung nur vier- oder höchstens fünfstelliger Logarithmen zu bedienen braucht. Fällt man jetzt in Taf. V, Fig. 17 die gerade Linie $L'L''$ senkrecht auf die Linie AB, so wird man durch die erste Linie $L'L''$ einen Theil des scheinbaren Declinationskreises des Mondes zur mittleren Zeit T darstellen können, und ebenso durch die zweite Linie AB einen Theil seines Declinationsparallels, in welchem zu dieser Zeit sein Centrum L sich befindet. Man macht sich nun einen Maasstab, und nimmt z. B. $\frac{1}{10}$ Theil eines Zolls für jede Bogenminute eines grössten Kreises an; auf der Linie AB setzt man dann mittelst eines Zirkels mit Hülfe des Maasstabes links von L aus, den Werth $Ln = (\alpha'' - \alpha') \cos \delta''$, und ebenso auf der rechten Seite von L aus, die Linie $Lm = (\alpha''' - \alpha'') \cos \delta''$ mit dem Zirkel ab. In n und m errichtet man darauf die Perpendikel nq und mp auf die Linie AB und macht $nq = \delta' - \delta''$ und $mp = \delta''' - \delta''$; wenn nämlich $\delta' - \delta''$ negativ und $\delta''' - \delta''$ positiv ist, so wird das erste Perpendikel unterhalb, das zweite oberhalb der Linie AB liegen; im entgegengesetzten Falle wird man die Linien mp und nq nach einer Seite hinziehen. Führt man nun die Figur weiter aus, so kann man $nn' = 2Ln - Lm$,

$mm' = 2Lm - Ln$; $n'q' = 2(\delta'' - \delta') - (\delta''' - \delta'')$ und $p'm' = 2(\delta''' - \delta'') - (\delta'' - \delta')$ nehmen. Die Punkte q', q, L, p und p' verbindet man darauf durch gerade Linien, so dass alsdann die gebrochene Linie $q'qLpp'$ einen Theil der scheinbaren Bahn des Mondcentrums genähert darstellt. Darauf bleibt uns nur noch übrig, die Orte der Sterne im Sternbilde der Pleiaden, welche durch den Mond in diesem Falle verfinstert werden können, auf der Figur aufzutragen. Es habe z. B. einer von diesen Sternen zur Zeit der Beobachtung die gerade Aufsteigung A und Abweichung D, so können wir die Bögen $(A - \alpha'')\cos\frac{1}{2}(D + \delta'')$ und $D - \delta''$ in Minuten ausdrücken, und wenn der erste von ihnen positiv ist, so nehmen wir die Linie $Ls = (A - \alpha'')\cos\frac{1}{2}(D + \delta'')$ und setzen sie auf der Linie Lm, rechts von L aus, ab; sollte sie negativ sein, so nimmt man die Länge der Linie und setzt sie von L aus links ab. Darauf errichtet man auf Ls in s das Perpendikel $s\sigma = D - \delta''$, und wenn $D - \delta''$ positiv ist, so liegt $s\sigma$ oberhalb der Linie AB, im entgegengesetzten Falle aber unterhalb. Drückt man nun den Radius r des Mondes in Minuten und Zehnteln von Minuten aus, so können wir mit einem Zirkel auf dem Massstabe die Länge von r abnehmen und alsdann aus dem Punkte σ, welcher den Ort des Sterns darstellt, mit dem Radius r einen Kreisbogen schlagen, welcher die Linie Lpp' oder die scheinbare Bahn des Mondcentrums, in den Punkten x und x' schneiden wird. Diese Punkte x und x' bestimmen nun den Ort des Mondcentrums beim Eintritte und Austritte des Sterns; fällt man daher aus x und x' die Linien xe und $x'e'$ senkrecht auf AB, und misst mit dem Massstabe die Länge der Linien Le und me' aus, so kann man in der Annahme, dass e' zwischen m und m' liegt, die Werthe $\frac{Le}{Lm}$ und $\frac{me'}{mm'}$ berechnen, wodurch man sogleich den Stundenbruch erhält, welchen man zu den Greenwicher Zeiten T und $T + 1^h$ zulegen muss, um die Zeit des Eintrittes oder Austrittes des Sterns in oder aus dem

Mondrande zu erhalten; legt man zur Austritts- oder Eintrittszeit, die eben auf diese Weise gefunden wurde, die östliche Länge des Beobachtungsortes, von Greenwich aus gezählt, hinzu, oder zieht man sie ab, wenn die Länge westlich von Greenwich ist, so erhalten wir die mittlere Zeit der beiden Erscheinungen am Beobachtungsorte, und zwar auf den Meridian dieses Ortes bezogen. Um auf dem Mondrande den Ort zu finden, in welchem der Eintritt oder Austritt des Sternes stattfinden wird, schlägt man mit dem Halbmesser r zwei Kreise um die Punkte x und x' als Mittelpunkte herum und verlängert darauf die Perpendikel xe und xe', bis sie diese beiden Kreise oben in l und l' schneiden; alsdann werden die Punkte l und l' auf unserer Halbkugel die Nordpunkte des Mondrandes bezeichnen; der Winkel $lx\sigma$ aber zeigt beim Eintritte die Winkelentfernung des Sterns vom Nordpunkte des Mondrandes an, wobei die Zählung von Norden aus nach links bis 360° geschieht; ganz ähnlich wird der Abstand des Nordpunktes des Mondrandes vom Orte des Austritts des Sterns $= 390° - l'x'\sigma$ sein, und wünscht man noch ausserdem die Punkte des Mondrandes zu bestimmen, in welchem der Eintritt oder Austritt des Sterns sich ereignet, wenn man vom höchsten Theile des Mondrandes abrechnet, so muss man erst hierzu den parallactischen Winkel bestimmen und überhaupt ganz so verfahren, wie es auf S. 526 gezeigt worden ist.

207. Wir haben schon gesehen, dass die wichtigsten Verfinsterungen der Sonne die ringförmigen und totalen Finsternisse sind; auf ähnliche Weise sind nun diejenigen Sternbedeckungen für geographische Längenbestimmungen die vorzüglichsten, bei welchen bei der Mitte der Verfinsterung die scheinbare Lage des Mondcentrums sehr nahe mit dem scheinbaren Orte des Sterns zusammenfällt. Die günstigste Zeit zur Beobachtung einer Sternbedeckung wird allemal beim ersten oder letzten Viertel des Mondes sein, weil um die Zeit des Vollmondes herum die

Lichtstärke des Mondes es nicht gestattet, den Stern in der unmittelbaren Nähe des Mondrandes deutlich zu sehen; vorzüglich aber ist es gut, alsdann zu beobachten, wenn die Sternbedeckung sich beim letzten Viertel ereignet, weil in diesem Falle der Eintritt des Sterns in den hellen, der Austritt aber aus dem dunklen Rande des Mondes geschieht. Hierbei ist es leicht, den Stern bis zu seinem Eintritte in den Rand zu verfolgen, und man kann nicht leicht einen Fehler bei der Beobachtung des Austritts des Sterns aus dem dunklen Mondsrande machen, weil dieses ganz plötzlich geschieht. Uebrigens versteht es sich von selbst, dass, wenn man Sternbedeckungen in der Morgen- oder Abenddämmerung, sogar mit sehr starken Fernröhren, beobachtet, diese Beobachtungen selten ganz zuverlässig sein werden.

Es muss hier besonders hervorgehoben werden, nie eher an die definitive Berechnung von Sternbedeckungen zu gehen, als bis die Positionen der bedeckten Sterne mit möglichster Genauigkeit bestimmt worden sind; nur dann kann man aus Beobachtungen, welche zur Untersuchung der Fehler der Mondtafeln zahlreich genug sind, diese Fehler wirklich frei von den Fehlern der Sternpositionen erhalten. Wenn der Zweck der Beobachtungen nur darin besteht, den Unterschied der geographischen Längen zu finden, so ist es wohl vortheilhaft, wenn correspondirende Beobachtungen an Orten angestellt werden, deren geographische Lage nicht allzu verschieden von dem zu bestimmenden Punkte sind, und wo dieselben Phasen der Verfinsterung beobachtet wurden.

Falls es sich aber darum handelt, die Tafelfehler der Gestirne zu erforschen, so muss man diejenigen Beobachtungen als vorzüglich wichtig betrachten, die an passend gewählten, aber weit von einander entfernten Orten der Erde angestellt worden sind; ausserdem muss man aber noch seine Zuflucht zu einigen abgesonderten Erscheinungen für sich nehmen, wie z. B., wenn man die Parallaxe der Sonne zu finden wünscht, es bekannt ist,

dass das beste Mittel hierzu darin besteht, den Durchgang der Venus vor der Sonnenscheibe zu beobachten. Für die vortheilhafteste Bestimmung der Summe oder der Differenz der Halbmesser der Sonne und des Mondes eignen sich vorzüglich die inneren Berührungen der Ränder dieser Gestirne während der totalen oder ringförmigen Sonnenfinsternisse, indem man sie hierzu in der Nähe der Grenzen des schmalen Gürtels der Erde beobachtet, in welchen sie überhaupt noch zu sehen sind.

Was die Mondparallaxe betrifft, so sieht man aus den Formeln (L) § 170, S. 541 leicht ein, dass, je verschiedener die Beobachtungszeiten unter verschiedenen Beobachtungsorten sein werden, desto genauer auch die Bestimmung der Parallaxe ausfallen wird. Bekanntlich können die inneren Berührungen der Ränder der Sonne und des Mondes sehr sicher wahrgenommen werden; und Bessel hat bemerkt, dass ihre Beobachtung an zwei verschiedenen Orten der Erde, die so gelegen sind, dass an dem einen die Verfinsterung beim Aufgange, an dem anderen die Verfinsterung beim Untergange wahrgenommen werden kann, einen grösseren Erfolg bei der Bestimmung der Mondparallaxe als alle anderen Mittel der praktischen Astronomie gewähren. Hierzu ist es jedoch erforderlich, dass die Längenunterschiede der genannten Orte, unabhängig von diesen Finsternissen, genau bestimmt seien, und dass man an allen Beobachtungsorten dieselbe Phase der Verfinsterung beobachtet hat, namentlich im Falle ringförmiger Finsternisse die Momente der vollständigen Erscheinung und ersten Unterbrechung des Ringes, oder auch bei einer totalen Sonnenfinsterniss das letzte Verschwinden und die erste Wiedererscheinung des Sonnenlichtes. Die Vergleichung der Beobachtungen einer solchen Sonnenfinsterniss unter einander, die zu gleicher Zeit in Europa und Nordamerika beobachtet werden könnte, würde, wie Bessel bemerkt, alle Elemente zu einer genauen Bestimmung der Mondparallaxe liefern.

Ganz besondere Rücksicht verdienen die Beobachtungen des Durchgangs des Mondes durch das Sternbild der Pleiaden; durch

Bessels Arbeiten kann man mit vorzüglicher Genauigkeit die relative Lage aller Sterne dieses Sternbildes untereinander finden; und daher wird man beim Durchgange des Mondes durch dieses Sternbild ebenso viele Gleichungen zur Herleitung der Länge des Beobachtungsortes aufstellen können, als man Sternbedeckungen selbst beobachtet hat, denn die Fehler der Mondtafeln bleiben während eines Durchgangs des Mondes durch die Pleiaden constant. Nun ereignet es sich gewöhnlich, dass entweder die Eintritte genauer als die Austritte beobachtet werden, oder auch umgekehrt; alsdann erhält man durch die einen, oder durch die anderen allein eine Anzahl auf sichere Beobachtungen gegründeter Gleichungen, welche vorzüglich, wenn der Mond nördlich von einigen und südlich von anderen Sternen durchgeht, die Bestimmung der Fehler der bei der Rechnung angenommenen *AR*, Declination und Halbmessers des Mondes, sowie auch ihre Elimination aus den Resultaten weit vollständiger macht, als im Falle der Bedeckung eines einzelnen Fixsterns zu erwarten steht. Hierdurch wächst der Werth, welchen ein an zwei Orten beobachteter Durchgang des Mondes durch die Pleiaden bei der Bestimmung des Längenunterschiedes dieser Orte erhält, vergleichungsweise mit dem Werthe der Beobachtungen einer einzelnen Sternbedeckung stärker als die Zahl der bedeckten Sterne; so dass, wenn jene Beobachtungen (bei vorausgesetzter genauer Zeitbestimmung) einigemal gut gelungen sind, das Gewicht des daraus hervorgegangenen Längenunterschiedes durch andere einzelne Sternbedeckungen schwerlich wird vermehrt werden können. Diesen grossen Vortheil haben die Bedeckungen der Pleiaden aber nur deshalb voraus, weil die relativen Orte ihrer Sterne mit der zu diesem Zwecke erforderlichen Genauigkeit bekannt sind. Sogar die Lage des Mondes selbst wird man hierdurch genauer als durch irgend eine andere Methode bestimmen können.

Der Werth solcher Bestimmungen zur Prüfung der Genauigkeit einer Mondtheorie wird noch dadurch vermehrt, dass sie

die frühesten von hinreichender Zuverlässigkeit sind, welche man durch Beobachtungen erlangen konnte*).

Bestimmung der geographischen Länge durch Mondculminationen.

208. Die totalen und ringförmigen Sonnenfinsternisse, sowie die centralen Sternbedeckungen liefern vorzügliche Mittel zur Längenbestimmung; aber diese Erscheinungen ereignen sich nicht häufig genug, und der Reisende wird daher oft genöthigt sein, seine Zuflucht zu anderen Methoden zu nehmen; die bequemste unter diesen besteht nun in der Beobachtung der geraden Aufsteigung des Mondes und heisst die Methode der Mondculminationen.

Die gerade Aufsteigung (*AR*) des Mondes verändert sich so rasch, dass im Laufe zweier Zeitminuten sie sich beinahe um 1′ in Bogen ändert; wenn daher die geraden Aufsteigungen des Mondes an zwei verschiedenen Meridianen beobachtet werden, so wird man aus dem Unterschiede dieser geraden Aufsteigungen leicht auf die geographische Längendifferenz dieser beiden Meridiane schliessen können. Die *AR* eines jeden Gestirns ist gleich der Sternzeit beim Eintritte dieses Gestirnes in den Meridian, und man bedient sich zur Bestimmung dieser Zeit des Durchgangsinstrumentes; stellt man es also im Meridiane auf und beobachtet darauf die Zeit des Durchgangs des Mondrandes und eines Sterns, so kann man den Unterschied der Sternzeiten bei den Eintritten dieser beiden Gestirne in den

*) Die hier angeführten Worte sind die des berühmten Bessel; Astronomische Untersuchungen, Bd. II, S. 237.

Meridian berechnen, und wenn man diesen Unterschied zur bekannten *AR* des Sterns zulegt, im Falle dass der Stern dem Monde voranging, oder ihn von der *AR* des Sterns abzieht, wenn dieser später als der Mond folgte, so erhält man die *AR* des Mondes. Damit aber die Instrumentalfehler keinen merklichen Einfluss auf diese Bestimmung haben können, so wählt man zur Vergleichung mit dem Monde gewöhnlich einen ihm nahen Stern; die unbekannten kleinen Fehler des Instrumentes verursachen alsdann beinahe ganz denselben Einfluss auf die beobachteten Zeiten des Durchgangs des Mondes und des Sterns, so dass der aus diesen Beobachtungen berechnete Unterschied der Durchgänge beider Gestirne durch den Meridian sehr wenig von den constanten Fehlern des Instrumentes abhängen wird.

Von der Art und Weise, diese Beobachtungen anzustellen, und von der Berechnung der Fädenintervalle.

209. Das Instrument wird sorgfältig berichtigt, und dann fest und so nahe wie möglich in der Ebene des Meridians aufgestellt. Darauf:

1) bestimmt man die Lage der Umdrehungsachse mit Hülfe des Niveaus und beobachtet nach Umständen zwei Fundamentalsterne, von denen einer nahe am Pole des Aequators steht, der andere aber eine kleine Declination hat; oder zwei Circumpolarsterne in entgegengesetzten Culminationen. Es müssen überhaupt hierbei alle Vorschriften befolgt werden, die wir bei Gelegenheit der Zeitbestimmung vermittelst des Durchgangsinstruments erwähnt haben; man muss auch dafür sorgen, dass diese Beobachtungen nicht gar zu lange vor oder nach dem Durchgange des Mondes durch den Meridian selbst angestellt werden. Am besten ist es, wenn solche Beobachtungen vor oder nach den Durchgängen des Mondes und der Vergleichssterne angestellt werden.

2) Muss man, ohne die Lage des Instruments zu ändern,

die dem Monde vorangehenden Sterne, den Mondrand selbst und endlich die nachfolgenden Mondsterne beobachten.

3) Hierauf wird man, ohne die Lage des Instruments zu ändern, das Niveau ablesen und bald nach der Meridianpassage des Mondes ein neues Paar Sterne, ähnlich wie in (1), beobachten.

Den Collimationsfehler muss man entweder vor oder nach allen hier erwähnten Beobachtungen ermitteln; ist aber der Beobachter überzeugt, dass sein Instrument längere Zeit denselben Collimationsfehler beibehält, so kann er zur Reduction der Beobachtungen den Collimationsfehler brauchen, welcher sich aus den Beobachtungen am vorhergehenden und folgenden Tage ableiten lässt.

Der Gang der Uhr, mit welchem man die beobachteten Zwischenzeiten in Sternzeitintervalle verwandeln kann, lässt sich sehr bequem aus den beobachteten Intervallen derselben Sterne einen Tag vor und einen Tag nach der Mondbeobachtung ableiten.

Durch eine solche Anordnung der Beobachtungen erhält man nicht allein alles, was zur Berechnung der Mondculmination nöthig ist, sondern auch alles, wodurch man die Unveränderlichkeit des Instruments während der Beobachtungen beurtheilen kann, welches eine der Hauptbedingungen für die Zuverlässigkeit des gesuchten Resultates ist.

Fernröhre von verschiedener optischer Güte stellen den Werth des Mondhalbmessers verschieden dar; bei der Berechnung aber braucht man immer denjenigen Werth des Mondhalbmessers, den man in der Ephemeride findet; und deswegen wird man bei der Ableitung der Länge aus Mondculminationen stets einen unvermeidlichen Fehler begehen. Man muss nun, um genauere Resultate zu erhalten, eine solche Beobachtungsreihe vollenden, dass dieser Fehler zuweilen auf der einen und zuweilen auf der entgegengesetzten Seite wirkt; und dieses wird dadurch erreicht, dass man beide Ränder des Mondes beobachtet, oder Beobachtungen

vor und nach dem Neumonde anstellt. Ferner muss der Beobachter seine Sorgfalt darauf lenken, dass der scheinbare Werth des Mondhalbmessers nicht noch etwa durch eine in optischer Beziehung mangelhafte Berichtigung des Fernrohrs vergrössert wird; man hat nämlich darauf zu achten, dass das Ocular ganz genau auf den Focus gestellt wird, damit im Gesichtsfelde des Fernrohrs der Mond und die Fäden sich vollkommen deutlich und scharf begrenzt darstellen.

210. Wir haben früher die Methode angegeben, wie man aus der beobachteten Meridianpassage eines Sterns seinen Durchgang durch den Meridian selbst ableiten kann, und wollen nun hier zeigen, wie man die Beobachtungen des Mondes auf den Meridian reduciren kann, wobei aber angenommen werden soll, dass das Instrument nahezu in dieser Ebene aufgestellt ist.

Die Beobachtungen des Mondes bestehen darin, die Zeiten zu notiren, wann der eine oder der andere seiner Ränder an die verschiedenen Fäden des Instruments tritt; der westliche (oder erste) Rand geht dabei früher, der östliche (oder zweite) Rand aber später als das Mondcentrum durch die Ebene des Meridians. Es sei l die Reduction eines Seitenfadens auf den Mittelfaden in Sternzeitsecunden ausgedrückt; f das entsprechende Fädenintervall, ebenfalls in solchen Secunden ausgedrückt; δ die wahre Declination des Mondcentrums, und z, z' die wahre und scheinbare Zenithdistanz des Mondcentrums, dann haben wir nach § 117, S. 315—317:

$$l = (l + \lambda')\frac{\sin z}{\sin z'} \cdot f \sec \delta; \quad l_{,} = l\left(\frac{86400^s}{86400^s + b}\right),$$

wo $l_{,}$ die in Chronometersecunden ausgedrückte Reduction, und b die tägliche Retardation des Chronometers in Secunden bedeutet; λ' ist die in Zeitsecundenbruch ausgedrückte Zunahme der wahren geraden Aufsteigung des Mondcentrums im Laufe einer Sternzeitsecunde.

Nach dieser Formel kann man nun jeden einzelnen Faden auf den Mittelfaden reduciren, und das arithmetische Mittel aus

allen so reducirten Antritten des Mondes auf den Mittelfaden giebt uns die wahrscheinliche Zeit des Antrittes des Randes an diesen Faden. Wenn übrigens die Beobachtungen an allen Fäden angestellt werden, und diese Fäden in gleicher Zahl symmetrisch zu beiden Seiten des Mittelfadens gelegen sind, so kann man die wahrscheinlichste Zeit des Durchgangs des Mondrandes durch den Mittelfaden mit genügender Genauigkeit erhalten, wenn man das arithmetische Mittel aus den Antritten an allen Fäden nimmt und hierzu die Correction zulegt, welche von der ungleichen Entfernung der Fäden untereinander abhängt, ebenso wie wir es in § 119, S. 321 erläutert haben.

Wir wollen nun zeigen, wie man die auf den Mittelfaden gebrachten Antritte des Mondrandes auf den Meridian selbst reducirt. Es sei dazu der Stand des Instruments durch die Werthe M, N und C, deren Bedeutungen schon oben in § 115, S. 311 erklärt wurden, bestimmt, und es seien α und δ die wahren, α' und δ' die scheinbaren geraden Aufsteigungen und Abweichungen des Mondcentrums zur Sternzeit s, in welcher der Mondrand an den Mittelfaden trat; es sei π die Aequatorialparallaxe des Mondes, h der wahre oder geocentrische, und h' der scheinbare Halbmesser des Mondes; d und d' die linearen Entfernungen des Mondmittelpunktes vom Mittelpunkt der Erde und vom Orte des Beobachters. Nahe am Meridiane sind M, N und C sehr kleine Bögen, deren Cosinusse wir also gleich 1 setzen können; anstatt ihrer Sinusse wollen wir aber die Bögen selbst nehmen; verwandeln wir alsdann α, s, M, N und C in Zeit, so erhalten wir die Bögen $M = 15m$, $N = 15n$, $C = 15c$, und haben dann nach § 117, S. 314:

$$\frac{d'}{d}\left(c \pm \frac{h'}{15}\right) = -n \sin\delta + n \sin\pi \sin\varphi' - (m + s - \alpha)\cos\delta$$
$$+ m \sin\pi \cos\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathfrak{E}),$$

wo φ' die geocentrische Breite des Ortes ausdrückt, und bei h' alsdann (+) gebraucht wird, wenn der westliche (oder erste) Rand, dagegen (—), wenn der östliche (oder zweite) Rand beob-

achtet wurde. Aus den früher erhaltenen Gleichungen § 117, S. 314 ersehen wir, dass:

$$\frac{d'}{d} \sin \delta' = \sin \delta - \sin \pi \sin \varphi',$$

und ebenso hat man ferner in der Nähe des Meridians, wenn $s^\circ - \alpha^\circ$ und $s^\circ - \alpha^{\circ\prime}$ sehr kleine Bögen sind:

$$\frac{d'}{d} \cos \delta' = \cos \delta - \sin \pi \cos \varphi'.$$

Nun wissen wir aber nach § 10, S. 24, dass $h : h' = d' : d$; folglich erhält man aus der obigen Gleichung (ϵ):

$$\frac{d'}{d} c \pm \frac{h}{15} = -n \cdot \frac{d'}{d} \sin \delta' - m \frac{d'}{d} \cos \delta' - (s - \alpha) \cos \delta;$$

so dass man endlich folgende Gleichung erhält:

$$\alpha = s \pm \frac{h}{15} \sec \delta + \frac{d'}{d} \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} (c \sec \delta' + n \operatorname{tg} \delta' + m).$$

Sehr nahe am Meridiane wird aber

$$\frac{d'}{d} \frac{\cos \delta'}{\cos \delta} = 1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta,$$

oder beinahe $= 1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta'$ sein; folglich:

$$\alpha = s \pm \frac{h}{15} \sec \delta + (1 - \sin \pi \cos \varphi' \sec \delta') . (c \sec \delta' + n \operatorname{tg} \delta' + m).$$

Dieses ist die wahre AR des Mondcentrums zur Zeit des Antritts des Mondrandes an den Mittelfaden; um daher α_0 oder die wahre AR des Mondcentrums zur Zeit zu finden, als der Mondrand den Meridian selbst passirte, muss man zu α die Zunahme der AR des Mondes im Laufe der Zeit zulegen, in welcher der Mondrand den östlichen Stundenwinkel zwischen dem Mittelfaden und dem Meridiane beschrieb; bezeichnet man nun der Kürze halber diesen Winkel durch τ, so wird $\tau = \left(\alpha \mp \frac{h}{15} \sec \delta\right) - s$, und wenn λ die in Zeit ausgedrückte Zunahme der geraden Aufsteigung des Mondes in einer Sternzeitsecunde bedeutet, so wird offenbar $\alpha_0 = \alpha + \lambda . \tau$, oder

$$\alpha_0 = s \pm \frac{h}{15} \sec\delta +$$
$$+ (1+\lambda)(1 - \sin\pi \cos\varphi' \sec\delta')(c \sec\delta' + n\, tg\,\delta' + m),$$

wo $+h$ sich auf den westlich beobachteten Mondrand, und $-h$ sich auf den östlich beobachteten bezieht.

Aus dem eben Gesagten lassen sich nun alle praktischen Vorschriften bei der Berechnung ableiten.

Es sei $\left(\alpha_0 \mp \frac{h}{15} \sec\delta\right) = a$, so wird dieses a die gerade Aufsteigung des Mondrandes im Meridiane ausdrücken, oder mit anderen Worten ist a = *der Sternzeit der Culmination des Mondrandes*; daher ist auch $a - s$ nichts anderes, als *die Reduction des Mittelfadens auf den Meridian*; und folglich wird *diese Reduction für den Mond*

$$= (1+\lambda)(1 - \sin\pi \cos\varphi' \sec\delta')(c \sec\delta' + n\, tg\,\delta' + m).$$

Legt man diesen Werth zu s oder zur Sternzeit der Beobachtung am Mittelfaden hinzu, so erhält man die gerade Aufsteigung des Mondrandes zur Zeit seiner Culmination selbst; vernachlässigt man aber bei der Reduction den Factor $(1+\lambda)$, so findet man die gerade Aufsteigung des Mondrandes zur Sternzeit s.

Nimmt man jetzt an, dass t die Zeit der Beobachtung des Mondrandes nach dem Chronometer ist, und u die Reduction dieser Chronometerzeit auf die Sternzeit s, so dass $s = t + u$, und setzt man

$$t + (1+\lambda)(1 - \sin\pi \cos\varphi' \sec\delta')(c \sec\delta' + n\, tg\,\delta' + m) = T;$$

so wird alsdann:

$$a = T + u.$$

Bezeichnet man nun durch t_* die Angabe des Chronometers bei der Beobachtung des Mondsterns am Mittelfaden, und durch $u + \Delta u$ die Grösse, welche man alsdann zu t_* hinzulegen muss, um Sternzeit zu erhalten, so haben wir:

$$t_* + c \sec \delta_* + n \operatorname{tg} \delta_* + m = T_*,$$

und also wird

$$\alpha_* = T_* + u + \Delta u,$$

wo α_* die gerade Aufsteigung und δ_* die Abweichung des Sterns bezeichnet. Hieraus findet man nun:

$$a = \alpha_* + T - T_* - \Delta u.$$

Hier bezeichnet Δu die Voreilung des Chronometers gegen Sternzeit im Lauf der Zeit $t - t_*$; wenn aber der tägliche Gang des Chronometers bekannt ist, so wird Δu ebenfalls bekannt sein, und hat man auch α_*, so kann man die gerade Aufsteigung des Mondrandes finden, ohne die Sternzeit der Beobachtung selbst mehr nöthig zu haben. Berechnet man auf diese Weise a mit Hülfe eines jeden Sternes und nimmt das Mittel aus den erhaltenen Reductionen, so lässt sich die wahrscheinlichste gerade Aufsteigung des Mondrandes finden.

Berechnung der geographischen Länge aus der Beobachtung von Mondculminationen.

211. Man bestimmt unmittelbar aus den Beobachtungen, welche an zwei Orten der Erde angestellt worden sind, die *AR* des Mondrandes; um aber die geographische Längendifferenz dieser beiden Orte berechnen zu können, muss man zuerst die wahre *AR* des Mondcentrums für die Zeiten der Beobachtung finden; denn der Unterschied dieser *AR* hängt nur von der Bewegung des Mondcentrums in *AR* ab, welche zur Auflösung dieser Aufgabe dient; jener Unterschied der *AR* des Randes dagegen hängt noch ausserdem von der Veränderung des Halbmessers des Mondes und von der Veränderung seiner Declination ab.

Nehmen wir nun an, dass zur Zeit der Beobachtung der wahre Winkelhalbmesser des Mondes $= h$, die wahre Declination des Mondcentrums aber $= \delta$ sei, so findet man:

$$AR \text{ des ☾ Centrums} = AR \text{ des ☾ Randes} \pm \frac{h}{15} \sec \delta,$$

wo das Zeichen (+) sich auf den beobachteten westlichen Rand, das Zeichen (—) aber sich auf den Ostrand bezieht.

Wenn an dem Tage der Beobachtung die Culmination des Mondes an keiner guten Sternwarte beobachtet wurde, so muss man die geographische Länge des Beobachtungsortes mit Hülfe der Mondtafeln ableiten oder, noch bequemer, dazu die Tafeln brauchen, welche in dem Berliner Astronomischen Jahrbuche oder in dem Nautical Almanac für die *AR* des Mondcentrums gegeben werden. Hieraus lässt sich die mittlere Berliner oder Greenwicher Zeit finden, zu welcher die wahre *AR* des Mondcentrums genau gleich dem aus den Beobachtungen gefundenen Werthe war; der Unterschied zwischen dieser mittleren Berliner oder Greenwicher Zeit und der mittleren Zeit der Beobachtung giebt die geographische Länge des Beobachtungsortes, von Berlin oder von Greenwich aus gezählt. Die Fehler der Mondtafeln können jedoch ziemlich bedeutende Fehler in der hergeleiteten Länge hervorbringen, und daher wird es, wenn es möglich sein sollte, stets besser sein, die Beobachtungen nicht direct mit den Tafeln, sondern mit den Beobachtungen des Mondes zu vergleichen, welche an demselben Tage wie jene an einem anderen Orte der Erde gemacht wurden, dessen Länge genau bestimmt ist; noch vortheilhafter ist es jedoch, mehrere gute, gleichzeitige Beobachtungen zu benutzen.

Nicolai's Methode. Es seien $\alpha☾$ und α_* die wahre gerade Aufsteigung des Mondcentrums und des mit dem Monde verglichenen Sternes; nimmt man dabei an, dass der Stern um den Zeitraum τ, in Sternzeit ausgedrückt, früher durch unseren Meridian als der Mondrand ging, so erhält man:

$$\alpha☾ = A_* + \tau \pm \frac{h}{15} \sec\delta;$$

wo h und δ sich auf die beobachtete Culminationszeit des Mondes beziehen. In einen jeden anderen Meridian wird der Stern genau um dieselbe Sternzeit A_* eintreten, welche gleich der

unveränderlichen geraden Aufsteigung des Sterns ist; aber die Sternzeit des Durchganges des Mondcentrums durch diesen neuen Meridian wird eine andere werden; denn zu Folge der eigenen Bewegung des Mondes in *AR* wird er diesen neuen Meridian nicht um das 'frühere Sternzeitintervall τ später als der Stern passiren, sondern um ein anderes Intervall τ' später durch den Meridian gehen; bezeichnet man daher durch α'☾, δ' und h' für diesen zweiten Meridian zur Zeit der beobachteten Culmination ganz dasselbe, wie früher durch α☾, δ und h für unseren Beobachtungsort, so wird:

$$\alpha' ☾ = A_* + \tau' \pm \frac{h' \sec \delta'}{15}.$$

Liegt nun der Beobachtungsort westlich vom Orte ab, an welchem die entsprechenden Beobachtungen gemacht wurden, so wird α☾ $>$ α☾$'$ und $\tau > \tau'$; setzt man darauf α☾ $-$ α☾$'$ $= \Theta$, so wird:

$$\Theta = \tau \pm \frac{h \sec \delta}{15} - \left(\tau' \pm \frac{h' \sec \delta'}{15}\right).$$

Es sei l der gesuchte und in Zeit ausgedrückte Unterschied zwischen den geographischen Längen des ersten und zweiten Beobachtungsorts; veränderte sich nun die *AR* des Mondes gar nicht, so würde der Mond vom ersten Meridiane zum zweiten in einem Sternzeitintervall $= l$ gelangen; da aber der Mond sich fortwährend von Westen nach Osten bewegt, so wird er den zweiten oder westlicheren Meridian später als durch die Sternzeit l erreichen, und zwar um eben so viel, als sich seine gerade Aufsteigung vergrössert hat, d. h. der Mond wird an den westlicheren Meridian nach Verlauf des Sternzeitintervalles $l + \Theta$ später als an den ersten oder mehr östlichen Meridian treten. Hieraus sieht man leicht ein, dass Θ die Zunahme der geraden Aufsteigung des Mondes im Laufe der Sternzeitstunden $l + \Theta$ ist; folglich wird k_* oder die Aenderung der *AR* des Mondes in einer Sternstunde $= \frac{\Theta \,.\, 1^h}{(l + \Theta)^h}$ werden. In den astronomischen

Ephemeriden werden jetzt die geraden Aufsteigungen des Mondes durch gleiche mittlere Zeitintervalle angegeben, aber früher wurden sie durch gleiche wahre Zeitintervalle gegeben; es sei daher überhaupt eine Sternstunde $= \frac{1^h}{w}$ Sonnenzeit, wo $w = 1{,}00274$, wenn es sich um mittlere Zeit handelt, und $w = \frac{86400^h + \mu}{86400^h}$, wenn es sich um wahre Zeit handelt, und μ die Aenderung der geraden Aufsteigung der Sonne in einem wahren Tage bedeutet. Nehmen wir dann an, dass k die Aenderung der geraden Aufsteigung des Mondcentrums in einer Sonnenstunde bezeichnet, und dass diese Stunde genau in die Mitte der Epoche der Beobachtungen am ersten und zweiten Meridiane liegt; so erhält man, wenn alles in Secunden ausgedrückt wird:

$$\frac{k}{w} = k_* = \frac{\Theta . 3600''}{(l + \Theta)''},$$

woraus folgt, dass

$$l = \Theta\left\{\frac{3600''. w}{k} - 1\right\}.$$

Sollten in der astronomischen Ephemeride die geraden Aufsteigungen des Mondes in Graden angegeben sein, so wird der vorhergehende Ausdruck sich in folgenden verwandeln:

$$l = \Theta\left(\frac{15{,}3600''. w}{K} - 1\right),$$

wo K die in Bogensecunden ausgedrückte Veränderung der geraden Aufsteigung des Mondcentrums in einer Sonnenstunde bezeichnet.

Diese Methode ist dann zur Berechnung der Länge eines Ortes bequem, wenn diese ganz unbekannt ist, oder auch in demjenigen Falle, wenn entsprechende Beobachtungen nur an einem Observatorium gemacht wurden. Aber in dieser Methode liegt eine kleine Ungenauigkeit, denn sie setzt die Bewegung des Mon-

des in AR als constant voraus und gleich dem Werthe dieser Bewegung in der Mitte des Zeitintervalles, zwischen den Beobachtungen unter den zwei zu vergleichenden Meridianen; wenn jedoch das Zeitintervall gross ist, z. B. 5^h oder 6^h, so wird dieses einen Fehler hervorbringen. Wir wollen daher hier zeigen, wie dieser Fehler vermieden werden kann. Es seien t und t' die mittleren Zeiten der Beobachtung an zwei Punkten auf der Erde, deren einer die genähert bekannte westliche Länge von Greenwich $= l$ hat, und der andere um die Länge l' westlich von Greenwich gelegen ist; alsdann berechnet man für die mittleren Greenwicher Zeiten $t+l$ und $t'+l'$ nach strenger Interpolation die geraden Aufsteigungen des Mondes α und α'; so hat man $k = \frac{\alpha'-\alpha}{t'+l'-(t+l)}$, welches der Werth sein wird, den man statt k in der früheren Formel brauchen muss, um die genaue Ableitung zu erhalten; hierbei ist es aber nöthig, dass der Fehler in der angenommenen Länge l nicht fünf Zeitminuten übersteige.

212. Wünscht man aber bei der Auffindung der Länge eines Ortes alle entsprechenden Beobachtungen, die an verschiedenen guten Sternwarten an demselben Tage mit den unsrigen gemacht wurden, zu benutzen, so ist es in diesem Falle viel besser, die Rechnung nach Struve's Methode zu führen, die vollkommen genau ist und darin besteht, dass man zuerst den Fehler der Tafeln mit Hülfe der Beobachtungen, die an guten Sternwarten angestellt wurden, verbessert, und darauf die genaue Länge des zu bestimmenden Ortes sucht, indem die genäherte immer als bekannt vorausgesetzt wird.

Es ist gleichgültig, welche gerade Aufsteigungen der Mondsterne man bei der Berechnung des geographischen Längenunterschiedes anwendet; sie müssen nur nahezu richtig sein, und für jeden einzelnen Stern muss eine für alle correspondirenden Beobachtungsorte gemeinschaftliche AR dieses Sternes gewählt werden; so kann man entweder diejenigen AR der Sterne annehmen, welche im Nautical Almanac gegeben sind, oder noch besser

das Mittel aus den Beobachtungen derselben nehmen, welche am Beobachtungstage an verschiedenen guten Sternwarten gemacht werden. Vergleicht man die angenommene und die beobachtete AR eines jeden Sterns mit einander, so erhält man für jeden Beobachtungsort die entsprechende Abweichung; die Mittelzahl solcher bei verschiedenen Sternen stattfindenden Abweichungen, an die an jenem Orte beobachtete AR des Mondes mit dem richtigen Zeichen angebracht, wird diejenige AR des Mondes geben, welche im Einklange mit den angenommenen geraden Aufsteigungen der Vergleichssterne ist, und welche bei der Rechnung angewandt werden muss.

Die Längen der verschiedenen Beobachtungsorte werden wir vom Meridiane der astronomischen Ephemeride abzählen, welche wir bei unserer Berechnung brauchen, und ferner die Länge eines Beobachtungortes als positiv annehmen, wenn er westlich vom Meridiane der Ephemeride abliegt. Wir nehmen an, dass τ die verbesserte Sternzeit der Culmination des Mondrandes ist, und zwar an dem zu bestimmenden Punkte, dessen uns bekannte genäherte Länge L heissen mag, die genaue gesuchte soll aber durch $L+x$ bezeichnet werden; es seien ebenso τ', τ'' .... die verbesserten Sternzeiten der Culmination des Mondes an verschiedenen Sternwarten, deren genaue Längen wir durch L', L'' u. s. w. ausdrücken wollen. Wenn die gebrauchte astronomische Ephemeride die Orte des Mondcentrums für verschiedene Epochen der mittleren Zeit giebt, so kann man mit Hülfe der Längen L, L', L''... und der erwähnten Sternzeiten τ, τ', τ''... die mittleren Zeiten T, T', T'' berechnen, welche unter dem Meridiane der Ephemeride im Momente der Beobachtung des Mondrandes an den gegebenen Orten gezählt wurden.

Alsdann berechnet man für diese Zeiten T, T', T'' aus der Ephemeride die wahren geraden Aufsteigungen des Mondcentrums A, A', A'' und die wahren Halbmesser des Mondes h, h' und h'' durch strenge Interpolation bis auf eine Genauigkeit von einigen Hunderttheilen einer Secunde in Bogen; man bestimmt

ausserdem noch die entsprechenden wahren Declinationen des Mondcentrums δ, δ', δ'', aber nur genähert bis auf ein Zehntel einer Minute. So erhält man, um den Fehler der vorausgesetzten Länge L zu erforschen, und zur Auffindung des Fehlers der Mondtafeln in AR folgende Bedingungsgleichungen:

$$A = \tau \pm \frac{h}{15 \cos \delta}; \quad A' = \tau' \pm \frac{h'}{15 \cos \delta'}; \quad A'' = \tau'' \pm \frac{h''}{15 \cos \delta''},$$

wo A, A', A'' in Zeit ausgedrückt sind; wenn man alles in Bogen haben will, so wird:

$$A = 15\tau \pm \frac{h}{\cos \delta}; \quad A' = 15\tau' \pm \frac{h'}{\cos \delta'}; \quad A'' = 15\tau'' \pm \frac{h''}{\cos \delta''}$$

u. s. w.

Die Werthe $A, A', A'' \ldots$, $h, h', h'' \ldots$ und $\delta, \delta', \delta'' \ldots$ sind aus der Berechnung, die Werthe τ, τ', τ'' dagegen aus der Beobachtung bekannt. Wenn nun die Mondtafeln richtig, die geographischen Längen L, L', $L'' \ldots$ genau und die Beobachtungen fehlerfrei wären, so würden die vorhergehenden Gleichungen vollständig erfüllt werden; aber dieses wird niemals der Fall sein, und es findet sich, dass die Grössen A, A', A'' nicht mit dem zweiten Theile der Gleichung identisch sind; um diese Gleichheit herbeizuführen, müssen wir anstatt A, A', A'' die Werthe $A + \delta A$, $A' + \delta A'$, $A'' + \delta A''$ annehmen, wo δA, $\delta A'$, $\delta A''$ die gesuchten Correctionen der Werthe A, A', A'' bedeuten. Da die kleinen Fehler der Beobachtungen nicht weiter zu bestimmen sind, auch bald positiv, bald negativ sein werden, und daher als verschwindend angenommen werden können, so kann man $\delta A'$, $\delta A'' \ldots$ als die Tafelfehler des Mondes betrachten. Was aber δA betrifft, so hängt diese Grösse nicht nur davon ab, dass die Tafeln einen Fehler haben, sondern auch davon, dass wir vorher noch nicht die genaue Länge $L + x$ kennen, und bei der Berechnung von A die genäherte Länge L gebraucht haben; dadurch erhält man nämlich den Werth von A nicht für die Mondculmination, sondern für eine andere

Zeit, die von der Culminationszeit um x Secunden in Zeit verschieden ist; bezeichnet man daher die Bewegung des Mondcentrums in AR in einer Sternzeitsecunde durch λ, so wird der von einer unrichtig angenommenen Länge herrührende Fehler in A gleich $\lambda . x$ werden. Wenn die Sternwarten, wo die correspondirenden Beobachtungen angestellt sind, weder sehr weit von einander, noch von dem zu bestimmenden Beobachtungsorte abliegen, so dass die Längenunterschiede nicht über zwei bis drei Stunden betragen, dann kann man annehmen, dass der Fehler der Mondtafeln im Laufe dieses kurzen Zeitraumes sehr nahe constant bleibt, und dass die Mittelzahl aus den Werthen $\delta A'$, $\delta A''$ u. s. w. den wahrscheinlichen Tafelfehler bestimmt, welchen wir durch $\delta\alpha$ bezeichnen wollen; nimmt man nun an, dass $\delta\alpha$ in Zeitsecunden ausgedrückt ist, so erhält man zur Bestimmung des Fehlers in der angenommenen Länge $= x$ folgende Gleichung:

$$\delta A = \lambda . x + \delta\alpha = \tau \pm \frac{h}{15 \cos\delta} - A;$$

woraus folgt, dass

$$x = \frac{\left(\tau \pm \frac{h}{15 \cos\delta} - A\right) - \delta\alpha}{\lambda}$$

ist; alsdann wird die wahrscheinliche Länge des Beobachtungsortes $= L + x$ sein.

Wenn aber die Längen L, L', L'' . . . sehr verschieden von einander sind, so darf man die Fehler der Mondtafeln in allen Beobachtungen constant annehmen; doch kann man in diesem Falle mit hinlänglicher Annäherung voraussetzen, dass der Tafelfehler im Laufe eines Tages sich der Zeit proportional ändert, und dass man also den Tafelfehler in der AR des Mondes zur Zeit der Beobachtung an dem zu bestimmenden Orte der Erde durch Interpolation zwischen den Werthen finden kann, die dieser Tafelfehler einen Tag vor und nach der erwähnten Beobachtung und an dem Beobachtungstage selbst hatte.

Wenn correspondirende Beobachtungen nicht vorhanden sind, so ist man genöthigt, den Fehler der Tafeln oder des astronomischen Jahrbuches aus Beobachtungen abzuleiten, welche drei oder vier Tage früher und später auf guten Sternwarten gemacht wurden. Die Correction $\Delta\alpha$ der in den Tafeln gegebenen Rectascension des Mondes für die verlangte Zeit lässt sich dann durch die Gleichung

$$\Delta\alpha = a + b.t + ct^2,$$

wo a, b, c constante Grössen darstellen und t die Zahl der Tage bezeichnet, welche einer gegebenen in Mitte der Beobachtungen liegenden Epoche vorangehen oder ihr nachfolgen. Jede auf einer guten Sternwarte bestimmte und mit den Tafeln verglichene Rectascension des Mondes giebt $\Delta\alpha$ und die Zeit t; hat man mehr als drei Bestimmungen, so lassen sich a, b und c nach der Methode der kleinsten Quadrate ableiten.

Um den mittleren Fehler der Längenbestimmung aus Mondculminationen in Betracht zu ziehen, nehmen wir an, dass man gefunden hat:

an den zu bestimmenden Punkten		an den Sternwarten	
		1ste	2te
die Culmination des Mondes zur Zeit	t	T	τ
des 1. Sterns.	t'_*	T'_*	τ'_* u. s. w.
des 2. Sterns.	t''_*	T''_*	τ''_*
u. s. w.			
Uhrcorrection zur Culminationszeit . .	u	u'	u''
die Rectascension des Mondes	α	α'	α''; . . .

t, t'_*, . . . T, T'_*, . . . τ, τ'_* . . . bezeichnen hier die Chronometer- oder Uhrzeiten; der Uhrgang gegen Sternzeit wird als bekannt angenommen. Es ist also

$$\alpha = t + u,\quad \alpha' = T + u',\quad \alpha'' = \tau + u'' \text{ u. s. w.}$$

Hat man die Durchgänge eines Gestirns an n Verticalfäden beobachtet, so wird der mittlere Fehler des aus diesen Durch-

gängen abgeleiteten Antritts an den Mittelfaden durch die Formel:

$$\pm\sqrt{f^2+\frac{b^2}{n}}$$

ausgedrückt, wo b den Gesichtsfehler und f den Gehörfehler bezeichnen, vorausgesetzt, dass in f auch die Einflüsse der kleinen, unbemerkten Veränderungen im Azimuthe des Fernrohrs und in der Neigung der Umdrehungsachse enthalten sind. Setzen wir

$$u'-u=v',\ u''-u=v'',\ \ldots .$$

so sind v', v'' .... die bekannten Retardationen der Uhr gegen Sternzeit in den Intervallen $t-t'_*$, $t-t''_*$ ....; war der erste Stern an n', der zweite an n'' .... Fäden beobachtet, so erhält man:

$$u=\alpha'-t'_*-v' \text{ mit dem mittleren Fehler } \pm\sqrt{f^2+\frac{b'^2}{n'}},$$

$$u=\alpha''-t''_*-v'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \pm\sqrt{f^2+\frac{b''^2}{n''}},$$

u. s. w.

Wenn $\sqrt{k}$ den Fehler einer Bestimmung bedeutet, deren Gewicht Eins ist und p', p'' .... die Gewichte der verschiedenen Ableitungen der Uhrcorrection u sind, so wird

$$p'=\frac{k}{f^2+\frac{b'^2}{n'}},\ p''=\frac{k}{f^2+\frac{b''^2}{n''}} \text{ u. s. w.}$$

Die wahrscheinlichste Uhrcorrection ist:

$$u=\frac{p'(\alpha'-t'_*-v')+p''(\alpha''-t''_*-v'')+\ldots}{p'+p''+\ldots};$$

k wird willkürlich, je nach der Bequemlichkeit der Rechnung gewählt. Setzt man

$$\psi^2=\frac{p'\left(f^2+\frac{b'^2}{n'}\right)+p''\left(f^2+\frac{b''^2}{n''}\right)+\ldots}{p'+p''+\ldots},$$

so drückt $\pm \psi$ den mittleren Fehler des wahrscheinlichsten Werthes von u aus. Man erhält an dem Punkte, dessen geographische Länge gesucht wird, die Rectascension des Mondes $\alpha = t + u$ mit dem mittleren Fehler

$$F = \pm \sqrt{f^2 + \frac{b^2}{n} + \psi^2}.$$

Ebenso werden

$$F' = \pm \sqrt{f_{,}^2 + \frac{b_{,}^2}{N'} + \psi'^2}, \quad F'' = \pm \sqrt{f^2 + \frac{b_{,,}^2}{N''} + \psi''^2} \text{ u. s. w.}$$

die mittleren Fehler der auf den verschiedenen Sternwarten gefundenen Rectascensionen des Mondes α', α'' . . . ausdrücken, wo N', N'' . . . die entsprechenden Zahlen der beobachteten Fädenantritte des Mondes bezeichnen, und $f_{,}$, $b_{,}$, $b_{,,}$, ... $\psi_{,}$, $\psi_{,,}$ . . . ähnliche Bedeutungen für die Sternwarten haben wie f, b und ψ für den zu bestimmenden Punkt.

Die Correctionen

$$\alpha' - A', \quad \alpha'' - A'' \text{ u. s. w.}$$

der aus den Tafeln oder aus dem astronomischen Jahrbuche berechneten Rectascensionen des Mondes A', A'' . . ., werden also mit den mittleren Fehlern $\pm F'$, $\pm F''$ . . . behaftet sein. Setzen wir

$$P' = \frac{k}{F'^2}, \quad P'' = \frac{k}{F''^2} \; . \; . \; . \; .,$$

so sind P', P'' . . . . die Gewichte der Werthe von $\alpha' - A'$, $\alpha'' - A''$ . . . .; demnach ist

$$\Delta \alpha = \frac{P'(\alpha' - A') + P''(\alpha'' - A'') + \dots}{P' + P'' + \dots}$$

die wahrscheinlichste Correction der aus den Tafeln berechneten Rectascensionen des Mondes; ihr mittlerer Fehler Φ kann durch die Formel

$$\Phi = \pm \frac{\sqrt{P'^2 F'^2 + P''^2 F''^2 + \ldots}}{P' + P'' + \ldots}$$

ausgedrückt werden.

Es sei $L+x$ die genaue, L die genäherte geographische Länge, welche bei der Rechnung von A benutzt wurde, und λ die Zunahme der AR des Mondes in einer Secunde mittlerer Zeit; man erhält dann $L+x = L+\frac{\alpha-(A+\Delta\alpha)}{\lambda}$, mit dem mittleren Fehler $\pm\frac{1}{\lambda}\sqrt{F^2+\Phi^2}$, oder mit dem Gewicht $\frac{k\lambda^2}{F^2+\Phi^2}$.

Man kann auf diese Weise das Gewicht jeder Längenbestimmung berechnen und mit Berücksichtigung der Gewichte die wahrscheinlichste Länge finden.

Es ergiebt sich aus Greenwicher Beobachtungen, dass $f = \pm 0^s{,}09$ ist, $b = \pm 0^s{,}08$ bei Sterndurchgängen und $b = \pm 0^s{,}1$ bei Monddurchgängen*).

Wenn die correspondirenden Beobachtungen fehlen und $\Delta\alpha$, d. h. die Correction der Tafel, aus Beobachtungen an benachbarten, vorangehenden und nachfolgenden Tagen, nach der Formel

$$\Delta\alpha = a + bt + ct^2$$

gefunden wird, so ist eine solche Bestimmung weniger zuverlässig als bei Benutzung der correspondirenden Beobachtungen, da die Formel nicht streng richtig ist; auch ist die sichere Bestimmung der mittleren zu befürchtenden Fehler ziemlich schwierig. Um Weitläufigkeit zu vermeiden, ist es hinlänglich, den mittleren Fehler der Längenbestimmung in diesem Fall annähernd zu erhalten und gleich

$$\pm\frac{1}{\lambda}\sqrt{F^2+\varepsilon^2\left(1+\frac{t^2}{T^2}\right)}$$

---

*) Chauvenet, Spherical and practical Astronomy, Vol. I, p. 365 sqq.

zu setzen, wo λ und F die oben erwähnten Bedeutungen haben; $\pm\varepsilon$ ist der mittlere Fehler der auf guten Sternwarten gefundenen AR des Mondes; t bezeichnet das Intervall zwischen der Culminationszeit des Mondes an dem Orte, dessen Länge gesucht wird, und der Epoche, von welcher t abgezählt wird; T ist das Halbintervall zwischen der Zeit der frühesten und der Zeit der spätesten Bestimmung der AR des Mondes, welche bei der Ableitung von $\Delta\alpha$ benutzt wurden.

Die Erfahrung hat bewiesen, dass selbst auf guten Sternwarten die Rectascension des Mondes nur bis etwa $\pm 0^s{,}1$ genau zu erhalten ist, so dass der Längenunterschied von zwei Sternwarten aus einer Mondculmination bis $\pm 3^s\sqrt{2}$ oder $4^s{,}24$ fehlerhaft sein kann. Noch grössere Fehler sind zu erwarten, wenn tragbare Instrumente auf Reisen gebraucht werden; es ist dann gut, wenn der Fehler der einzelnen Bestimmungen nicht $6^s{,}5$ übersteigt. Sind keine Beobachtungen vorhanden für die Ermittelung der Correction der Tafel, und man rechnet die Länge nur vermittelst des astronomischen Jahrbuchs, so kann die Unsicherheit der Länge noch viel erheblicher werden. Sogar im Falle guter und zahlreicher Beobachtungen lässt sich die geographische Länge aus Mondculmination nicht genauer als etwa bis auf eine Secunde in Zeit ableiten.

Beispiel. Am 24. September 1836 wurde die Culmination des Mondes zu Novotscherkask beobachtet, zu welcher sich entsprechende Beobachtungen in Dorpat und Greenwich finden; hierbei wollen wir noch einige Worte über die Reihenfolge der Beobachtungen sagen.

Die Zeit der Culmination des Mondes zu Novotscherkask war am 24. September 1836 beinahe um $0^h\,8^m$ Sternzeit; demgemäss wurden zwei Sterne *α Pegasi* und *γ Cephei* zur Bestimmung des Standes des Instruments gewählt, welche nicht lange vor der Culmination des Mondes im Meridian beobachtet wurden; der letztere Stern hat ungefähr 76° 43′ nördliche Declination, und konnte daher als ein Polarstern betrachtet werden. Nach

der Culmination des Mondes wurde bei ganz derselben Lage des Instruments zuerst *β Ceti* und *α Ursae Minoris* an den drei ersten Fäden des Instruments beobachtet, darauf umgelegt und *α Ursae Minoris* in dieser neuen Lage des Instruments an den beiden letzten Fäden wieder beobachtet; hierdurch wurde der Collimationsfehler abgeleitet. Die Angabe des Niveaus an der horizontalen Umdrehungsachse wurde mehrere Mal abgelesen, so dass folglich der Stand des Durchgangsinstruments vor und nach der Mondculmination vollkommen bestimmt war. Der Kürze haber wollen wir nicht alle sich hierauf beziehenden Beobachtungen und Berechnungen anführen, sondern gleich die Mittelwerthe geben, wie sie für die Culminationszeit des Mondes nach den in der Theorie des Passageninstruments erklärten Methoden gefunden wurden; es fand sich, dass

$$i = +0^s{,}30;\quad n = +2^s{,}00 \text{ und } c = +0^s{,}14,$$

alles in Zeit, waren.

Die Breite des Beobachtungsorts war $= \varphi = 47°24',2$; folglich erhält man:

$$m = -n tg\varphi + i sec\varphi = -1^s{,}73 \text{ in Zeit.}$$

Bei den Beobachtungen wurde ein Chronometer gebraucht, welches täglich gegen mittlere Sonnenzeit um $4^s{,}92$ voreilte, oder sich um $3^m 51^s{,}63 = 231^s{,}63$ Sternsecunden in jedem Tage gegen Sternzeit verspätete; um $11^h 19^m 40^s{,}92$ Chronometerzeit war die Uhrcorrection dieses Chronometers $= +12^h 48^m 24^s{,}19$, welche zu der Chronometerzeit zugelegt werden muss, um die genaue entsprechende Sternzeit zu erhalten.

Wir wollen jetzt die beobachtete Mondculmination und die Beobachtungen der Mondsterne, mit welchen noch *β Ceti* verbunden wurde, hier anführen; die Durchgänge dieser Sterne und des Mondes wurden an allen fünf Fäden beobachtet, der Raumersparniss wegen wollen wir jedoch in der folgenden Tafel nur den Durchgang der Gestirne durch den Mittelfaden im Mittel angeben.

Gestirne	An dem Mittelfaden nach Chronometer-zeit	Reduction auf den Meridian	Uhrfehler bei der Beobachtung am Mittelfaden
p Piscium	$11^h\ 1^m\,59^s,82$	$-1^s,748$	$+12^h\,48^m\,21^s,34$
s Piscium	11 8 38,66	$-1,825$	$+12$ 48 22,38
2. Mondrand	11 19 40,68	$-1,758$	$+12$ 48 24,19
β Ceti	11 46 58,10	$-2,270$	$+12$ 48 28,54
δ Piscium	11 51 45,72	$-1,357$	$+12$ 48 29,37

Die Reduction des Mittelfadens auf den Meridian wurde für die Sterne nach der Formel: $+c\sec\delta+n\,tg\,\delta+m$ berechnet; was aber die Reduction der Mondbeobachtung betrifft, so muss bemerkt werden, dass die genäherte östliche Länge des Beobachtungsortes von Greenwich, oder $L = 2^h\,40^m,5$ war, und da wir für die mittlere Zeit der Beobachtung des Mondes zu Novotscherkask $11^h\,53^m\,10^s,8$ erhalten, so wird folglich die entsprechende genäherte Greenwicher Zeit $= 9^h\,12^m\,40^s,8$ sein; hierfür findet man aus dem Nautical Almanac die Aequatorial-Horizontalparallaxe des Mondes $0°\,58'$; und die wahre Declination $= -2°\,56'$; wo (—) bedeutet, dass die Monddeclination südlich, die Breite des Orts aber nördlich, also ungleichnamig war; die geographische Breite des Beobachtungsorts ist $\varphi = 47°\,24',2$; die dieser entsprechende geocentrische Breite des Orts $\varphi' = 47°\,18'$, die wahre Meridianzenithdistanz des Mondcentrums vom geocentrischen Zenithe $= z = \varphi' - \delta = 50°\,9'$; die Höhenparallaxe $= 0°\,44'$, welche im Meridiane der Parallaxe in Declination gleich wird; folglich die scheinbare Zenithdistanz des Mondcentrums vom geocentrischen Zenithe $= z' = 50°\,53'$; die scheinbare Declination des Mondes $= \delta' = -3°\,40'$ und endlich λ oder die Zunahme der *AR* des Mondes in einer Sternzeitsecunde $= 0^s,0338$ in Zeit, so dass in unserem Falle:

$$1+\lambda = 1{,}0338;\ \pi = 0°\,58';\ \varphi' = 47°\,18';\ \delta' = -3°\,40';$$
$$c = 0^s{,}14;\ n = 2^s{,}00;\ m = -1^s{,}73.$$

Also wird die Reduction des Mittelfadens auf den Meridian $= (1+\lambda).(1 - \sin\pi\cos\varphi'\sec\delta').(c\sec\delta' + n\,tg\,\delta' + m) = -1^s 758$ werden.

Um indessen ein Beispiel zu geben, wie man die Seitenfäden bei der Mondbeobachtung auf den Mittelfaden reducirt, wollen wir hier aus dem Beobachtungsjournal die folgenden Durchgänge des zweiten Mondrandes durch alle fünf Fäden anführen:

I	II	III	IV	V	
$18^m 58^s,7$	$19^m 20^s,8$	$11^h 19^m 42^s,8$	$20^m 4^s,7$	$20^m 27^s,5$	. . (*A*).

Die Fädenintervalle in Chronometerzeit-Secunden ausgedrückt, waren im Aequator:

$f' = 43^s,04$; $f'' = +21^s,14$; $f^{IV} = -21^s,69$; $f^{V} = -43^s,61$.

Das Chronometer ging beinahe nach mittlerer Zeit, und folglich wird λ' oder die Zunahme der *AR* des Mondes in einer Chronometersecunde $= 0^s.034$ in Zeit sein; berechnet man nun die Fädenreductionen für die verschiedenen Fäden nach der Formel:

$$(1+\lambda')\frac{\sin z}{\sin z'} \cdot f\sec\delta,$$

wo $\delta = -2°56'$, $z = 50°9'$ und $z' = 50°53'$ ist, so erhält man zur Fädenreduction folgende Zahlen:

$+44^s,10$; $+21^s,66$; $-22^s,21$; $-44^s,67$.

Mit Hülfe dieser Zahlen findet man den Durchgang des Mondrandes durch den Mittelfaden:

	$11^h 19^m 42^s,80$
	42 ,46
	42 ,80
	42 ,49
	42 ,83
Mittel	$11^h 19^m 42^s,676$

Rechnungsbeispiel für den ersten Faden:

$lg(1+\lambda')$ . . .	=	0,0145
$lg\sin z$	=	9,8852
Summe	=	9,8997
$lg\sin z'$	=	9,8898
Unterschied . .	=	0,0099
$lg f$	=	1,6339
$lg\sec\delta$	=	0,0006
$lg\,44^s,10$ . . .	=	1,6444

Hier wurden die Beobachtungen an allen Fäden angestellt, und folglich kann man den wahrscheinlichen Durchgang durch den Mittelfaden auch dadurch finden, dass man das arithmetische Mittel aus den Durchgängen (*A*) an allen Fäden nimmt, wodurch man erhält . . . . $= 11^h\,19^m\,42^s{,}900$
und hierzu die Correction für die ungleichen Fädenintervalle oder:

$\left(\frac{43^s{,}04 + 21^s{,}14 - 21^s{,}69 - 43^s{,}61}{5 \cos\delta}\right)$ hinzulegt . . . . . $-0^s{,}224$

wodurch man den gesuchten Durchgang durch den Mittelfaden erhält . . . . . $= 11^h\,19^m\,42^s{,}676.$

Wenn man nun zu den Durchgängen durch den Mittelfaden die Reductionen auf den Meridian und die Uhrcorrection gegen Sternzeit zulegt, so findet man aus unseren Beobachtungen die geraden Aufsteigungen der Gestirne, welche in folgender Tabelle mit den correspondirenden Beobachtungen in Dorpat und Greenwich zusammengestellt sind.

Beobachtete *AR*; 1836 am 24. September:

Benennung der Gestirne	in Novotscherkask	in Dorpat	in Greenwich
p Piscium	$23^h\,50^m\,19^s{,}41$	$23^h\,50^m\,19^s{,}28$	$23^h\,50^m\,19^s{,}38$
s Piscium	23 56 59 ,22	23 56 59 ,04	23 56 59 ,19
2. Rand ☾	0 8 5 ,11	0 9 57 ,06	0 13 41 ,40
β Ceti	0 35 24 ,37	— — —	0 35 24 ,21
δ Piscium	0 40 13 ,73	— — —	0 40 13 ,44

Die geraden Aufsteigungen der Sterne können so angenommen werden, wie sie für Greenwich gegeben sind, denn man findet keine andere gute und vollständige Beobachtung. Vergleicht man also diese mit den Bestimmungen der *AR*, die an den anderen Orten gemacht wurden, so erhält man folgende Beobachtungsfehler:

Benennung der Gestirne	in Novotscherkask	in Dorpat
p Piscium	$-0^s,03$	$+0^s,10$
s Piscium	$-0,03$	$+0,15$
β Ceti	$-0,16$	—
δ Piscium	$-0,29$	—
Mittel	$-0^s,13$	$+0^s,12$

Addirt man diese Correctionen mit ihren Zeichen zu den oben angegebenen *AR* des Mondrandes, so wird die wahrscheinliche *AR* des zweiten Mondrandes werden:

Aus den Beobachtungen zu Novotscherkask . . $= 0^h\ 8^m\ 4^s,98$
" " " " Dorpat . . . . . $= 0\ \ 9\ \ 57,18$
" " " " Greenwich . . . $= 0\ \ 13\ \ 41,40$

Die östliche Länge Novotscherkasks von Greenwich ist genähert $= 2^h 40^m 31^s,1$, die genaue östliche Länge Dorpats von Greenwich aber $= 1^h 46^m 55^s,5$; beide Längen sind östlich, man muss sie daher als negativ betrachten. Der weitere Gang der Berechnung stellt sich in folgender Tafel dar, bei der der Nautical Almanac für 1836 gebraucht wurde:

	in Novotscherkask	in Dorpat	in Greenwich
Sternzeit der Beobachtung des 2. Mondrandes	$0^h\ 8^m\ 4^s,98$	$0^h\ 9^m 57^s,18$	$0^h 13^m 41^s,40$
Länge	$-2^h 40^m 31^s,10$	$-1^h 46^m 55^s,50$	$-0^h\ 0^m\ 0^s,00$
Entsprechende Sternzeit in Greenwich . . .	$21^h 27^m 33^s,88$	$22^h 23^m\ 1^s,68$	$0^h 13^m 41^s,40$
Sternzeit im mittleren Mittage zu Greenwich	$12^h 13^m 23^s,46$	$12^h 13^m 23^s,46$	$12^h 13^m 23^s,46$
Verflossene Sternzeit nach diesem Greenw. Mittage	$9^h 14^m 10^s,42$	$10^h\ 9^m 38^s,22$	$12^h\ 0^m 17^s,94$
Reduction auf mittl. Zeit	$-1^m 30^s,79$	$-1^m 39^s,90$	$-1^m 58^s,00$
Mittl. Greenwicher Zeit	$9^h 12^m 39^s,63 = T$	$10^h\ 7^m 58^s,32 = T$	$11^h 58^m 19^s,94 = T''$

Für diese Zeiten T, T', T'' wurden nun aus dem Nautical Almanac durch strenge Interpolation die wahre AR des Mondcentrums, ebenso die wahren Mondhalbmesser h, h', h'' und endlich die genäherten wahren Declinationen des Mondcentrums δ, δ', δ'' abgeleitet, so dass auf diese Weise folgen wird:

Für die Zeit in Greenwich	Die berechnete AR des ☾ Centrums	Wahrer Halbmesser des ☾	Genäherte Decl. des ☾ Centrums
T	$0^h\ 7^m\ 2^s,25$	15′ 49″,06	— 2° 56′,0
T'	0 8 54 ,79	15 48 ,72	— 2 41 ,5
T''	0 12 38 ,94	15 48 ,01	— 2 11 ,7

Berechnet man aus der Beobachtung die wahre AR des ☾ Centrums, so folgt:

Aus den Beobachtungen	AR 2. Rand ☾	$\frac{h}{15 \cos \delta}$	Beobachtete AR des ☾ Centrums	Unterschied der Berechnung und Beobachtung
in Novotscherkask	$0^h\ 8^m\ 4^s,98$	1′ 3″,35	$0^h\ 7^m\ 1^s,63$	$-0^s,62 = \delta A$
in Dorpat ...	0 9 57 ,18	1 3 ,32	0 8 53 ,86	$-0,93 = \delta A'$
in Greenwich ..	0 13 41 ,40	1 3 ,25	0 12 38 ,15	$-0,79 = \delta A''$

Aus den in Dorpat und Greenwich gemachten Beobachtungen kann man durch ein arithmetisches Mittel den Fehler der Mondtafeln in gerader Aufsteigung ableiten:

$$= \delta\alpha = \frac{-0^s,93 - 0^s,79}{2} = -0^s,86 \text{ in Zeit.}$$

Zur Zeit der Beobachtung in Novotscherkask am 24. September 1836 und um $9^h 12^m,6$ mittlere Zeit war aber die Zunahme der AR des Mondcentrums in einer Sternzeitsecunde $= 0^s,03384$ in Zeit; folglich wird man haben:

$$\delta A = -0^s,62;\ \delta\alpha = -0^s,86;\ \lambda = 0,03384;$$

$$\delta A = \lambda . x + \delta\alpha \text{ oder der Fehler der Länge} =$$

$$x = \frac{+0^s,24}{0,03384} = +7^s,1.$$

Nun liegt Novotscherkask östlich von Greenwich; mithin ist seine Länge negativ; und da wir für diese östliche Länge Novotscherkasks $2^h 40^m 31^s,1$ angenommen haben, so folgt daraus:

$$\begin{array}{llcl} \text{Genäherte Länge} \ldots & L & = & -2^h 40^m 31^s,1 \\ \text{Correction} \ldots\ldots & x & = & +7,1 \\ \text{Genaue Länge} \ldots & L+x & = & -2^h 40^m 24^s,0 \end{array}$$

Um den mittleren Fehler und das Gewicht dieser Bestimmung zu erhalten, nehmen wir an

für Novotscherkask:	für Dorpat:	für Greenwich:
$n=5,\ b=0^s,2,\ f=0,1$ für Mond und Sterne;	$n=7;\ f=0,09$	dasselbe
Anzahl der Sterne . . 4	$b=0,1$ für Mond	.
	$b=0,08$ für Sterne	.
$f^2+\frac{b^2}{n}=0,018$	Anzahl der Sterne . . 2	.
$p'=p''=p'''\ldots.$	$f^2+\frac{b^2}{n}=0,0095$	.
$\psi^2=\frac{0,018}{4}=0,0045$	$\psi^2=\frac{0,0095}{2}=0,0047$	$\psi^2=\frac{0,0095}{4}=0,0024$
$F^2=f^2+\frac{b^2}{n}+\psi^2$ $=0,0225$	$F^2=0,0142$	$F^2=0,0119$

Es sei $k = 0,0119$; dann ist

$$P = \frac{119}{225} = 0,53,\quad P' = \frac{119}{142} = 0,838;\quad P'' = 1.$$

$$\Phi^2 = \frac{0,0142 . P'^2 + 0,0119\, P''^2}{(P'+P'')^2} = 0,0019.$$

$$\Delta\alpha = \frac{P'(\alpha'-A') + P''(\alpha''-A'')}{P'+P''} \pm \Phi =$$

$$= \frac{-0^s,93 . P' - 0^s,79\, P''}{P'+P''} \pm \Phi = -0^s,854 \pm \Phi.$$

Die Correction x der angenommenen Länge ist

$$x = \frac{\delta A - \Delta\alpha}{\lambda} = \frac{-0^s,62 + 0^s,854}{0,03384} = +6^s,92$$

mit dem mittleren Fehler

$$\pm \frac{1}{\lambda}\sqrt{f^2+\frac{b^2}{n}+\psi^2+\Phi^2} = \pm \frac{1}{\lambda}\sqrt{0,0244} = \pm 4^s,62$$

und mit dem Gewicht

$$= \frac{\lambda^2 . k}{f^2+\frac{b^2}{n}+\psi^2+\Phi^2} = 0,04693 . k.$$

Längenbestimmung durch Mondazimuthe.

213. Wenn die Umstände es nicht gestatten den Mond im Meridiane zu beobachten, und der Astronom ein gutes Universalinstrument hat, so kann er die Länge hinreichend genau durch die Messung der Azimuthe des Mondes und eines ihm nahen Sternes bestimmen. In diesem Falle besteht die Anordnung der Beobachtungen in Folgendem:

1) Muss man immer zuerst die Uhrcorrection des Chronometers bestimmen, welches man auf verschiedene Weise erreichen kann; denn mit Hülfe eines Universalinstruments kann der Beobachter seine Zeit entweder dadurch bestimmen, dass er die Zenithdistanzen passender, gut bestimmter Sterne in der Nähe des östlichen oder westlichen Theils des ersten Verticals misst; oder er kann auch sein Instrument als Durchgangsinstrument gebrauchen. Der Gang der Uhr muss genau bekannt sein.

2) Zur Vergleichung mit dem Monde muss man einen ihm nahen und guten bestimmten Stern, entweder aus dem Nautical Almanac oder aus dem Berliner Astronomischen Jahrbuche entnehmen; man fängt nun an dasjenige Gestirn zu beobachten, welches die kleinere gerade Aufsteigung hat, und dann das andere, indem man sich nach Möglichkeit bestrebt, die Beobachtungen symmetrisch in gleichen Zeiträumen so anzustellen, dass bei diesen Beobachtungen der Mond und der Stern beinahe

gleiche Azimuthe haben. Jedes der beiden Gestirne kann man an allen Fäden beobachten, und sogleich nachdem man die Zeit dieses Durchganges aufgeschrieben hat, muss man das Niveau an der horizontalen Umdrehungsachse ablesen, darauf das Niveau selbst umlegen und wieder ablesen, ohne den Standpunkt zu verlassen, an welchem der Beobachter während der Beobachtung des Mondes und des Sterns sich befand; alsdann liest man die Angaben der Mikroskope am Horizontalkreise ab, und schreibt sich genähert die Ablesung an einem der Mikroskope (z. B. dem ersten) am Verticalkreise auf. Obgleich es eigentlich nicht durchaus nöthig ist, das Mikroskop am Verticalkreise abzulesen, so kann man sich doch dadurch die spätere Berechnung abkürzen, bei welcher man, wie wir weiter unten sehen werden, die genäherte Zenithdistanz des Gestirns haben muss; kennt man nun schon den Ort des Zeniths auf dem Verticalkreise durch die Beobachtung eines terrestrischen Gegenstandes, so kann man leicht aus der oben erwähnten Ablesung die Zenithdistanz des Gestirns genähert ableiten.

3) Nach Beendigung einiger Beobachtungen des Mondes und Sterns in einer Lage des Instruments, muss man den oberen beweglichen Theil des Instruments um beinahe 180° in Azimuth umdrehen und darauf in dieser zweiten Lage des Instruments eine neue Beobachtungsreihe, ganz ebenso der Zahl und Ordnung nach wie vorher, anstellen.

Berechnung der Beobachtungen.

214. Die Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden berechnet man bei der Beobachtung des Sterns nach der Formel:

$$k = \tfrac{1}{15}(t_{,} - t) . \lambda = \frac{f . \lambda'}{\cos n \cos \delta \cos\left(\frac{t_{,} + t}{2} + m\right)}$$

§ 117, S. 315. Hier ist f der Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden, in Zeitsecunden ausgedrückt; n der Abstand des

grössten Kreises des Instruments vom Pole des Aequators; δ die Declination des Sterns; $t_{,}$ und t die Stundenwinkel des Sterns bei seinem Antritte an den Mittel- und Seitenfaden — diese Winkel sind genähert aus den Beobachtungen selbst bekannt und werden nach der Richtung der täglichen scheinbaren Bewegung gezählt —; λ' ist das Verhältniss einer Sternzeitsecunde zu einer Secunde Chronometerzeit; der Werth von n wird hier als positiv betrachtet, wenn der Stern früher durch den grössten Kreis des Instruments als durch den Declinationskreis ging, welcher vom Pole des Aequators aus nach dem Durchschnittspunkte des grössten Kreises des Instruments mit dem Aequator führt. Wenn das Instrument mittelst des Niveaus gut berichtigt ist, so kann man n und m mit hinreichender Annäherung nach folgenden Formeln berechnen:

$$\sin n = \cos\varphi . \sin A; \quad \sin m = -tg\,\varphi . tg\, n,$$

wo φ die Breite des Beobachtungsorts ist, und A das Azimuth des grössten Kreises des Instruments, bei nördlicher Polhöhe von Norden nach Osten gezählt, bedeutet.

Bei den Beobachtungen des Mondes lassen sich die Seitenfäden auf den Mittelfaden folgendermassen reduciren:

$$\text{Reduction} = k = \frac{f . \lambda ☾ . \frac{\sin z}{\sin z'}}{\cos n \cos \delta ☾ . \cos[\frac{1}{2}(t'+t)+m]},$$

wo t' und t die Stundenwinkel des Mondes am Mittel- und Seitenfaden sind, welche man aus einer astronomischen Ephemeride und aus den Beobachtungen herleiten kann; $\delta ☾$ ist die wahre Declination, z' die scheinbare und z die wahre Zenithdistanz des Mondcentrums, oder die für Parallaxe verbesserte Zenithdistanz, alles zur Zeit, wenn der Stundenwinkel des Mondes gleich $\frac{1}{2}(t'+t)$ ist; $\lambda ☾ = \frac{86400''+\Delta\alpha}{86400''}$, wo $\Delta\alpha$ die Zunahme der AR des Mondes in Zeitsecunden ausgedrückt, im Laufe von 24 Chronometersecunden bedeutet. Die Werthe t', t, z', z, n und m braucht man nur nahezu zu kennen.

Aus dem gefundenen wahrscheinlichsten Durchgange des Sterns durch den Mittelfaden berechnet man sein entsprechendes Azimuth durch die Gleichungen:

$$tg\,\tfrac{1}{2}(a-q) = tg\,\tfrac{1}{2}t\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta)};$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}(a+q) = tg\,\tfrac{1}{2}t\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta)};$$

wo t der Stundenwinkel des Sterns ist, den man aus der Sternzeit der Beobachtung und der scheinbaren geraden Aufsteigung des Sterns § 5, S. 10 ableiten kann; a ist dabei das Azimuth des Sterns, von Süden aus gezählt, wenn die Polhöhe nördlich ist, und q der parallactische Winkel.

Nehmen wir jetzt an, dass i die Neigung der horizontalen Umdrehungsachse des Instruments ist, welche mittelst des Niveaus abgelesen wurde, so haben wir schon in § 73, S. 179 gesehen, auf welche Weise man die Gradablesungen auf dem Horizontalkreise vom Einflusse dieser Neigung i befreien kann. Legt man dann mit Rücksicht auf die Lage des Sterns, entweder $+a$, oder $-a$ zu der vom Einflusse der Neigung i befreiten Angabe der Mikroskope am Horizontalkreise hinzu, so erhält man den Ort des Meridians auf diesem Kreise; wenn nun der Collimationsfehler, welchen wir durch c bezeichnen wollen, gleich Null gewesen wäre, so würde man in beiden Lagen des Instruments den Ort des Meridians auf dem Horizontalkreise ganz gleich gefunden haben, denn im Meridiane würde der Unterschied zwischen den Mikroskopangaben bei der ersten und zweiten Lage des Instruments genau gleich 180° sein; im entgegengesetzten Falle dagegen wird der Ueberschuss über 180° gleich $c\left(\frac{1}{\sin\zeta'}+\frac{1}{\sin\zeta''}\right)$ werden, wo ζ' und ζ'' die Mittelzahlen aus den Zenithdistanzen des Sterns in den Beobachtungen in der ersten und zweiten Lage des Instruments sind; hieraus kann man nun den Werth von c der Grösse und dem Zeichen nach bestimmen, so dass man alsdann weiss, wie man c in jedem

Falle gebrauchen muss; die Correction, welche man bei der Ablesung am Horizontalkreise wegen des Collimationsfehlers anbringen muss, wird $= \pm \frac{1}{\sin z'}$, wo z' die scheinbare Zenithdistanz des Gestirns zur Zeit der Beobachtung ist.

Wir werden das Azimuth a, je nach den Umständen, von Süden nach Osten und nach Westen zählen; ist die Polhöhe nördlich, und bezeichnet man durch O den Südpunkt des Meridians auf dem Horizontalkreise des Instruments und durch b die Ablesung an diesem Kreise bei der Beobachtung des Sterns, welche schon durch die Werthe $\frac{c}{\sin z}$ und $\frac{i}{tg\, z}$ für den Collimationsfehler und die Neigung der Umdrehungsachse verbessert ist, so erhält man genau $O = b \pm a$, wo bei der bereits in § 73, S. 179 erwähnten Ordnung der Gradtheilung man bei östlichen Azimuthen (+), bei westlichen aber (—) nehmen muss.

Hierauf muss man das Azimuth des Mondes berechnen; fürs erste wird man die Ablesungen am Horizontalkreise, bei der Beobachtung des Mondrandes, für die Werthe $\frac{c}{\sin z'☾}$ und $\frac{i}{tg\, z'☾}$ verbessern, und dann wird man noch zu ihnen $\pm \frac{r}{\sin z☾}$ hinzulegen, um die Ablesungen am Horizontalkreise auf das Mondcentrum zu reduciren; r ist hierbei der wahre oder geocentrische Halbmesser des Mondes; $z☾$ die wahre Zenithdistanz des Mondes vom scheinbaren Zenith, und $z'☾$ seine scheinbare Zenithdistanz, auf dasselbe Zenith bezogen; wenn nun der erste (oder westliche) Rand des Mondes beobachtet wurde, und die Theilung, ebenso wie in § 73, S. 179 erwähnt wurde, von links nach rechts zunimmt, so muss man bei r das Zeichen (—) brauchen, dagegen aber das Zeichen (+), wenn der zweite (oder östliche) Rand des Mondes beobachtet wurde; nimmt man nun den Unterschied zwischen dem Orte O des Südpunktes des Meridians und der verbesserten Vernierablesung, die sich auf das

Mondcentrum bezieht, so erhält man das scheinbare Azimuth des Mondcentrums; und daraus kann man leicht das wahre Azimuth des Mondcentrums, auf das scheinbare Zenith bezogen, nach dem in den Artikeln über Parallaxe Gesagten herleiten, denn es ist:

$$\textit{Wahres Azimuth} = \textit{Scheinbares Azimuth} - \pi \cdot \frac{\vartheta \sin 1'' \sin a' ☾}{\sin z ☾}$$
$$= a' ☾ - \xi,$$

wo $\vartheta = \mu \frac{\sin 2\varphi}{\sin 1''}$ ist; ferner bedeutet $a' ☾$ den Winkelwerth des scheinbaren Azimuths, welches immer positiv genommen werden soll; π die örtliche Horizontalparallaxe des Mondes, μ die Erdabplattung, welche sehr nahe $= \frac{1}{298}$, φ die geographische Breite des Orts und ξ die Parallaxe des Mondes im Azimuth.

Wenn man bei nördlicher Polhöhe das auf diese Weise gefundene, von Süden aus gezählte wahre Azimuth des Mondcentrums durch $a ☾$ und den diesem Azimuthe entsprechenden wahren Stundenwinkel durch $t ☾$ bezeichnet, so kann man zur Berechnung von $t ☾$ folgende Formel anwenden:

$$\sin q = \frac{\cos \varphi}{\cos \delta} \cdot \sin a ☾$$
$$tg \tfrac{1}{2} t ☾ = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi - \delta)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \delta)} tg \tfrac{1}{2}(a ☾ - q) \quad \ldots\ldots \quad (a),$$

wo δ die wahre Declination des Mondcentrums ist.

Hat man $t ☾$ gefunden, so ist die wahre gerade Aufsteigung des Mondcentrums

$$= \alpha = \text{Sternzeit der Beobachtung} \pm \frac{t ☾}{15},$$

wo (+) dann gebraucht wird, wenn der Mond im Osten, dagegen (—), wenn er im Westen beobachtet wurde. Damit man die einzeln für verschiedene Zeiten so gefundenen Werthe der *AR* des Mondes untereinander vergleichen kann, reducirt man man sie alle, mit der aus einer astronomischen Ephemeride ge-

fundenen stündlichen Bewegung des Mondes in gerader Aufsteigung, auf eine einzige Zeitepoche; und alsdann wird das Mittel aus den erhaltenen Ableitungen die wahrscheinlichste *AR* des Mondcentrums für diese Epoche sein.

Der Fehler $\mathfrak{d}a$ im Azimuthe a veranlasst im Stundenwinkel t den Fehler $\mathfrak{d}t = \frac{\sin z . \mathfrak{d}a}{\cos\delta \cos q}$; es ist also vortheilhaft, nahe am Meridian zu beobachten. In hohen Breiten verliert man aber wenig, wenn auch das Instrument weit vom Meridian aufgestellt wird, weil dann der parallactische Winkel q immer ziemlich klein bleibt. Ist die Declination des Mondes positiv und grösser als die Polhöhe, so muss man vermeiden, in der Nähe der grössten Elongation des Mondes vom Meridian zu beobachten. Ueberhaupt ist die vorgetragene Methode in kleinen Breiten nur in der Nähe des Meridians gut anwendbar.

215. Um den Einfluss ermessen zu können, welchen ein Fehler in der bei der Rechnung angewandten Declination des Mondes auf die Genauigkeit des Stundenwinkels t und der *AR* des Mondes ausüben kann, wollen wir die Gleichung:

$$\sin t . \cot g\, a = \cos\varphi\, tg\,\delta - \sin\varphi \cos t,$$

in welcher a das Azimuth und δ die Declination des Mondes bezeichnet, in Bezug auf δ und t differenziiren; dadurch erhält man:

$$\mathfrak{d}t = \frac{\sin t . \mathfrak{d}\delta}{\cos^2\delta\,(\cos t\, tg\,\delta - tg\,\varphi)} = -tg\,q . \sec\delta . \mathfrak{d}\delta,$$

wo q den parallactischen Winkel (auf der westlichen Seite des Meridians positiv, auf der östlichen negativ), bedeutet. Der Fehler des Stundenwinkels t verschwindet also im Meridiane und erreicht vom Zeichen abgesehen, den grössten numerischen Werth im ersten Verticale, oder bei $a = \pm 90°$, was jedoch nur dann möglich ist, wenn $\delta > 0$ und $< \varphi$ ist, zugleich aber δ positiv ist. Setzt man z. B. $\varphi = 60°$ und $\delta = +30°$, so hat man im ersten Verticale $\mathfrak{d}t = 0{,}8 . \mathfrak{d}\delta$ in Bogen. Der

Fehler der bei der Berechnung angewandten Declination des Mondes hängt 1) davon ab, dass man vorläufig die geographische Länge L des zu bestimmenden Punktes nicht genau genug kennt, um eine der Beobachtung entsprechende Zeit des ersten Meridians zu haben, für welche durch Interpolation die Declination des Mondes gefunden werden muss; 2) von dem Fehler der Mondtafeln in Declination, welcher sich nicht selten bis zu 2″ oder 3″ erheben kann; diesen letzteren Fehler wird man eliminiren, wenn man entweder gleichzeitige Bestimmungen der Abweichung des Mondes auf guten Sternwarten zur Disposition hat und sie benutzt, oder wenn man die Beobachtungen nahe und sehr symmetrisch um den Meridian herum anstellt.

Hat man aus Azimuthbeobachtungen die AR des Mondes α erhalten, so findet man die geographische Länge des Beobachtungsorts dadurch, dass man aus den astronomischen Ephemeriden durch Interpolation die Zeit des Meridians der Ephemeride sucht, zu welcher der Mond die erwähnte $AR = \alpha$ hatte. Der Unterschied dieser Zeit und der zugehörigen Zeit der Beobachtung giebt die gesuchte Länge. Wenn es sich trifft, dass am Beobachtungstage die AR des Mondes an einer guten Sternwarte bestimmt war, so wird man den Fehler e der Mondtafeln in AR ermitteln und auf folgende Weise, nach Knorre's Vorschlag, die geographische Länge sehr bequem und genau berechnen können. Es sei L die vorläufig angenommene, $L+x$ die mit den Beobachtungen am besten übereinstimmende östliche Länge des Beobachtungsorts vom Meridiane der Ephemeride. Hat man die Uhrcorrection durch Sternbeobachtungen gefunden und ist T die Sternzeit der Beobachtung der AR des Mondes am Beobachtungsorte, so hat man durch strenge Interpolation die gerade Aufsteigung A in Bogen und die Declination δ des Mondes für die Sternzeit $T-L$ des Meridians der Ephemeride, und ebenso die Zunahme λ von A und die Zunahme ν der positiven Declination δ des Mondes in einer Sternzeitsecunde zu bestimmen; legt man dann zu A die Grösse e mit dem ge-

hörigen Zeichen hinzu, so wird der Fehler der Mondtafeln in *AR* eliminirt; bezeichnet man durch g den Fehler dieser Tafeln in Declination, und setzt $\delta + g = \delta' =$ der wahren verbesserten Declination des Mondes, so werden $A + e - \lambda . x$ und $\delta - \nu . x$ diejenigen Werthe der geraden Aufsteigung und Abweichung des Mondes sein, welche der Beobachtungszeit wirklich entsprechen. Der Einfluss der Correction $-\nu . x$ auf den aus dem beobachteten Azimuthe des Mondes berechneten Stundenwinkel t (bei nördlicher Polhöhe von Süden nach Westen gezählt), lässt sich leicht nach der Formel

$$\mathfrak{d} t = - tg q . sec \delta' . \mathfrak{d} \delta \text{ (in Bogen)},$$

$$\frac{\mathfrak{d} t}{15} = - tg . q . sec \delta' \frac{\mathfrak{d} \delta}{15} \text{ (in Zeit)}$$

berechnen, wo $-\nu . x$ statt $\mathfrak{d} \delta$ zu setzen ist, und wo q den parallactischen Winkel (auf der westlichen Seite des Meridians positiv, auf der östlichen negativ) bedeutet. Dadurch findet sich der verbesserte Stundenwinkel $= t + \nu . x . tg q . sec \delta$, und die verbesserte gerade Aufsteigung des Mondes $= \alpha - \nu . x . tg q sec \delta$. Dieser Werth muss aber mit dem obigen, d. h. mit $A + e - \lambda x$ identisch sein; wir haben also:

$$A + e - \lambda x = \alpha - \nu . x . tg q . sec \delta,$$

woraus

$$x = \frac{A + e - \alpha}{\lambda - \frac{\nu}{15} \cdot tg q sec \delta}$$

folgt.

216. Als Beispiel wollen wir die Beobachtungen berechnen, welche am 20. August 1842 auf der Sternwarte zu St. Petersburg mittelst eines kleinen Universalinstruments gemacht wurden. Zur Vergleichung mit dem Monde wurde der ihm nahe Stern *β Aquarii* gewählt, und die Beobachtungen wurden mit einer Uhr angestellt, nach welcher um $11^h 28^m 6^s,10$ Uhrzeit die

St. Petersburger Sternzeit = $21^h 23^m 18^s,63$; der Gang der Uhr war so, dass 1^h Uhrzeit = 1^h Sternzeit $+ 9^s,70$.

Der Mond sowohl, als die Sterne wurden an allen Verticalfäden beobachtet, deren unser Instrument sieben hatte; der Kürze wegen aber wollen wir das Mittel der auf den Mittelfaden reducirten Durchgänge der Gestirne durch alle Fäden geben. Ebenso führen wir hier nur das Mittel aus den Ablesungen am Horizontalkreise an.

Lage des Höhenkreises	Gestirne	Durchgang durch den Mittelfaden	Ablesung am Horizontalkreise	Neigung der horiz. Achse $= i$	Scheinbare Zenithdist. $= z'$
Im Osten	β *Aquarii*	$10^h 56^m 31^s,10$	125° 0′ 25″	+3″,20	66° 27′
		11 1 55,79	126 28 19	+4 ,30	66 21
		11 7 17,60	127 55 49	+4 ,25	66 17
	Erster Mondrand	$11^h 16^m 1^s,89$	124° 54′ 28″	+6″,40	71° 27′
		11 24 19,32	127 0 10	+4 ,20	71 18
		11 32 57,85	129 11 28	+5 ,90	71 11
					360 — z
Im Westen	β *Aquarii*	$11^h 55^m 56^s,40$	320° 9′ 30″	—2″,75	293° 49′
		12 1 19,20	322 36 58	—0 ,60	293 30
		12 6 26,37	324 0 2	—3 ,60	293 23
	Erster Mondrand	$12^h 13^m 14^s,80$	319° 24′ 50″	—5″,70	288° 56′
		12 20 18,70	321 12 28	—0 ,90	288 52
		12 27 4,30	322 55 21	—1 ,30	288 45

Die Breite des Beobachtungsorts war $= \varphi = 59° 56' 30'',5$; die scheinbare Declination des Sterns $= -6° 15' 24'',8$; seine scheinbare $AR = 21^h 23^m 18^s,64$. Nimmt man nun den Collimationsfehler $c = 0° 0' 0''$ an, so findet man aus den Beobachtungen des Sterns β *Aquarii*, dass der Ort des Südpunkts auf dem Horizontalkreise gleich war:

in der Lage I . . 133° 35′ 37″,9	in der Lage II . . 313° 35′ 10″,8
30 ,0	5 ,8
36 ,8	6 ,2
Mittel. . . . = 133° 35′ 34″,9	Mittel . . . = 313° 35′ 7″,6.

Hieraus sieht man, dass der Collimationsfehler c nicht Null sein kann; in unserem Falle ist sein Einfluss $= \frac{1}{2}.27'',3^s$ und also c selbst $= \frac{1}{2}.27'',3 \sin z$, wo z nahezu $= 66°24'$; folglich wird $c = \pm 12'',5$; wo (+) sich auf die zweite und (—) sich auf die erste Lage des Instruments bezieht; alsdann wird der wahre Ort des Meridians auf dem Horizontalkreise die Lage haben:

erste Lage ... zweite Lage

$O = 133°35'21'',2 \ldots \quad O = 313°35'21'',2.$

Die Uhr ging sehr nahe nach mittlerer Zeit, und bei der Mitte der Beobachtungen war ihre Correction gegen mittlere Zeit $= +1^s,00$, welche zu den bemerkten Angaben der Uhr zugelegt werden muss, um die entsprechenden mittleren St. Petersburger Zeiten zu erhalten; zieht man darauf die angenommene östliche Länge St. Petersburgs von diesen Zeiten ab (nämlich $2^h\,1^m\,13^s$), so erhält man die entsprechenden mittleren Greenwicher Zeiten, für welche man aus dem Nautical Almanac die wahre Declination des Mondcentrums, den wahren Halbmesser des Mondes $= 14'\,43'',2$ und die Aequatorial-Horizontalparallaxe $= 54'\,1'',0$ entnimmt; daraus folgt aber die örtliche Horizontalparallaxe des Mondes für St. Petersburg $= \pi = 53'\,53'',0$; und ferner wird der Unterschied zwischen der geographischen Breite $= \varphi$, und der geocentrischen $= \varphi'$, gleich $9'\,57'',5$ sein. Die letzte Columne in der folgenden Tafel giebt uns die Secunden des wahren Mondazimuths; die Grade und Minuten sind ganz dieselben, wie die, welche zum scheinbaren Azimuthe gehören.

	Ablesung am Horizontalkreise	Correctionen $\frac{c}{\sin z'}$	Correctionen $\frac{i}{tg\, z'}$	Correctionen $\frac{r}{\sin z}$	Verbesserte Ablesung $= b$	Scheinbares Azimuth $\mathfrak{C} = \pm(O-b)$	Par. in Azim. $= \xi$	Secunden des wahren Azim.
		—	—	—		Süd-Ost.		
I	124°54'28"	13",2	2",1	15'36",1	124°38'40",8	8°56'40",4	—1",5	38",9
	127 0 10	13 ,2	1 ,4	15 36 ,9	126 44 21 ,3	6 50 59 ,9	—1 ,2	58 ,7
	129 11 28	13 ,2	2 ,0	15 37 ,6	128 55 39 ,2	4 39 42 ,0	—0 ,7	41 ,3
		+	—	—		Süd-West.		
II	319°24'50"	13",2	1",9	15'38",2	319° 9'23",1	5°34' 1",9	—1",0	0",9
	321 12 28	13 ,2	0 ,3	15 37 ,8	320 57 3 ,1	7 21 41 ,9	—1 ,3	40 ,6
	322 55 21	13 ,2	0 ,5	15 37 ,3	322 39 56 ,4	9 4 35 ,2	—1 ,5	33 ,7

Aus dem Nautical Almanac findet man, dass zur Zeit der Beobachtung die Bewegung des Mondes in gerader Aufsteigung in einer Stunde mittlerer Zeit = $110^s,725$ war; und daher war diese Bewegung in einer Sternzeitstunde $\lambda_* = 110^s,47$. Indem wir nun alle die gefundenen geraden Aufsteigungen des Mondes auf eine allgemeine Zeitepoche reduciren, zu der wir die Zeit $21^h 45^m 34^s,6$ nehmen wollen, so erhalten wir folgende Tafel:

Wahres Azimuth des ☾ Centrums	Declination des Mondes	Stundenwinkel des ☾ in Zeit	Sternzeit der Beobachtung = s	Reduction der AR☾	Wahre AR☾ für $21^h 45^m 34^s,6$ Sternzeit
Südöstlich	— 10°				
8° 56′ 38″,9	23′ 2″,4	+ $0^h 34^m 18^s,52$	$21^h 11^m 12^s,60$	+ $63^s,26$	$21^h 46^m 34^s,38$
6 50 58 ,7	21 24 ,6	+ 0 26 14 ,96	21 19 31 ,31	+ 48 ,02	34 ,29
4 39 41 ,3	19 29 ,0	+ 0 17 50 ,92	21 28 11 ,30	+ 31 ,99	34 ,22
Südwestlich	— 10°				
5° 34′ 0″,9	11′ 39″,6	— $0^h 21^m 17^s,60$	$22^h 8^m 34^s,60$	— $42^s,35$	$34^s,65$
7 21 40 ,6	10 15 ,1	— 0 28 9 ,77	22 15 39 ,73	— 55 ,40	34 ,56
9 4 33 ,7	8 54 ,4	— 0 34 43 ,77	22 22 26 ,40	— 67 ,87	34 ,76

Mittel = T = $21^h 45^m 34^s,60$ . . AR☾ = $21^h 46^m 34^s,48$.

Sobald die wahre AR☾ gefunden ist, wird der übrige Theil der Rechnung zur Auffindung der Länge des Orts selbst ganz ebenso geführt, wie wir es oben gezeigt haben.

Bestimmung der Länge eines Orts mittelst der Beobachtung der Zenithdistanzen des Mondes.

217. Hier muss man ebenso wie vorher die Länge dadurch bestimmen, dass man die gerade Aufsteigung des Mondes herleitet; um dieses bewerkstelligen zu können, wählt man einen gut bestimmten, dem Monde nahegelegenen Stern, und beob-

achtet abwechselnd mit einem Verticalkreise, sowohl Zenithdistanzen des Sterns als auch des Ober- und Unterrandes des Mondes in beiden Lagen des Instruments; indem man sich dabei bemüht, die Beobachtungen so symmetrisch als möglich einzurichten; man muss dabei auch den Stand des Barometers und die Temperatur der Luft ablesen und überhaupt alle Vorschriften befolgen, die wir in dem Artikel über die Messung von Zenithdistanzen und über die Zeitbestimmung mittelst dieser angegeben haben. Je näher die Gestirne dem ersten Verticale sind, desto grösser wird die Genauigkeit des nachher abgeleiteten Resultats sein.

Kennt man nun die Breite des Beobachtungsorts und die Declination des Sterns, und ebenso auch den Stand und Gang des Chronometers, so wird man aus den Beobachtungen des Vergleichssterns die Uhrcorrection und den Ort des Zeniths auf dem Instrumente ableiten können.

Nimmt man nun den Unterschied zwischen diesem Orte des Zeniths und den für Niveau schon verbesserten Ablesungen am Verticalkreise, welche man bei der Beobachtung des Mondrandes erhalten hat, so wird man dadurch, unter Berücksichtigung der bekannten Instrumentalfehler, die scheinbaren Zenithdistanzen des Mondrandes, bei den einzelnen Beobachtungen finden. Es sei nun Z' eine solche scheinbare Zenithdistanz, und die dazu gehörige Refraction sei $= \varrho$, so wird $z' = Z' + \varrho$, wo z' die reducirte, aber noch mit Parallaxe behaftete Zenithdistanz des Mondrandes ist, wobei man zu bemerken hat, dass die Parallaxe in der Ebene wirkt, welche durch das geocentrische Zenith geht; § 9—21, S. 21—36. Nachdem nun z' von dieser Einwirkung befreit worden ist, kann man die wahre Zenithdistanz des Mondrandes ermitteln. Obgleich der Stundenwinkel t des Mondcentrums die gesuchte Grösse ist, so kann man ihn doch immer mit Hülfe einer Ephemeride und der bekannten Sternzeit der Beobachtung vorläufig genähert berechnen, und alsdann das Azimuth des Mondes $= a$ aus der Gleichung $\sin a = \frac{\sin t . \cos \delta}{\sin z}$

sogleich finden, wo δ die Declination zur Zeit der Beobachtung bezeichnet; für z aber kann man ohne merklichen Fehler den Werth $z' + \pi \sin z' \pm r$ setzen, wo π die örtliche Horizontalparallaxe des Mondes zur Zeit der Beobachtung, und r der Halbmesser des Mondes ist; $(+)$ wird bei der Beobachtung des oberen Mondrandes, $(-)$ dagegen bei der des Unterrandes gebraucht. Nun sei endlich φ die geographische, φ' die geocentrische Breite des Beobachtungsorts, ξ die wahre, und ξ' die scheinbare Distanz des beobachteten Mondrandes vom geocentrischen Zenithe, und ferner werde (bei nördlicher Polhöhe) das Azimuth von Süden aus gezählt, so kann man mit hinlänglicher Genauigkeit annehmen, dass:

$$\xi' = z' - (\varphi - \varphi')\cos a,\ \xi = \xi' - p;\ \sin p = \sin \pi \sin \xi';$$
$$r' = \frac{r.\sin(\xi' \pm r)}{\sin(\xi \pm r)} \text{ und } \zeta = \xi \pm r';$$

wo r' der scheinbare Halbmesser des Mondes und ζ die wahre Distanz des Mondcentrums vom geocentrischen Zenithe ist; $(-)$ wird beim Unter-, $(+)$ beim Oberrande gebraucht, so dass man endlich hat:

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(\zeta + \varphi' - \delta) \sin \frac{1}{2}(\zeta - \varphi' + \delta)}{\cos \varphi' \cos \delta}},$$

oder:

$$\cos \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi' + \zeta + \delta) \cos \frac{1}{2}(\varphi' - \zeta + \delta)}{\cos \varphi' \cos \delta}},$$

wo t den gesuchten wahren Stundenwinkel des Mondcentrums bedeutet; alsdann folgt für die aus den Beobachtungen abgeleitete, wahre gerade Aufsteigung des Mondcentrums:

$$AR☾ = \text{Sternzeit der Beobachtung} \pm \frac{t}{15},$$

wo $(+)$ bei den östlichen und $(-)$ bei den westlichen Stundenwinkeln des Mondes zu nehmen ist.

Die fernere Berechnung, um hieraus die Länge des Beob-

achtungsorts zu finden, wird eben so geführt, wie in den früheren Paragraphen § 213—215, S. 676—684 gezeigt wurde.

Die eben auseinandergesetzte Methode kann man mit Vortheil in solchen Gegenden anwenden, deren Breite sehr gering ist; dagegen ist die Methode in hohen Breiten wenig brauchbar.

Unter grossen Breiten nämlich erreicht der Mond häufig entweder gar nicht den ersten Vertical, welches den grössten Vortheil für den Beobachter gewährt, oder wenn er ihn auch erreicht, so geschieht dieses so nahe am Horizonte, dass die Beobachtungen unbrauchbar werden. Bezeichnet man nun durch $\delta\delta$ einen Fehler in der Declination des Mondes, durch δz den Fehler in der gemessenen Zenithdistanz, durch $\delta\varphi$ den Fehler in der angenommenen Polhöhe, und durch δt den ihnen entsprechenden im Stundenwinkel t, so erhält man durch die Differenziation der Gleichung (1) § 6, S. 17, in Bezug auf δ und t folgende Relation:

$$\delta t = \left(\frac{tg\,\varphi}{sin\,t} - \frac{tg\,\delta}{tg\,t}\right).\delta\delta + \frac{\delta\varphi}{tg\,A^\circ\,cos\,\varphi} + \frac{\delta z}{sin\,A^\circ\,cos\,\varphi},$$

wo A° das Azimuth, von der Seite des Meridians an gerechnet, bedeutet, wo der sichtbare Weltpol sich befindet, also bei nördlichen Polhöhen von Norden aus, und wo t, ebenfalls bei nördlicher Polhöhe, von Süden nach Westen gezählt ist.

Hieraus ist es ersichtlich, dass der Fehler im Stundenwinkel mit der Zunahme der Ortsbreite φ, und mit der Annäherung zum Meridiane wächst. Z. B. für $\delta\delta = 10''$, $\varphi = 60^\circ$, und δ zwischen 15° und 30° wird bei Beobachtungen des Mondes im ersten Verticale der Fehler im Stundenwinkel zwischen 17″ und 21″ in Bogen, oder zwischen $1^s,1$ und $1^s,4$ in Zeit betragen können, wodurch die Länge des Orts um 30^s bis 40^s in Zeit zweifelhaft gemacht würde.

218. Man kann die Correction x der angenommenen Länge auf folgende Weise finden. Es sei L die angenommene, $L + x$ die mit den Beobachtungen am besten übereinstimmende östliche

Länge des Beobachtungsorts vom Meridiane der Ephemeride. Aus der nahezu richtigen Länge L und der Sternzeit T der Beobachtung, bestimmt man die entsprechende Sternzeit $T-L$ des Meridians der Ephemeride, verwandelt sie in mittlere Zeit und berechnet damit A und δ, d. h. die dazu gehörige AR und die Declination des Mondes. Wenn α die aus den Beobachtungen abgeleitete AR des Mondes bezeichnet, und A, e, λ, ν, x die oben erwähnten (§ 215, S. 683) Bedeutungen behalten, so ist die gesuchte Correction x der angenommenen Länge

$$x = \frac{A + e - \alpha}{\lambda + \frac{\nu}{15}\left(\frac{tg\,\varphi}{sin\,t} - \frac{tg\,\delta}{tg\,t}\right)}.$$

Aus dieser Gleichung, welche für jede Beobachtung besonders gebildet wird, leitet man den wahrscheinlichsten Werth von x wie gewöhnlich ab. Finden sich correspondirende Meridianbeobachtungen des Mondes und der Vergleichssterne, so können diese zur Ermittelung der wahren Positionen des Mondes und des Sternes benutzt werden.

Sechster Abschnitt.

Von der Reduction der Länge, Breite und des Azimuths eines Orts auf der Erde auf einen andern und von der Bestimmung der Entfernung von Punkten, deren geographische Lage bestimmt ist.

---

219. Die erste sich darauf beziehende Aufgabe besteht in folgendem:

Es seien auf der Oberfläche der Erde zwei Punkte M und M' (Fig. 18, Taf. V) *gegeben, und man kennt die geographische Breite $= B$ des Punktes M, seine kürzeste Entfernung $= r$ von dem anderen Punkte M' und das Azimuth $= T$ des Punktes M' von M aus gezählt; man verlangt nun die geographische Breite B' des Punktes M'; den Unterschied λ der geographischen Längen zwischen den Punkten M und M', sowie das Azimuth $T \pm 180°$ des Punktes M von M' aus gesehen.*

Wir wollen zuerst die Erde als eine Kugel annehmen, deren Halbmesser $= R$ sei, und die Azimuthe, bei nördlicher Polhöhe,

von Süden durch Westen von 0° bis 360° nach derselben Richtung zählen. Wenn nun M' westlich von M liegt und P (Fig. 18) den Pol des Aequators bedeutet, so besteht die Auflösung unserer Aufgabe in der Berechnung des sphärischen Dreiecks PMM', dessen Seiten $MM' = r$, $PM = 90° - B$ und der Winkel $PMM' = 180° - T$ bekannt sind, und in welchem man die Winkel $MPM' = \lambda$, $PM'M = T'$, und die Seite $PM' = 90° - B'$ zu finden hat. In diesem Falle wird die kürzeste Entfernung zwischen den Punkten M und M' durch den Bogen $MM' = r$, des grössten Kreises auf der Erde, der durch M und M' geht, ausgedrückt, und wenn diese Entfernung D lineare Einheiten enthält, so wird der ihr entsprechende Bogen, in Secunden ausgedrückt, durch folgende Formel erhalten:

$$r = \frac{D}{R \sin 1''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wo R den Halbmesser der Erdkugel in derselben linearen Einheit wie D ausgedrückt, bedeutet.

Die Bestimmung der gesuchten Winkel gründet sich auf die Auflösung des sphärischen Dreiecks PMM'; die dazu gewöhnlich gebrauchten Formeln hat Gauss*) so umgestaltet, dass man bequem in den Resultaten dieselbe Genauigkeit erreicht, mit welcher r gegeben ist, ohne mehrziffrige Logarithmen zu Hülfe zu nehmen.

Denken wir uns einen Bogen $M'N$ des grössten Kreises senkrecht zu PM (Fig. 18) und setzen

$$MN = \beta, \quad M'N = w,$$

so ist

$$PN = 90° - B + \beta$$

und wir erhalten die Gleichungen

---

*) Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, von C. F. Gauss, 2. Band der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen, 1844.

$$tg\beta = tg r \cos T,\ tg w = \sin\beta\, tg T \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$
$$tg\lambda = tg w \sec(B-\beta) = \sin\beta\, tg\, T \sec(B-\beta) \quad . \; . \quad (b).$$

Es sei

$$t = 90^\circ - PM'N,$$
$$\tau = T + MM'N - 90^\circ;$$

dann hat man

$$tg t = \sin w . tg(B-\beta) = \sin r . \sin T . tg(B-\beta) . \quad . \; . \quad (c),$$
$$\sin\tau = -\cos(T + MM'N) = -\cos T \cos MM'N$$
$$+ \sin T \sin MM'N,$$
$$\cos MM'N = \cos\beta \sin T; \quad \sin MM'N = \frac{\sin\beta}{\sin r};$$
$$\sin\tau = \sin T \frac{\sin\beta}{\sin r} - \cos T \sin T \cos\beta$$
$$= \sin T \sin\beta \left(\frac{1}{\sin r} - \frac{\cos T}{tg\beta}\right) = \sin T \sin\beta \frac{(1-\cos r)}{\sin r}$$
$$\sin\tau = \sin T \sin\beta\, tg \tfrac{1}{2} r \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d).$$

Man hat noch die Gleichungen

$$tg B' = \cos\lambda . tg(B-\beta),$$
$$\frac{\sin(B-\beta-B')}{\cos(B-\beta)\cos B'} = tg(B-\beta) - tg B' = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda . tg(B-\beta)$$
$$\sin(B-\beta-B') = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\lambda . \sin(B-\beta)\cos B'.$$

Nun ist

$$\cos B' = \frac{\sin w}{\sin\lambda} = \frac{\sin r \sin T}{\sin\lambda};$$

wird also

$$\sigma = B - \beta - B'$$

gesetzt, so kommt

$$\sin\sigma = \sin r \sin T\, tg \tfrac{1}{2}\lambda . \sin(B-\beta),$$
$$\sin\sigma = tg t . tg \tfrac{1}{2}\lambda . \cos(B-\beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$
$$B' = B - \beta - \sigma$$
$$T' = T - t - \tau.$$

B' ist die nördliche geographische Breite, $T' + 180°$ das südwestliche Azimuth im Punkte M'.

Auf diese Weise ist die Aufgabe streng gelöst, und für die Schärfe der Rechnung bleibt Nichts zu wünschen übrig. Selten haben geodätische Messungen eine solche Ausdehnung, dass der Abstand r des ersten vom letzten Punkte 3° übersteigt; meistens sind sie kleiner. Wollte man in diesem Fall die Gleichungen (a), (b), (c), (d) und (e) anwenden, so hätte die Rechnung ein beschwerliches Interpoliren bei der Bestimmung der kleinen Bögen durch die Logarithmen der Tangenten oder Sinus erfordert. Man kann diesen Uebelstand vermeiden, wenn die Tangenten und Sinus in bekannten Reihen durch Bögen ausgedrückt werden, wodurch man, ohne Nachtheil für die Schärfe, die Rechnungen mit Logarithmen der Zahlen führen kann.

Nehmen wir

$$\beta^\circ = r \cos T,\; v = r \sin T,$$
$$t^\circ = v\, tg(B - \beta),\; \lambda^\circ = v \sec(B - \beta)$$

an, so bedeuten β°, t°, λ° die genäherten Werthe von β, t, λ, vorausgesetzt, dass r nicht 3° übersteigt. Schreiben wir

$$\varrho = \sin 1''$$

und entwickeln die Tangenten und Sinus in Reihen, so erhält man aus Gleichung (a) und (b) in Secunden

$$\beta = \beta^\circ(1 + \tfrac{1}{3}\varrho^2 r^2) - \tfrac{1}{3}\varrho^2\beta^3$$
$$\lambda = \beta\, tg\, T \sec(B - \beta)(1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2\beta^2) - \tfrac{1}{3}\varrho^2\lambda^3;$$

$tg\, r$ wird hier als kleine Grösse erster Ordnung betrachtet und die Entwickelung in Reihen bis auf Grössen fünfter Ordnung, ausschliesslich, genau gemacht. In den Gliedern $\varrho^2\beta^2$, $\varrho^2\beta^3$ und $\varrho^2\lambda^3$ kann man β und λ durch β° und λ° ersetzen. Man hat dann

$$\beta = \beta^\circ(1 + \tfrac{1}{3}\varrho^2 rr - \tfrac{1}{3}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ) = \beta^\circ(1 + \tfrac{1}{3}\varrho^2 v^2)$$
$$\lambda = \beta^\circ\left(1 + \varrho^2\frac{vv}{3}\right) tg\, T \sec(B - \beta)(1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ) - \tfrac{1}{3}\varrho^2\lambda^{\circ 3};$$

da $\beta^\circ\, tg\, T = r \cos T . tg\, T = r \sin T = v$ und $v \sec(B - \beta) = \lambda^\circ$

sind, so kommt

$$\lambda = \lambda^\circ\left(1 + \varrho^2\frac{v.v}{3} - \tfrac{1}{6}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ - \tfrac{1}{3}\varrho^2\lambda^\circ\lambda^\circ\right);$$

nun ist:

$$vv - \lambda^\circ\lambda^\circ = vv - \frac{vv}{cos^2(B-\beta)} = -vv\,tg^2(B-\beta) = -t^\circ t^\circ,$$

folglich ist

$$\lambda = \lambda^\circ(1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ - \tfrac{1}{3}\varrho^2.t^\circ.t^\circ) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2).$$

Man findet aus der Gleichuug (c):

$$t = r\,sin\,T\,tg(B-\beta)(1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2.rr) - \tfrac{1}{3}\varrho^2.t^\circ t^\circ,$$

oder

$$t = t^\circ(1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2.rr - \tfrac{1}{3}\varrho^2 t^\circ t^\circ) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3).$$

Die kleinen Bögen τ und σ sind von der zweiten Ordnung; vernachlässigt man die Glieder von der sechsten Ordnung, so kann man $sin\,\tau = \tau.sin\,1'' = \varrho\tau$ und $sin\,\sigma = \varrho\sigma$ annehmen; auch wird es erlaubt sein, in den Gliedern, welche mit ϱ^2 multiplicirt sind, β° statt β und t° statt t zu setzen; es kommt also:

$$\tau = \tfrac{1}{2}\varrho\,r\,sin\,T.\beta(1 + \tfrac{1}{12}\varrho^2.rr)(1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ)$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}\varrho.v.\beta^\circ(1 + \tfrac{1}{3}\varrho^2 vv)(1 + \tfrac{1}{12}\varrho^2 rr)(1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ)$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}\varrho v\beta^\circ(1 + \tfrac{1}{3}\varrho^2 vv + \tfrac{1}{12}\varrho^2 rr - \tfrac{1}{6}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ).$$

Man hat aber

$$\tfrac{1}{3}vv + \tfrac{1}{12}rr - \tfrac{1}{6}\beta^\circ\beta^\circ = \tfrac{4}{12}(r^\circ r^\circ - \beta^\circ\beta^\circ) + \tfrac{1}{12}rr - \tfrac{2}{12}\beta^\circ\beta^\circ$$
$$= \tfrac{5}{12}rr - \tfrac{1}{2}\beta^\circ\beta^\circ;$$

es ist demnach

$$\tau = \tfrac{1}{2}\varrho v\beta^\circ(1 + \tfrac{5}{12}\varrho^2 rr - \tfrac{1}{2}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ) \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4).$$

Endlich erhält man

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\varrho\lambda t(1 + \tfrac{1}{12}\varrho^2\lambda^\circ\lambda^\circ)(1 + \tfrac{1}{3}\varrho^2 t^\circ t^\circ)cos(B-\beta)$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}\varrho\lambda^\circ t^\circ(1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ - \tfrac{1}{3}\varrho^2 t^\circ t^\circ)(1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2 rr - \tfrac{1}{3}\varrho^2 t^\circ t^\circ)$$
$$.(1 + \tfrac{1}{12}\varrho^2\lambda^\circ\lambda^\circ)(1 + \tfrac{1}{3}\varrho^2 t^\circ t^\circ)cos(B-\beta)$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}\lambda^\circ t^\circ cos(B-\beta)\{1 - \tfrac{1}{6}\varrho^2 rr - \tfrac{1}{6}\varrho^2\beta^\circ\beta^\circ$$
$$- \tfrac{1}{3}\varrho^2 t^\circ t^\circ + \tfrac{1}{12}\varrho^2\lambda^\circ\lambda^\circ\}.$$

Wir erhalten dabei

$$t^\circ t^\circ = v^2 . tg^2(B-\beta),\ \lambda^\circ\lambda^\circ = v^2 sec^2(B-\beta)$$
$$= v^2[1+tg^2(B-\beta)],$$
$$\lambda^\circ\lambda^\circ = v^2 + t^\circ t^\circ,\ \beta^\circ\beta^\circ = r^2 - v^2;$$

es ist also:

$$-\frac{rr}{6}-\frac{\beta^\circ\beta^\circ}{6}-\frac{t^\circ t^\circ}{3}+\frac{\lambda^\circ\lambda^\circ}{12} = -\frac{rr}{12}-\frac{\beta^\circ\beta^\circ}{4}-\frac{t^\circ t^\circ}{4};$$
$$\sigma = \tfrac{1}{2}\varrho v t^\circ\left\{1-\varrho^2.\frac{rr}{12}-\varrho^2.\frac{\beta^\circ.\beta^\circ}{4}-\varrho^2.\frac{t^\circ t^\circ}{4}\right\}.$$

Es werden hier die Bögen in Secunden ausgedrückt; β, λ und t bis auf die fünfter, τ und σ bis auf die sechster Ordnung genau, — ausschliesslich. Für den Gebrauch sind noch bequemer und ebenso genau die Ausdrücke der Logarithmen dieser Bögen. Wenn x eine solche kleine Grösse bezeichnet, dass x^2, x^3 .... vernachlässigt werden können, so hat man für die Briggischen oder gewöhnlichen Logarithmen:

$$log(1+x) = 0{,}4342945 . x \ldots;$$

schreiben wir

$$\mu = 0{,}4342945 . \frac{sin^2 1''}{12},$$

so kommt

$$log\,\beta = log\,\beta^\circ + 4\mu rr - 4\mu\beta^\circ\beta^\circ,$$
$$log\,\lambda = log\,\lambda^\circ - 2\mu\beta^\circ\beta^\circ - 4\mu t^\circ t^\circ,$$
$$log\,t = log\,t^\circ - 2\mu rr - 4\mu t^\circ t^\circ,$$
$$log\,\tau = log(\tfrac{1}{2}sin\,1''.v.\beta^\circ) + 5\mu rr - 6\mu\beta^\circ\beta^\circ,$$
$$log\,\sigma = log(\tfrac{1}{2}sin\,1''.v.t^\circ) - \mu rr - 3\mu\beta^\circ\beta^\circ - 3\mu t^\circ t^\circ,$$
$$log(\tfrac{1}{2}sin\,1'') = 4{,}38454487 - 10$$
$$log\,\mu = 7{,}92975280 - 20.$$

Die Logarithmen der genäherten Werthe der gesuchten Grössen werden auf diese Weise durch kleine, leicht zu berechnende Correctionen in Logarithmen der genauen Werthe verwandelt.

Wenn die geographische Breite B' und das Azimuth $T'+180°$ im Punkte, welcher genauer zu bestimmen ist, nahezu bekannt sind, so lassen sich die Unterschiede der Breiten, der Längen und der Azimuthe noch leichter berechnen. Schreiben wir

$$\tfrac{1}{2}(B+B') = B^{(m)};\quad \tfrac{1}{2}(T+T') = A;$$
$$B-B' = b;\qquad T-T' = a;$$

so entstehen die Formeln:

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}r.\sin A &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda\cos B^{(m)} \\ \sin\tfrac{1}{2}r.\cos A &= \cos\tfrac{1}{2}\lambda\sin\tfrac{1}{2}b \\ \cos\tfrac{1}{2}r\sin\tfrac{1}{2}a &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda\sin B^{(m)} \\ \cos\tfrac{1}{2}r\cos\tfrac{1}{2}a &= \cos\tfrac{1}{2}\lambda.\cos\tfrac{1}{2}b, \end{aligned}$$

woraus die Werthe von a, b und λ nach den strengen Formeln:

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}a &= \sin A.tg B^{(m)}.tg\tfrac{1}{2}r \\ \sin\tfrac{1}{2}\lambda &= \frac{\sin A.\sin\tfrac{1}{2}r}{\cos B^{(m)}} \\ \sin\tfrac{1}{2}b &= \frac{\cos A.\sin\tfrac{1}{2}r}{\cos\tfrac{1}{2}\lambda} \end{aligned}$$

bestimmt werden.

Ist aber r kleiner als 3°, so findet man bis auf die fünfte Ordnung genau (ausschliesslich):

$$a^{\circ} = r\sin A\,tg B^{(m)},\quad \lambda^{\circ} = \frac{r\sin A}{\cos B^{(m)}},\quad b^{\circ} = r\cos A,$$

$$\begin{aligned} a &= a^{\circ}\left(1+\varrho^2\cdot\frac{rr}{12}+\varrho^2\cdot\frac{a^{\circ}a^{\circ}}{24}\right) \\ \lambda &= \lambda^{\circ}\left(1-\varrho^2\cdot\frac{rr}{24}-\varrho^2\frac{\lambda^{\circ}\lambda^{\circ}}{24}\right) \\ b &= b^{\circ}\left(1-\varrho^2\frac{rr}{24}+\varrho^2\frac{b^{\circ}b^{\circ}}{24}+3\varrho^2\lambda^{\circ}\lambda^{\circ}\right) \\ &= b^{\circ}(1+\tfrac{1}{24}\varrho^2 a^{\circ}a^{\circ}+\tfrac{1}{12}\varrho^2\lambda^{\circ}\lambda^{\circ}). \end{aligned}$$

Will man die Logarithmen gebrauchen, so ist

$$\log a = \log a^\circ + \mu rr + \tfrac{1}{2}\mu a^\circ a^\circ$$
$$\log \lambda = \log \lambda^\circ + \tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu \lambda^\circ \lambda^\circ$$
$$\log b = \log b^\circ + \tfrac{1}{2}\mu a^\circ a^\circ + \mu \lambda^\circ \lambda^\circ.$$

220. Die Erde hat die Gestalt eines durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entstandenen Ellipsoides. Die geodätischen Vermessungen geben die Lage und die Ausdehnung der kürzesten Linie, welche auf der Erdoberfläche zwei Punkte miteinander verbindet; solche Linien werden auch geodätische Linien genannt. Nur wenn beide Punkte im Meridian oder im Aequator sich befinden, liegt die geodätische Linie in einer Ebene; in allen andern Lagen hat sie eine doppelte Krümmung. Werden die beiden Punkte mit dem Pol des Aequators verbunden, so bildet sich ein Dreieck, dessen Seiten sind: die geodätische Linie und zwei elliptische Bögen, die von dem Pol zu den beiden Punkten gehen; die an den Endpunkten der geodätischen Linie anliegenden Winkel sind das Azimuth an einem Punkte und das Azimuth —180° am anderen Punkte. Die Berechnung der Unterschiede in Breite, in Länge und im Azimuthe aus geodätischen Vermessungen auf der Oberfläche eines Ellipsoids ist eine complicirte Aufgabe, die auf verschiedene Weise gelöst wurde; die Kleinheit der Abplattung der Erde diente zur Vereinfachung der Auflösung. Wir verweisen auf die Schriften von Legendre (Mémoires de l'Institut, 1806), von Oriani (Elementi di Trigometria sferoidica), auf die Geodäsie von Puissant, vorzüglich aber auf die Schriften von Bessel, Hansen und Gauss*). Bessel und Hansen haben die Aufgabe gelöst, die

*) Astronomische Nachrichten, Nr. 86; auch die Abhandlung von Bessel, herausgeben von Engelmann, Bd. III, 1876. Geodätische Untersuchungen von P. A. Hansen, in Abhandl. der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissensch. zu Leipzig, 8. Bd., 1868. Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie von C. F. Gauss, in den Abhandl. der Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Bd. II, 1844 und Bd. III, 1847.

Grösse der Entfernung zwischen zwei Punkten zu bestimmen; ist aber die Entfernung gering, z. B. nicht über 45 geographische Meilen, so sind für die Rechnung besonders bequem die Formeln, welche Gauss abgeleitet hat. Bessel und Gauss haben auch Tafeln gegeben, mit deren Hülfe die Rechnung für das Ellipsoid fast ebenso leicht wird, wie für die Kugel. Wir werden uns begnügen mit der übersichtlichen Auseinandersetzung der Grundlagen der Gauss'schen Theorie und der Mittheilung der Resultate.

Wir nehmen an, dass beide Punkte sich nördlich vom Aequator befinden und bezeichnen das Stück der geodätischen Linie von einem bestimmten Anfangspunkte bis zu einem unbestimmten Punkt durch u, das Azimuth am letzteren Punkte im Sinne wachsender u, von Süden nach Westen und weiter bis 360° gerechnet, durch A, die geographische Länge desselben Punktes, von Osten nach Westen gezählt, durch L, die geographische Breite durch B, die halbe grosse Achse des Ellipsoids durch a und die Excentricität durch e.

Wenn u in $u + \delta u$ übergeht, wo δu einen unendlich kleinen Zuwachs von u bezeichnet, so verändern sich auch B, A und L in $B - \delta B$, $A - \delta A$ und $L + \delta L$, wo δB, δA und δL entsprechende, unendlich kleine Grössen bedeuten. Der Krümmungshalbmesser des Meridians unter der Polhöhe B ist

$$= \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}};$$

der unendlich kleine Bogen des Meridians, enthalten zwischen den Breiten B und $B - \delta B$, ist

$$= -\frac{a(1-e^2)\delta B}{(1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}}$$

und muss dem Bogen $\delta u . \cos A$ gleich sein.

Die verticale Ebene, welche im erwähnten Punkte unter dem rechten Winkel zum Meridian das Ellipsoid schneidet, be-

gegnet der Oberfläche desselben auf einer krummen Linie, deren Krümmungshalbmesser ist:

$$\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}};$$

ein Stück dieser Linie ist $\delta u . \sin A$ und muss

$$= \frac{a \cos B . \delta L}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}$$

sein. Man erhält also folgende Differenzialgleichungen:

$$\delta B = -\delta u . \cos A (1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{a(1-e^2)}$$

$$\delta L = \delta u \frac{\sin A (1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}}{\cos B} \cdot \frac{1}{a}.$$

Die geodätische Linie auf der Oberfläche eines Rotationskörpers hat die Eigenschaft, dass in jedem Punkte derselben der Radius des Parallelkreises, mit $\sin A$ multiplicirt, eine constante Grösse ergiebt; für das Ellipsoid erhalten wir also

$$\frac{a . \cos B}{\sqrt{1-e^2 . \sin^2 B}} \cdot \sin A = \text{Constant.}$$

Differenziirt man den Logarithmus dieser Gleichung, so ist

$$\operatorname{cotg} A . \delta A + \left(\frac{e^2 . \sin B . \cos B}{1-e^2 \sin^2 B} - \operatorname{tg} B\right) \delta B = 0;$$

wird statt δB sein Werth substituirt, so ist

$$\delta A = -\delta u \cdot \frac{\sin A . \operatorname{tg} B . (1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}}{a}.$$

Man erhält auf diese Weise die Differenzialquotienten $\frac{\delta B}{\delta u}$, $\frac{\delta L}{\delta u}$, $\frac{\delta A}{\delta u}$; durch successive Differenziationen derselben lassen sich die weiteren Differenzialquotienten

$$\frac{\delta^2 B}{\delta u^2}, \frac{\delta^2 L}{\delta u^2}, \frac{\delta^2 A}{\delta u^2}, \frac{\delta^3 B}{\delta u^3}, \frac{\delta^3 L}{\delta u^3}, \frac{\delta^3 A}{\delta u^3}$$

finden.

Es seien nun die bestimmten Werthe, welche u, A, B und L im Anfangspunkte und im Endpunkte der gegebenen geodätischen Linie annehmen, der Reihe nach

für den Anfangspunkt $R-\frac{1}{2}r$, $T+\frac{1}{2}t$, $B+\frac{1}{2}b$, $L-\frac{1}{2}l$,
für den Endpunkt . . $R+\frac{1}{2}r$, $T-\frac{1}{2}t$, $B-\frac{1}{2}b$, $L+\frac{1}{2}l$,

und mögen T°, B°, L° die Werthe von A, B und L bezeichnen für die Mitte der gegebenen geodätischen Linie; wenn r klein im Vergleich zu a ist, so lassen sich b, l und t, sowie B°, L° und T° vermittelst des Taylorschen Lehrsatzes berechnen. Die Werthe von B für $u = R-\frac{1}{2}r$ und für $u = R+\frac{1}{2}r$ können durch folgende Reihen dargestellt werden:

$$B^\circ-\tfrac{1}{2}r.\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)+\tfrac{1}{8}r^2\left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\right)-\tfrac{1}{48}r^3\left(\frac{\partial^3 B}{\partial u^3}\right)\ldots = B+\tfrac{1}{2}b$$
$$B^\circ+\tfrac{1}{2}r.\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)+\tfrac{1}{8}r^2.\left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\right)+\tfrac{1}{48}r^3.\left(\frac{\partial^3 B}{\partial u^3}\right)\ldots = B-\tfrac{1}{2}b,$$

wo $\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^3 B}{\partial u^3}\right)$ die Werthe der Differenzialquotienten ausdrücken, die dem Werthe $u = R$ oder B° entsprechen. Die Summe und die Differenz beider Gleichungen geben:

$$B = B^\circ+\tfrac{1}{8}r^2\left(\frac{\partial^2 B}{\partial u^2}\right)$$
$$b = -\left\{r\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)+\tfrac{1}{24}.r^3.\left(\frac{\partial^3 B}{\partial u^3}\right)\right\}.$$

Man findet auf ähnliche Weise:

$$L = L^\circ+\tfrac{1}{8}r^2.\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}\right)$$
$$l = r.\left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)+\tfrac{1}{24}r^3.\left(\frac{\partial^3 L}{\partial u^3}\right)$$
$$T = T^\circ+\tfrac{1}{8}r^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial u^2}\right)$$
$$t = -\left\{r.\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)+\tfrac{1}{24}.r^3.\left(\frac{\partial^3 L}{\partial u^3}\right)\right\}.$$

Wird $\frac{r}{a}$ als kleine Grösse erster Ordnung angesehen, so sind B°, L°, T° bis auf die vierte und b, l, t bis auf die fünfte Ordnung genau gegeben (ausschliesslich), da die Coefficienten von $r, r^2, r^3, \ldots$ die Divisoren $a, a^2, a^3, \ldots$ impliciren.

Es bleibt noch übrig, die Differenzialquotienten verschiedener Ordnungen gehörig zu entwickeln und für die Rechnung bequem auszudrücken; Gauss gelangte hierbei zu folgenden Resultaten.

Es sei

$$k = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}; \quad \varrho = \sin 1'';$$

wenn b, l, t in Bogensecunden ausgedrückt werden sollen, so berechnet man zuerst:

$$b^\circ = \frac{k^3 . r . \cos T}{a(1-e^2) \sin 1''}, \quad l^\circ = \frac{k . r . \sin T}{a \sin 1'' \cos B},$$

$$t^\circ = \frac{k . r . \sin T . tg\, B}{a \sin 1''};$$

man erhält dann:

$$b = b^\circ \left\{ 1 + \frac{k^4 . rr}{12 a^2 (1-e^2)} + \tfrac{1}{8} \varrho^2 t^\circ t^\circ \right.$$
$$\left. - (2 + e^2 - (8e^2 - 14e^4) \sin^2 B - 9e^4 \sin^4 B) \frac{\varrho^2 . b^\circ b^\circ}{24 k^4} \right\}$$

$$l = l^\circ \left\{ 1 + \tfrac{1}{24} \varrho^2 t^\circ t^\circ + (1-e^2)(1 - 10 e^2 \sin^2 B) \frac{\varrho^2 . b^\circ b^\circ}{24 k^4} \right\}$$

$$t = t^\circ \left\{ 1 + \frac{k^4 rr}{12 a^2 (1-e^2)} + \tfrac{1}{24} \varrho^2 . t^\circ t^\circ \right.$$
$$\left. + [5e^2 + (4e^2 - 14e^4) \sin^2 B + 5 e^4 \sin^4 B] \frac{\varrho^2 b^\circ b^\circ}{24 k^4} \right\}.$$

Zur numerischen Berechnung wird es vortheilhafter sein, diese Ausdrücke in logarithmische Form zu bringen; bezeichnen wir durch M den Modulus der Brigg'schen Logarithmen ($M = 0{,}4342945$) und schreiben zur Abkürzung:

$$\varrho = \sin 1'', \quad \mu = \frac{M\varrho^2}{12}, \quad \log \mu = 7{,}92975 - 20,$$

$$(1) = \frac{k}{a\varrho},\quad (2) = \frac{k^8}{a(1-e^2)\varrho},\quad (3) = \frac{Mk^4}{12aa(1-e^2)}$$

$$(4) = \frac{\mu}{2k^4}\{5e^2 + (4e^2 - 14e^4)\sin^2 B + 5e^4 \sin^4 B\}$$

$$(5) = \frac{\mu}{2k^4}\{2 + e^2 - (8e^2 - 14e^4)\sin^2 B - 9e^4 \sin^4 B\}$$

$$(6) = \frac{\mu(1-e^2)}{2k^4}(1 - 10.e^2 \sin^2 B),$$

so ist die Auflösung in sechs Formeln enthalten:

$$t^\circ = (1) r.\sin T.tg B,$$
$$b^\circ = (2).r.\cos T,\quad l^\circ = (1).r \sin T.\sec B,$$
$$\log t = \log t^\circ + (3) rr + (4) b^\circ b^\circ + \tfrac{1}{2}\mu t^\circ t^\circ$$
$$\log b = \log b^\circ + (3) rr - (5) b^\circ b^\circ + \tfrac{3}{2}\mu t^\circ.t^\circ$$
$$\log l = \log l^\circ - (6) b^\circ b^\circ + \tfrac{1}{2}\mu t^\circ t^\circ.$$

Die Coefficienten (1), (2), (3), (4), (5), (6) hängen von den numerischen Werthen von a und e, sowie von der Breite B ab. Gauss hat die Bessel'sche Bestimmung von a und e angenommen und Tafeln der Logarithmen von (1), (2) u. s. w. construirt, von $B = 51°$ bis 54° für jede Minute der Breite. H. Tillo hat diese Tafel erweitert von 34° bis 70° der Breite von 10 zu 10 Minuten. Stehen solche Tafeln zu Gebote, so ist die Rechnung für das Ellipsoid ebenso bequem, wie die Rechnung für die Kugel.

Die Glieder, welche die Factoren (3), (4) u. s. w. enthalten, sind sehr kleine Decimalbrüche; es ist bequem, sie sofort in Einheiten der siebenten Decimale auszudrücken, dazu ihre Logarithmen um sieben Einheiten zu vergrössern und

$$\log \mu = 4{,}92975 - 10$$

anzunehmen.

Wenn man die Gauss'sche Tafel nicht bei der Hand hat, so ist es etwas beschwerlich, die Coefficienten (4), (5) und (6) zu berechnen; werden aber unbedeutend kleine Glieder, welche e^4 enthalten, vernachlässigt, so kann man (4), (5) und (6) bequem

ausdrücken, ohne einen Fehler von 0″,001 zu befürchten; es ist sehr nahezu

$$(4) = \frac{\mu . e^2}{2k^4}(5 + 4 sin^2 B),$$

$$(5) = \frac{\mu . k^4}{\sqrt{1-e^2}}; \quad (6) = \frac{\mu(1-e^2).k^{16}}{2}.$$

Es sei:

$$e sin P = sin \Theta; \quad e = sin \psi;$$

man hat dann:

$$k = cos \Theta; \quad \sqrt{1-e^2} = cos \psi.$$

Wenn die geographische Breite $B_{,}$ und das Azimuth $T_{,}$ nur für den Anfangspunkt der geodätischen Linie gegeben sind, so wird man zuerst von den genäherten Werthen von B und T ausgehen, wofür man in der Ermangelung aller andern Kenntniss $B_{,}$ und $T_{,}$ annehmen mag; folgende vier Formeln sind dann zu berechnen:

$$b^\circ_{,} = \frac{k^3 . r . cos\, T}{a(1-e^2)\, sin\, 1''}, \quad B = B_{,} - \tfrac{1}{2} b^\circ_{,},$$

$$t^\circ_{,} = \frac{k . r . sin\, T . tg\, B}{a\, sin\, 1''}, \quad T = T_{,} - \tfrac{1}{2} t^\circ_{,}.$$

Mit den gefundenen Werthen von B und T wird k genauer erhalten und b°, B, t° und T werden von neuem berechnet; nöthigenfalls wiederholt man nochmals die Rechnungen, bis das Resultat zu stehen kommt, d. h. bis man denselben Werth von T wiedererhält, von dem man zuletzt ausgegangen war. Zu allen diesen Rechnungen sind fünfzifferige Logarithmen genügend.

Bei den weiteren Wiederholungen muss die Rechnung mit siebenzifferigen Logarithmen ausgeführt werden; dabei wird man auf die Correctionen von $log\, b^\circ$ und $log\, t^\circ$ Rücksicht nehmen und

$$B = B_{,} - \tfrac{1}{2} b, \quad T = T_{,} - \tfrac{1}{2} t$$

setzen. Die Rechnungen werden so lange wiederholt, bis man zu stehenden Resultaten kommt; dann werden endlich l° und l bestimmt.

221. Vermittelst der erwähnten Gleichungen lässt sich auch die umgekehrte Aufgabe lösen: „Gegeben sind die geographischen Breiten B' und B'' zweier nicht zu weit von einander entfernten Punkte auf der Erde, so wie der Längenunterschied l; es wird verlangt, die gegenseitige Entfernung r beider Punkte und die Azimuthe $T + \frac{1}{2}t$ und $T - \frac{1}{2}t + 180^\circ$ an dem ersten und zweiten Punkte zu bestimmen."

Es sei wieder

$$B = \tfrac{1}{2}(B' + B''); \quad b = B' - B'';$$

behalten wir die oben gebrauchten Bezeichnungen, so kommt:

$$r.\sin T = l^\circ \cos B \cdot \frac{a \sin 1''}{k},$$

$$r.\cos T = b^\circ (1 - e^2) \frac{a \sin 1''}{k^3},$$

$$tg\, T = \frac{k^2}{1 - e^2} \cdot \frac{l^\circ \cos B}{b^\circ}, \quad t^\circ = l^\circ \sin B;$$

$$r = \frac{a \sin 1''}{k} \left(\frac{b^\circ (1 - e^2)}{k^2} \cos T + l^\circ \cos B \sin T \right),$$

$$l^\circ = l \left\{ 1 - \varrho^2 \frac{t^\circ t^\circ}{24} + (1 - e^2)(1 - 10 e^2 \sin^2 B) \frac{\varrho^2 b b}{24 k^4} \right\},$$

$$b^\circ = b \left\{ 1 - \tfrac{3}{24} \varrho^2 t^\circ t^\circ + (2 + e^2 - 8 e^2 \sin^2 B) - \frac{k^4 r.r}{12 a^2 (1 - e^2)} \right\}$$

$$tg\, T = \frac{k^2}{(1 - e^2)} \cdot \frac{l \cos B}{b} \left\{ 1 + \frac{\varrho^2 t^\circ t^\circ}{12} \right.$$
$$\left. - (1 + 2 e^2 + 2 c^2 \sin^2 B) \frac{\varrho^2 b b}{24 k^4} + \frac{k^4 .r.r}{12 a^2 (1 - e^2)} \right\},$$

oder sehr nahezu:

$$tg\, T = \frac{k^2}{(1 - e^2)} \cdot \frac{l . \cos B}{b} \left\{ 1 + \frac{\varrho^2 . t^\circ t^\circ}{12} - \frac{\varrho^2 . b . b}{24 (1 - e^2)^2 . k^8} \right.$$
$$\left. + \frac{k^4\ r r}{12 a^2 (1 - e^2)} \right\},$$

$$t = t^\circ \left\{ 1 + \frac{\varrho^2 . t^\circ t^\circ}{24} - e^2 (5 + 4 \sin^2 B) \frac{\varrho^2 b b}{24 k^4} + \frac{k^4 r r}{12 a^2 (1 - e^2)} \right\}.$$

Es werden zuerst T, r und t° annähernd berechnet, indem man l und b statt l° und b° annimmt; später lassen sich l°, b°, T, r und t hinlänglich genau bestimmen.

Ist die Entfernung r bedeutend grösser als 3° in Bogen (oder grösser als 45 geographische Meilen), so muss die Aufgabe anders gelöst werden; die strenge und bequemste Auflösung hat Bessel gegeben (Astronomische Nachrichten, Nr. 86), welche auch von dem Generallieutenant v. J. J. Baeyer in seiner Schrift: „Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche" (Berlin 1862) mitgetheilt ist, wo für die Erleichterung der Berechnung sich Hülfstafeln vorfinden.

222. Es wird häufig vorkommen, dass der Beobachter das Azimuth irgend eines Gegenstandes von einem gegebenen Punkte der Erde aus nicht bestimmen kann; in solchem Falle misst man das Azimuth dieses Gegenstandes von einem andern Punkte aus, welcher nahe an dem gegebenen liegt. Es sei O (Fig. 19) der Ort des Beobachters, S das Centrum des Signals, von welchem aus das Azimuth des entfernten Gegenstands B beobachtet wurde; P der Pol des Aequators, und M und m die Südpunkte auf den Meridianen PO und PS; wir wollen dabei annehmen, dass S und B westlich von O abliegen, und ferner wie früher die Azimuthe von Süden nach Westen von 0° bis 360° zählen. Wenn nun die Entfernung $SO = d$ sehr klein ist, z. B. nicht grösser als 70 Fuss, so kann man annehmen, dass die Theile der Meridiane PO und PS, welche unmittelbar bei den Punkten O und S liegen, sehr nahe unter einander parallel sind, und folglich, dass der Unterschied der Azimuthe $BOM = w$ und $BSm = \xi$ sehr nahe gleich dem Winkel $SBO = x$ sein wird, welcher bekanntlich gleich der Reduction der Beobachtung in O auf das Centrum des Signals sein wird; nach § 77, S. 189 wissen wir, dass $x = \frac{d.\sin w}{D \sin 1''}$ ist; wo $d = SO$, $D = BO$ oder $= BS$, und w der horizontale Winkel ist, welcher von O aus zwischen dem Centrum des Signals S und B gemessen wurde.

Wenn die Gradtheilung auf dem Horizontalkreise des Instruments von links nach rechts, auf der von dem Beobachter entfernteren Seite des Kreises zunimmt, und der Winkel w von S bis B fortwährend bis 360° nach der Richtung von links nach rechts gezählt wird, wobei die Zählung in S anfängt, so muss der Winkel x zu der Ablesung am Horizontalkreise zugelegt werden. Wenn aber die Entfernung $SO = d$ nicht sehr klein ist, so ist es nothwendig, ausserdem auf den Nicht-Parallelismus der Meridiane PO und PS Rücksicht zu nehmen; bezeichnet man daher die Breite des Beobachtungsorts durch φ und den Halbmesser der Erdkugel durch R, so wird das gesuchte Azimuth $BSm = \xi$, auf das Centrum des Signals reducirt, durch folgende Formel gefunden:

$$\xi = w + \frac{d \sin w}{D \sin 1''} - \frac{d . \sin \xi . tg \varphi}{R . \sin 1''}.$$

Erster Anhang.

ɜhreibung und Gebrauch der Reflexions-Instrumente.

Die von uns früher beschriebenen Instrumente erfordern ich eine feste Aufstellung, und können daher auf dem ...... nicht gebraucht werden; ebenso wenig aber sind sie auch für solche Reisende zweckdienlich, die keine sicheren Stative zu ihrer Verfügung haben. Daher bedient man sich in solchen Fällen bei Winkelmessungen der Reflexionsinstrumente; worunter als die vorzüglichsten die Spiegelsextanten von Troughton, der Spiegelkreis von Ertel, der Repetitionskreis von Borda, der Steinheil'sche Prismenkreis und der Reflexionskreis von Pistor und Martins zu erwähnen sind.

Die Reflexionsinstrumente beruhen auf der Eigenschaft der Planspiegel und auf folgender Art der Benutzung derselben. Zwei gläserne Planspiegel *m* und *M* (Taf. VI, Fig. 20 und Taf. V, Fig. 21) werden senkrecht zur Ebene des Gradbogens gestellt. Der kleinere von ihnen *m*, dessen untere Hälfte belegt ist, der an dem oberen Theile aber aus durchsichtigem Planglase besteht, ist fest mit dem Körper des Instruments verbunden; der andere, grössere

Spiegel M sitzt auf einer Alhidade CA (Fig. 21) und kann, wenn das Ende A der Alhidade längs des Gradbogens bewegt wird, sich um die Achse drehen, welche durch den Mittelpunkt C des Gradbogens geht und zur Ebene des Gradbogens senkrecht ist. Denken wir die Spiegel in solche Lage gebracht, dass aus einem Punkte E der Lichtstrahl EM auf den Spiegel M fällt und, von diesem Spiegel reflectirt, die Richtung Mm annimmt, in welcher er den Spiegel m trifft und nochmals reflectirt, längs der Geraden mF in das Fernrohr geht und zum Auge O des Beobachters gelangt. Wenn in der Verlängerung der Linie Fm ein sichtbarer Punkt D sich befindet, so wird sowohl dieser Punkt D, als auch der Punkt E gesehen und zwar so, dass die Bilder der Objecte D und E zusammenfallend, dem Beobachter in Coincidenz erscheinen werden. — Es sei F (Taf. VI, Fig. 20) der Punkt, wo die Grade DF von der Verlängerung der Geraden EM geschnitten wird, und V der Punkt, wo die verlängerte Ebene der beiden Spiegel sich auf der Ebene des Gradbogens gegenseitig schneiden. Dann ist MVm der Winkel zwischen den Ebenen der beiden Spiegel, und wenn die Objecte E und D sehr weit entfernt sind, so ist EFD der zu bestimmende Winkel zwischen den Gesichtslinien, die von E und D zum Beobachter gehen.

Um EFD durch MVm auszudrücken, bezeichnen wir den Winkel EMQ (Fig. 20) mit γ und den Winkel Mmq mit δ; wegen der Gleichheit der Ein- und Ausfallswinkel hat man die Winkel

$$\gamma = VMm = VMF; \quad \delta = FmV = Dmq;$$
$$DmM = FMm + MFm; \quad Mmq = VMm + mVM,$$

oder

$$2\delta = 2\gamma + EFD, \quad \delta = \gamma + MVm,$$
$$EFD = 2\delta - 2\gamma, \quad MVm = \delta - \gamma,$$

d. h. der Winkel zwischen den Beobachtungsobjecten ist dem doppelten Winkel zwischen den Ebenen der beiden Spiegel gleich;

der letzte Winkel wird von der constanten Richtung des Durchschnitts der Ebene des unbeweglichen Spiegels auf der Ebene des Gradbogens abgezählt. Diese Richtung, wie auch die Lage der Geraden DF und Mm müssen auf dem Instrument unveränderlich bleiben und haben für die Sicherheit der Winkelmessung dieselbe Bedeutung wie das Niveau bei andern Instrumenten.

Wir wollen zuerst annehmen, dass man einen Winkel zwischen zwei Sternen D und E (Taf. V, Fig. 21) zu messen habe; richtet man dann das Fernrohr O auf den Stern D, welcher links von der Sectorebene PCA abliegt, so wird irgend ein Lichtstrahl dieses Sterns durch den unbelegten durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels in das Fernrohr O gelangen, ein anderer wird ebenso auf die Ebene des grossen Spiegels fallen und, wegen der grossen Entfernung der Fixsterne, dem durch den kleinen Spiegel gegangenen Strahl parallel sein. Stellt man nun den grossen Spiegel dem kleinen parallel, so wird dieser Lichtstrahl zuerst vom grossen und darauf vom kleinen Spiegel reflectirt, dann aber mit der Linie mO zusammenfallen, so dass er endlich ebenfalls ins Fernrohr tritt; denn nach dem Gesetze der Reflexion wird der Winkel $D'CK = mCN$ und $rmC = Oms$; aber wegen des Parallelismus der Spiegel KCN und rms wird $rmC = mCN$, und wegen des Parallelismus der einfallenden Strahlen Dm und $D'C$ erhält man: $Dmr = D'CK$; mithin $Oms = Dmr$; d. h. mit anderen Worten Om liegt in der Verlängerung der Linie Dm. Auf diese Weise sieht also der Beobachter zwei aufeinanderfallende Bilder des Sterns D, von welchen das eine von den Lichtstrahlen herrührt, die vom Stern aus durch den unbelegten Theil des kleinen Spiegels direct ins Fernrohr gelangen, das andere aber durch doppelte Reflexion entstanden ist. Bemerkt man sich darauf, durch Ablesung des Nonius, den Ort der Alhidade AC auf dem Kreisbogen bei der parallelen Lage beider Spiegel, und bewegt nun die Alhidade von A nach P, so wird dadurch der grosse Spiegel nach und nach auf andere Gegenstände, die rechts vom Sterne abstehen, ge-

richtet werden. Hält man das Instrument so, dass die beiden zu beobachtenden Gegenstände D und E mit seiner Ebene zusammenfallen, richtet nun das Fernrohr O auf den Stern D, und bewegt die Albidade bis zu dem Punkte B auf dem Kreisbogen AP, so dass die Lichtstrahlen des Sterns E, welche zuerst auf den grossen, nachher aber auf den kleinen Spiegel und dann ins Fernrohr fallen, dieselbe Richtung wie die direct vom Stern D ins Fernrohr einfallenden Lichtstrahlen annehmen, so wird man nothwendigerweise die Bilder der beiden Sterne in Coincidenz sehen; ausserdem aber wird der doppelte Bogen AB, welcher den Unterschied der beiden Noniusablesungen in A und B bildet, den gesuchten Winkel DCE ausdrücken. Ganz ebenso misst man auch den Winkel zwischen zwei gegebenen Gegenständen D und E, die sich nicht in unendlicher Entfernung vom Beobachter befinden; man richtet nämlich das Fernrohr zuerst auf den links liegenden Gegenstand und bewegt die Alhidade so, dass die directe Erscheinung dieses Gegenstands D mit dem von beiden Spiegeln reflectirten Bilde zusammenfällt; man liest nun die Noniusangabe ab, und bewegt darauf die Alhidade so weit, dass das directe Bild des Gegenstands D mit dem zweimal reflectirten Bilde des Gegenstands E zusammenfällt; alsdann wird der doppelte Bogen, welchen die Alhidade beschrieben hat, den gesuchten Winkel zwischen beiden Gegenständen und dem Auge des Beobachters ausdrücken; denn obgleich nun der grosse Spiegel dem kleinen bei dem Zusammenfallen beider Bilder des Gegenstands D, des directen sowohl als gespiegelten, nicht mehr parallel sein wird, so wird man dennoch in diesem Falle den Winkel DCE ebenso wie früher messen können; nur muss man diesen Winkel von derjenigen Lage der Alhidade abzählen, bei welcher das directe und gespiegelte Bild des Gegenstands D, der direct bei der Messung beobachtet wurde, zusammenfällt. Damit man nun nicht jedes Mal den gemessenen Winkel zu verdoppeln braucht, so sind die Reflexionsinstrumente gewöhnlich so eingerichtet, dass ein Bogen von 60° bei ihnen in 120 Theile ein-

getheilt ist, und daher bei diesen die halben Grade als ganze gezählt werden.

2. In Fig. 22 (Taf. V) ist ein Sextant in ¹/₃ oder ¹/₄ seiner natürlichen Grösse abgebildet; seine einzelnen verschiedenen Theile werden meistens aus Messing ausgeführt; *AP* ist ein Kreisbogen, in welchen ein feiner silberner Streifen eingelassen ist, auf dem sich die Gradtheilung befindet. Dieser Kreisbogen *AP* enthält etwas mehr als den sechsten Theil der ganzen Kreisperipherie und ist mit dem Centrum des Sectors durch Stäbe oder Platten fest verbunden; damit die Durchbiegung möglichst beseitigt wird, macht man die Stäbe wenigstens 4 Linien hoch und ebenso dick. Bei den englischen Sextanten von Troughton sind alle Stäbe, sowie auch der Limbus doppelt angebracht und durch Querleisten miteinander verbunden, damit das Instrument noch fester wird. Im Centrum ist eine Röhre aus Glockenmetall senkrecht in die Ebene des Sextanten eingelassen, welche oben und unten inwendig etwas konisch zuläuft; in diesem Rohre befindet sich die stählerne Umdrehungsachse der Alhidade. Die Achse ist mit einer dicken kreisförmigen Platte verbunden, welche auf der Ebene des Sextanten aufliegt; diese ist ferner in die Alhidade eingelassen und durch drei Schrauben daran befestigt. Auf der Mittelpunktsplatte ist nun der Rahmen des grossen Spiegels *LG* durch die drei Schrauben *a*, *a* und *a* befestigt, so dass sich also der grosse Spiegel mit der Alhidade zusammen, um die Umdrehungsachse herum bewegen lässt. Der Spiegel selbst aber berührt seine Einfassung nur an drei Punkten, damit keine Durchbiegung stattfinden kann, welche sonst die ganze Gestalt des Spiegels ändern könnte. Manche Sextanten von Troughton haben bis zu 10 englische Zoll im Halbmesser; die meisten Sextanten sind aber kleiner.

Auf dem Ende der Alhidade *CD*, welches dem Bogen *AP* zunächst liegt, befindet sich ein Nonius *D*, welcher der Bewegung einer feinen Mikrometerschraube *F* folgt; unter diesem Ende der Alhidade ist eine Druckschraube angebracht, und wenn

man diese Schraube löst, so kann die Alhidade CD leicht mit der Hand bewegt werden; zieht man sie aber fest an, so kann man sie nur mittelst der Mikrometerschraube F bewegen. An der Alhidade CD befindet sich eine Lupe M, welche zur genauen Ablesung des Nonius D und des Bogens AP dient, und welche man mittelst des Stiels HM frei um den Stift H bewegen kann, der auf der Alhidade CD befestigt ist.

Nicht weit vom grossen Spiegel LG ab ist der unbewegliche kleine Spiegel N befestigt, seine untere Hälfte ist mit Quecksilber belegt und bildet daher einen wirklichen Spiegel, seine obere Hälfte aber ist von durchsichtigem Glase. Hinter diesem Spiegel befindet sich an den meisten Sextanten eine Schraube, um den kleinen Spiegel parallel dem grossen Spiegel stellen zu können. Gegen die Richtung dieses kleinen Spiegels, schief aufgestellt, befindet sich nun ein Fernrohr O, welches sich parallel der Ebene des Sextanten in den Ring KK einschrauben lässt und mit einer Schraubenvorrichtung versehen ist, um die Absehenslinie des Fernrohrs mit der Ebene des Sextanten parallel stellen zu können; der Ring selbst hat nun einen Griff, welcher aus einem ziemlich langen Parallelepipedon besteht. Dieses Parallelepipedon lässt sich ganz frei in einer dazu passenden Fassung, welche unwandelbar an dem Sextanten angebracht ist, mittelst einer unter dieser Fassung befindlichen Schraube, zusammen mit dem Fernrohre O so auf- und niederbewegen, dass dadurch das Fernrohr seinen Parallellismus mit der Sextantenebene nicht ändert. Wenn die beobachteten Gegenstände an Helligkeit gleich sind, so muss man das Fernrohr so stellen, dass die Linie, welche den belegten Theil des kleinen Spiegels von dem durchsichtigen trennt, der Linie correspondirt, welche das Objectiv des Fernrohrs in zwei gleiche Hälften theilt. Wenn dagegen die zu beobachtenden Gegenstände verschiedene Helligkeit haben, so stellt man den grössten Theil des Objectivs demjenigen Theile des kleinen Spiegels gegenüber, durch welchen direct, oder von welchem reflectirt die Lichtstrahlen des schwach

erleuchteten Gegenstandes ins Fernrohr gelangen. Zwischen dem grossen und dem kleinen Spiegel befinden sich die drei gefärbten Blendgläser Q, welche verschiedene Dunkelheit haben und auf Charnieren angebracht sind, so dass man sie entweder beliebig zurückschlagen, oder zwischen beiden Spiegeln aufstellen kann, wie es bei Sonnenbeobachtungen nöthig ist, um die übermässige Lichtstärke der vom grossen Spiegel reflectirten Sonnenstrahlen zu mildern.

Zu demselben Zwecke befinden sich gleich hinter dem kleinen Spiegel drei andere farbige Blendgläser P so angebracht, dass, wenn man sie hinter den kleinen Spiegel stellt, das Sonnenlicht, welches durch den durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels direct hindurchgeht, dem Auge des Beobachters nicht beschwerlich fällt. Ausserdem ist aber noch beim Oculare ein besonderes kleines Blendglas, welches nur bei der Messung von Sonnenhöhen gebraucht wird; in diesem Falle müssen die oben erwähnten Farbengläser weg, oder seitwärts vom Spiegel geschoben werden. Der hölzerne Griff E dient dazu, den Sextanten bequem in der Hand halten zu können; übrigens hat man auch besondere Stative, auf welche man den Sextanten mittelst einer Schraubenmutter, die sich bei der Mitte des Handgriffes E befindet, aufschrauben kann; alsdann kann man mit Hülfe einer passenden Vorrichtung am Stative, die Ebene des Sextanten in jede beliebige Lage einstellen und bequem nach allen Seiten drehen.

Das Fernrohr bei den grösseren Troughton'schen Sextanten hat ungefähr $^3/_4$ Zoll Objectivöffnung, $6\frac{1}{2}$ Zoll Brennweite und vergrössert nahezu 15 Mal; in seiner Ocularröhre sind vier Drähte oder Fäden in einem besonderen Diaphragma aufgespannt, welches in einer auf der Achse des Fernrohrs senkrecht stehenden Ebene liegt und durch den gemeinschaftlichen Brennpunkt der Objectiv- und Ocularlinse geht. Zwei von diesen Drähten müssen mit der Ebene des Sextanten parallel gestellt werden, und zwei stehen auf der Richtung dieser Ebene senkrecht. Dadurch wird im Fernrohre ein Rechteck gebildet, in dessen Mitte man stets

die Coincidenz oder auch den Contact der Bilder der zu messenden Gegenstände beobachten muss. Früher wurden die englischen Sextanten, besonders die Troughton'schen, am meisten geschätzt; aber gegenwärtig werden auch in Deutschland vorzügliche Sextanten, so wie auch andere ganz ausgezeichnete Reflexions-Messapparate angefertigt.

3. Zur genauen Winkelmessung ist es nöthig, dass

1) beide Spiegel vollkommen senkrecht auf der Ebene des Sextanten stehen;

2) die Absehenslinie des Fernrohrs mit dieser Ebene parallel ist;

3) das Centrum der Umdrehungsachse des grossen Spiegels mit dem Centrum des in Graden eingetheilten Bogens zusammenfällt;

4) die Theilungen auf diesen Gradbogen und dem Nonius richtig sind;

5) die den Spiegel begrenzenden Flächen genaue Ebenen, und diese Ebenen selbst untereinander parallel sind, und

6) endlich die Blendgläser, welche man gebraucht, wenn der Winkel zwischen der Sonne und irgend einem anderen Objecte gemessen werden soll, nicht prismatisch sind.

Correction des grossen Spiegels.

4. Um sich zu überzeugen, ob der grosse Spiegel ganz ebene Flächen hat, wendet man ihn gegen irgend einen gut sichtbaren und recht scharf begrenzten irdischen Gegenstand, und richtet ein anderes, nicht zum Sextanten gehöriges, aber kräftiges Fernrohr auf das Bild des Gegenstands im Spiegel;

zeigt sich dieses alsdann ganz fehlerfrei, d. h. so, wie es erscheinen würde, wenn man das Fernrohr direct auf den Gegenstand richtete, so dass alle geraden und krummen Linien, aus welchen der Gegenstand besteht, in beiden Fällen ohne Verzerrung, ganz in der nämlichen Gestalt sich zeigen, so ist der Spiegel eben. Ebenso kann man auch den kleinen Spiegel untersuchen; jedoch giebt es noch ein anderes Mittel, beide Spiegel auf einmal in dieser Beziehung zu prüfen; man stellt nämlich das Sextantenfernrohr ganz genau auf den Focus, und schraubt ein Brennglas vor das Ocular; beobachtet man darauf das von beiden Spiegeln reflectirte Bild der Sonne und findet, dass das Sonnenbild ganz vollkommen scharf begrenzt und regelmässig rund ist, so kann man annehmen, dass alle begrenzenden Oberflächen der Spiegel eben sind.

Ob der grosse Spiegel auf der Ebene des Sextanten auch wirklich senkrecht steht, kann man auf verschiedene Weisen untersuchen; die einfachste Methode ist die folgende. Man stellt die Alhidade *CD* (Fig. 22) beinahe auf die Mitte des Sextantenlimbus; der Beobachter hält darauf sein Auge etwas schief so an den Rand des grossen Spiegels, dass er einen Theil des Limbusbogens zugleich mit dem im Spiegel reflectirten Bilde desselben sehen kann; zeigt es sich alsdann, dass der unmittelbar gesehene Theil des Bogens mit seinem gespiegelten Theile ohne die geringste Abweichung eine einzige Ebene bildet, oder beide wie gegenseitige Verlängerungen erscheinen, so ist dies ein Zeichen, dass der grosse Spiegel auf der Sextantenebene senkrecht steht; bilden dagegen der reflectirte Bogen und der direct gesehene einen Winkel unter einander, so dass z. B. der reflectirte Bogen höher als der wirkliche erscheint, so bildet in diesem Falle die vordere Spiegelfläche mit der Sextantenebene nach vorne einen spitzen Winkel, d. h. sie ist weniger als 90° gegen die Sextantenebene nach vorne geneigt; wenn aber im entgegengesetzten Falle der reflectirte Bogen niedriger als der wirkliche erscheint, so ist der Spiegel, vom Auge des Beobachters ab ge-

rechnet, nach hinten gegen die Ebene des Instruments geneigt. Man kann nun das Instrument in mehreren Lagen des Spiegels prüfen und zu seiner Berichtigung die Schrauben *a, a, a* (Fig. 22) brauchen. Im Nothfalle kann man unter die Grenzschrauben zwei kleine, gleich dicke Stückchen Papier oder Staniol legen, wenn nämlich der Spiegel zu sehr nach vorne geneigt ist; oder unter die mittlere Schraube ein solches Stückchen anbringen, wenn er zu sehr nach hinten geneigt sein sollte.

Die eben von uns beschriebene Correction des grossen Spiegels kann man auch mit Hülfe von zwei gleich hohen Visiren *a* und *b* (Fig. 23) machen. Hierzu stellt man das eine derselben (z. B. *a*) auf den Gradbogen *AP* und das andere auf eine der Speichen des Instruments zwischen *AP* und dem Spiegel *C*. Hierbei wird vorausgesezt, dass die Oberflächen der Speichen und des Gradbogens in einer Ebene liegen. Darauf dreht man den Nonius *D* nach rechts ganz über *A* hinaus so weit, dass man beim Durchblicken durch *a* dieses Visir, sowie auch *b* und die von *C* reflectirten Bilder beider Visire, so nahe als möglich zur Deckung bringt. Gelingt die Deckung vollständig, so ist dies ein Beweis dafür, dass der Spiegel *C* senkrecht auf der Ebene des Gradbogens steht; in jedem andern Falle ist eine Neigung vorhanden, welche mit Hülfe der Schrauben *aaa* wegzuschaffen ist.

Uebrigens lässt sich auch die Neigung des Spiegels, oder derjenige Winkel, welchen die Spiegelebene mit der Umdrehungsachse bildet, durch Messung finden; es giebt hierzu eine sehr einfache Methode, welche von dem Astronomen Preuss in Dorpat herrührt, und die wir hier hersetzen wollen.

Auf einer festen Unterlage stellt man ein Lineal *AabB*, (Fig. 24), an welches die vier senkrechten kleinen Stäbe *AA'*, *aa'*, *bb'* und *BB'* angebracht sind, horizontal auf; der äusserste von ihnen *BB'* ist seiner Länge nach in sehr kleine Theile, z. B. halbe Linien eingetheilt, und an allen Stäben befinden sich bewegliche Diopter, von welchen die beiden bei *A'* und

B' kleine Kreislöcher haben, die beiden anderen bei a' und b' aber aus einem kleinen Rahmen bestehen, in welchem ein Faden eingespannt ist. Man nimmt nun das Fernrohr ab und stellt den Sextanten so auf die Mitte des horizontalen Lineales auf, dass sein grosser Spiegel gerade in derselben Linie und in gleicher Höhe mit den Diroptern ist; darauf wendet man den Spiegel gegen die Diopter A' und a', hält das Auge an die Oeffnung bei A', und stellt die Diopter auf solche Weise, dass der Faden des Diopters a' mit seinem im Spiegel reflectirten Bilde zusammenfällt, und ebenso zu gleicher Zeit die vom Spiegel reflectirte Oeffnung des Diopters A' von dem Faden des Diopters a' in der Mitte durchschnitten wird. Bemerkt man darauf den Ort auf der Unterlage, wo der Fuss des Sextanten sich befand, durch einen Schnitt, so kann man ihn alsdann wegnehmen und darauf die Diopter b' und B' in eine gerade Linie mit den Dioptern a' und A' stellen, so dass, wenn man durch die Oeffnung des Diopters B' durchsieht, die beiden Fäden b' und a' zusammenfallen und die Oeffnung des Diopters A' in der Mitte zu durchschneiden scheinen werden; man liest nun den Theilstrich, auf welchem das Diopter B' steht, ab, stellt darauf den Fuss des Sextanten genau auf seinen früheren Ort auf der Unterlage auf und dreht den Sextanten um 180° auf seinem Fusse herum, so dass nunmehr die Lage des grossen Spiegels um 180° von der früheren verschieden, und folglich nach den Dioptern b' und B' gewendet ist; man bewegt dann das Diopter in B' so lange auf und nieder, wobei b' nicht angerührt wird, bis das Auge, welches an der Oeffnung bei B' sich befindet, ganz scharf bemerkt, dass der Faden des Diopters b' das reflectirte Bild der Oeffnung in B' in der Mitte schneidet. Wenn man darauf wieder auf dem Stabe B' den Theilstrich abliest, welcher dem Orte des Diopters B' entspricht, so wird der Unterschied zwischen dieser Ablesung und der vorher gemachten uns zur Bestimmung der Neigung des Spiegels verhelfen. Es sei dieser Unterschied $= \beta$, die Entfernung zwischen den Dioptern b' und

B', in demselben Masse wie β ausgedrückt, sei $= d$, und die gesuchte Neigung des Spiegels, oder der Winkel, den die Ebene des Spiegels mit seiner Umdrehungsachse bildet $= x$, so hat man:

$$sin\, x = \frac{\beta}{2d}, \text{ oder sehr nahe } x = \frac{\beta}{2d\, sin\, 1''};$$

und je grösser d ist, um so genauer wird man x finden.

Stellung des kleinen Spiegels.

5. Wenn der grosse Spiegel schon auf der Ebene des Sextanten senkrecht steht, so ist es leicht, den kleinen Spiegel ebenso aufzustellen, weil es hierzu nur nöthig ist, den kleinen Spiegel dem grossen parallel zu stellen. Man beobachtet nämlich einen deutlichen und sehr entfernten irdischen Gegenstand, oder noch besser irgend einen hellen Stern oder die Sonne; wird nun die Alhidade um den Nullpunkt herum bewegt, und lässt sich dadurch die Coincidenz des directen und gespiegelten Bildes des Gegenstandes genau herbeiführen, so ist dieses ein Beweis, dass der kleine Spiegel dem grossen parallel ist und folglich auch auf der Ebene des Sextanten senkrecht steht. Wenn aber die beiden Bilder auf keine Weise durch eine blosse Bewegung der Alhidade zur Coincidenz gebracht werden können, so muss man zuerst durch eine passende Bewegung der Alhidade beide Bilder einander so nahe wie möglich bringen, und darauf dadurch die Coincidenz herbeiführen, dass man eine besonders dazu bestimmte Schraube dreht, welche sich am kleinen Spiegel befindet und auf die Neigung seiner Ebene wirkt; alsdann wird der kleine Spiegel die richtige Stellung erhalten.

Stellung des Fernröhrs.

6. Um sich zu versichern, ob das Fernrohr richtig gestellt ist, stellt man den Sextanten horizontal auf einen festen Tisch, oder auf ein anderes gutes Stativ auf, und setzt auf dem Limbus des Sextanten zwei gleich hohe Diopter auf (Tab. V, Fig. 23), welche aus rechtwinklig gebogenen Messingplatten bestehen. Die Verticalseite jedes Diopters bildet einen Rahmen, in welchem ein horizontaler Faden aufgespannt ist, und zugleich so, dass jeder der Fäden sich in gleicher Höhe über dem Limbus des Sextanten befindet; diese Diopter bestimmen nun eine Linie, welche mit der Richtung des Fernrohrs parallel werden muss, und visirt man nun mit dem Auge genau an den Fäden der beiden Diopter vorbei, nach einem Punkte eines entfernten irdischen Gegenstandes, welcher auch durchs Fernrohr sichtbar ist, so werden alsdann die Lichtstrahlen, welche von diesem bestimmten Punkte durch die Diopter nach dem Auge des Beobachters gehen, der Ebene des Sextanten parallel sein, und wenn gleich darauf, bei unveränderter Lage des Instruments, der Beobachter durch das Fernrohr sieht, und der vorher beobachtete Punkt in der Mitte des Raumes im Fernrohre erscheint, der zwischen den horizontalen Fäden im Fernrohre liegt, so ist die Achse des Fernrohrs mit der Ebene des Instruments parallel. Im entgegengesetzten Falle muss man die Lage des Fernrohrs berichtigen, welches durch gewisse, dazu bestimmte Schrauben geschieht; bei den Troughton'schen und manchen anderen englischen Instrumenten sind diese Schrauben sehr klein und befinden sich an dem Ringe, in welchem das Fernrohr eingeschraubt wird; in diesem Ringe *abcd* (Fig. 25) sind kleine Spitzen *a* und *c* angebracht, welche in die ihnen entsprechenden Vertiefungen in dem Kreisumfange *ABCD* einpassen und das Fernrohr unterstützen; *a* und *c* liegen in einer Linie, die mit der Ebene des Sextanten parallel ist, um welche herum man das Fernrohr etwas bewegen kann, indem man eine der Schrauben

d oder *b* löst und die andere anzieht. Bei den Gambey'schen Sextanten ist eine andere Vorrichtung angebracht, welche weit bequemer ist und deren nähere Wirkung beim ersten Blicke auf das Instrument von selbst klar wird.

Bestimmung des Anfangs der Theilung oder des Indexfehlers.

7. Sind das Fernrohr und beide Spiegel gehörig berichtigt, so richtet man das Fernrohr auf einen recht deutlichen entfernten Gegenstand, z. B. auf einen hellen Stern, und stellt die Alhidade nahezu auf 0° 0′; darauf bringt man sie mit Hülfe der Mikrometerschraube in diejenige Lage, bei welcher das directe und reflectirte Bild dieses Gegenstandes genau zusammenfallen; liest man alsdann die Angabe der Theilung durch den Nonius ab, so wird diese den wahren Anfang auf dem Limbus bestimmen, von welchem aus man alle gemessenen Winkel auf dem Sextanten abzählen muss. Die Coincidenz des directen und des reflectirten Bildes eines Gegenstands kann nicht stattfinden, wenn die Stellung der beiden Spiegel nicht genau berichtigt ist. In diesem Falle sucht man die Bilder in den kleinstmöglichen Abstand zu bringen, und wird die entsprechende Ablesung am Gradbogen für den wahren Anfang angenommen. Eine derartige Bestimmung bleibt indessen immer etwas unsicher. Der Limbus auf dem Sextanten wird gewöhnlich von rechts aus nach links eingetheilt, und die Künstler bezeichnen den Anfang der Theilung mit 0° 0′; auf der rechten Seite dieses 0° 0′ ist ebenfalls noch eine kleine Theilung angebracht*), welche von links nach rechts

*) Die Engländer nennen diesen Theil des Gradbogens *the excedent Limb*, oder *the arc of excess.*

zunimmt und welche man also negativ zählen muss, wenn man die auf der linken Seite fortlaufende als positiv annehmen will. Wenn es sich nun ereignen sollte, dass der wahre Anfang der Theilung, oder die ihm entsprechende Zahl von Minuten und Secunden, sich auf der negativen Seite des Bogens befindet, so muss man, um die wahren gemessenen Winkel zu erhalten, zu allen Ablesungen auf dem Limbus des Sextanten die erwähnte Zahl zulegen; denn alsdann hat der Künstler 0° 0′ zu weit nach links angebracht, und folglich werden die unmittelbar abgelesenen Winkel zu klein werden. Wenn dagegen der wahre Anfang der Theilung auf dem Limbus nach rechts von 0° 0′ abliegt, so muss man von allen Ablesungen des Sextanten diese Zahl abziehen. Diese Zahl, welche man entweder zu den Ablesungen zuzulegen oder von ihnen abzuziehen hat, heisst der Index- oder Collimationsfehler des Instruments; im ersten Falle ist er positiv, im andern negativ.

Man kann nun den Indexfehler am besten durch Beobachtungen der Sonne bestimmen. Man stellt nämlich entweder das Blendglas vor das Ocular, oder die Farbengläser vor die beiden Spiegel, bringt darauf den rechten Rand des directen Sonnenbildes mit dem linken Rande des reflectirten Bildes in Berührung, und liest die Angabe des Nonius ab; alsdann lässt man, durch eine Bewegung der Alhidade, vermittelst der Mikrometerschraube die beiden Sonnenbilder übereinander gehen, bringt sie ferner auf der anderen Seite zur Berührung und liest am Nonius wieder ab; es sei die erste Ablesung $= + O'$; die zweite $= + O''$; dann wird der Indexfehler $O = -\frac{1}{2}(O' + O'')$ sein; hierbei muss man aber bemerken, auf welcher Seite von 0° 0′ sich die Ablesungen O' und O'' befinden; denn hiervon hängt es ab, ob der Indexfehler wirklich positiv oder negativ genommen werden muss. Der halbe Unterschied der Werthe O' und O'' bestimmt den scheinbaren Durchmesser der Sonne.

Beispiel. Bei der Berührung der entgegengesetzten Ränder beider Sonnenbilder wurde auf dem Verniere abgelesen

bei der Berührung *diesseits* des Nullpunkts	$O' = +0°25'15''$	+, weil die Theilung auf der linken Seite von 0° war,
bei der Berührung der beiden andern Ränder, oder *jenseits* des Nullpunkts	$O'' = -0°38'\ 0''$	—, weil die Theilung rechts von 0°0' ablag*)

Indexfehler . . . $= +0°\ 6'22'',5 = -\frac{1}{2}(O'+O'')$;
halber Unterschied $= +0°31'37'',5 = +\frac{1}{2}(O'-O'') =$
dem scheinbaren Durchmesser der Sonne.

Auf ganz ähnliche Weise kann man auch den Indexfehler aus der Beobachtung eines entfernten irdischen Gegenstandes ableiten; wenn jedoch dieser Gegenstand nicht sehr weit entfernt ist, so wird man eine etwas andere Grösse finden, wie wir schon in § 1, S. 710 erwähnt haben.

Es sei D (Fig. 21) das irdische Object, welches zur Bestimmung des Indexfehlers gedient hat; $CD = \mathfrak{d}$ die Entfernung des Objects von der Mitte C des grossen Spiegels; $Cm = b$ die Entfernung der Mitte dieses Spiegels von der Mitte des kleinen Spiegels rms und β der Winkel zwischen der geraden Linie Cm und dem Perpendikel mp zur Ebene des kleinen Spiegels nach der Seite des Fernrohrs gezogen. Dann ist der Winkel $Dmr = Cmr = 90° - \beta$ und $DmC = 180° - 2\beta$; wird der Winkel $CDm = \mathfrak{x}$ gesetzt, so erhält man aus dem Dreieck DCm:

*) In diesem Falle wurde auf dem Nonius unmittelbar 22′0″ abgelesen; da aber die Theilung auf der negativen Seite des Limbus des Sextanten von 0°0′ rechts lag, während die Theilung auf dem Nonius immer nach links zunimmt, so bedeutet eigentlich diese Ablesung, dass der Nullpunkt des Verniers um 22′0″ vom Theilstriche von 60′, oder von 1° auf dem Theile des Limbus, welcher sich auf der rechten Seite des Nullpunkts des Limbus befindet, entfernt war; daher war in diesem Falle die Entfernung des Nullpunkts des Verniers vom Nullpunkte des Sextanten auf der rechten Seite des letzteren = 60′—22′0″ oder 38′0″.

$$sin \xi = \frac{b}{\mathfrak{d}} \cdot sin 2\beta, \text{ oder in Secunden } \xi = \frac{b}{\mathfrak{d}\, sin 1''} \cdot sin 2\beta,$$

da b immer sehr klein ist im Vergleich zu $\mathfrak{d}$. Hat man den Indexfehler sowohl durch die Sonne, als auch durch das irdische Object bestimmt, so muss ξ den Unterschied dieser Bestimmungen ausdrücken. Der durch den irdischen Gegenstand gefundene Anfangspunkt, von dem aus der gemessene Winkel abzuzählen ist, liegt auf dem Gradbogen des Sextanten immer rechts von dem durch die Beobachtung der Sonne ermittelten Anfangspunkt.

Misst man den Winkel zwischen zwei terrestrischen Gegenständen oder einem terrestrischen Gegenstande und der Sonne mit Hülfe eines Sextanten, und kennt man nicht die Entfernungen der terrestrischen Gegenstände und den Winkel β, so muss man stets zu dem unmittelbar abgelesenen Winkel denjenigen Indexfehler mit dem passenden Zeichen hinzulegen, welcher aus der Beobachtung des Gegenstands abgeleitet wird, welcher bei der Winkelmessung direct, oder unmittelbar durch den durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels gesehen wurde.

Von der Excentricität des Sextanten.

8. In den meisten Sextanten bringt die Excentricität vielleicht die bedeutendsten Fehler hervor; derselbe rührt davon her, dass die Umdrehungsachse des grossen Spiegels nicht mit dem Centrum des eingetheilten Gradbogens zusammenfällt; wir haben jedoch schon in § 89, S. 215 ff. gesehen, welchen Einfluss die Excentricität auf jeden mit Hülfe eines Kreisbogens gemessenen Winkel ausüben kann. Um diesen Fehler nun bei einem Sextanten zu bestimmen, misst man, nachdem er gut berichtigt, zwei genau bekannte Winkel; die Unterschiede der beobachteten

und wahren Werthe zeigen uns den Einfluss der Excentricität auf diese Winkel, und alsdann kann man in der nach § 89 angegebenen Methode sich leicht eine kleine Tafel anfertigen, welche die Correctionen für alle möglichen Winkel enthält. Wir wollen also hier nur darüber ausführlicher sprechen, wie man die Fehler eines mit dem Sextanten gemessenen Winkels untersuchen kann.

Mit einem guten Theodoliten oder Universalinstrumente misst man zwei oder mehrere horizontale Winkel, welche zwischen irgend welchen deutlichen terrestrischen Gegenständen eingeschlossen sind, und beobachtet zugleich ihre Zenithdistanzen. Es sei Z (Fig. 30) das Zenith, A und B irdische Objecte, zwischen welchen man mit einem Theodoliten oder Universalinstrumente den horizontalen Winkel γ gemessen hat, und es seien ihre Zenithdistanzen $ZA = 90°-h$, und $ZB = 90°-H$. Nun beobachtet man mit einem Sextanten den Winkel in der Ebene, welcher durch das Centrum des Instruments und die Objecte A und B selbst geht, und um nun den mit Hülfe des Sextanten gemessenen Winkel $AB = s$ mit dem durch den Theodoliten gemessenen $A'B' = \gamma$ vergleichen zu können, muss man den Winkel γ mittelst der gemessenen Höhen $AA' = h$, und $BB' = H$ auf die Ebene der Objecte reduciren. Da aber h und H immer sehr klein sein werden, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass

$$s = \gamma + \left(\frac{h-H}{2}\right)^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\gamma - \left(\frac{h+H}{2}\right)^2 \sin 1'' \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\gamma$$

ist, wo h und H in Secunden ausgedrückt werden müssen*).

*) Aus dem sphärischen Dreiecke ZAB folgt sogleich:

$$\cos s = \sin h \sin H + \cos h \cos H \cos \gamma$$
$$\cos s - \cos \gamma = \sin h \sin H - 2 \cos \gamma (\sin^2 \tfrac{1}{2} h + \sin^2 \tfrac{1}{2} H - \ldots);$$

wegen der Kleinheit von h und H kann man jedoch annehmen, dass:

$$\sin h = h \sin 1'', \sin H = H \sin 1'',$$

Vergleicht man nun den aus den Beobachtungen mit Hülfe eines guten Theodoliten gefundenen Werth von s mit seinem Werthe, wie er mit dem Sextanten gefunden wurde, so findet man dadurch den Einfluss der Excentricität auf den Winkel s.

9. Es giebt noch andere Methoden, um die Richtigkeit zu untersuchen, mit welcher die Winkel mittelst der Sextanten gemessen werden.

1) Man wählt einen hinreichend grossen freien Raum in der Ebene und stellt im Umfange eines Kreises herum, dessen Radius wenigstens 700 Fuss lang ist, gleich weit von einander drei Signale auf; in dem Centrum dieses Kreises misst man mit einem Sextanten die Winkel, welche zwischen diesen Signalen enthalten sind; jeder von ihnen wird sehr nahe 120°, die Summe aller drei aber genau gleich 360° werden müssen; findet dieses nicht statt, so wird die Abweichung dieser Summe von 360° gleich dem dreifachen Fehler des Winkels von 120° werden. Stellt man nun darauf am Umfange dieses Kreises herum 4, 6 oder 8 u. s. w. Signale auf, so kann man ganz ähnlich die Fehler der Winkel 90°, oder 60°, oder 45° u. s. w. bestimmen. Bei der Beobachtung der Winkel muss man den Sextanten auf ein Stativ befestigen, und sorgfältig darauf achten, dass der Fuss des grossen Spiegels, durch welchen seine Umdrehungsachse durchgeht, immer einem und demselben constanten Punkte entspricht; ferner muss man ebenso darauf achten, dass

---

folglich:

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(\gamma - s) \sin \tfrac{1}{2}(\gamma + s) = h.H.\sin^2 1'' - \tfrac{1}{2}\cos\gamma\,(h^2 + H^2)\sin^2 1''$$

$$= h.H.\sin^2 1''(\cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma + \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma) - \frac{\sin^2 1''}{2}(h^2 + H^2)(\cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma - \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma)$$

$$= \frac{\sin^2 1''}{2}(h + H)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma - \frac{\sin^2 1''}{2}(h - H)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma;$$

nun ist aber $\sin \tfrac{1}{2}(s + \gamma)$ beinahe gleich $\sin\gamma = 2 \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cos \tfrac{1}{2}\gamma$, und $2 \sin \tfrac{1}{2}(\gamma - s)$ beinahe $= (\gamma - s)\sin 1''$; dividirt man daher beide Seiten der Gleichung durch $\sin 1''$, so erhält man den im Texte gegebenen Ausdruck.

die beobachteten Punkte der Signale in derselben Höhe liegen.

2) In einer heiteren Nacht misst man mittelst eines Sextanten die Winkel zwischen einigen gut bestimmten, sehr hellen Sternen und schreibt hierbei den Stand des Barometers und Thermometers auf, sowie auch die Zeit der Beobachtung nach einem Chronometer, dessen Uhrcorrection gegen Sternzeit nahezu bekannt ist; alsdann kann man daraus, mit Hülfe der Breite des Orts, der Sternzeit der Beobachtung, der Declination und der geraden Aufsteigung der Gestirne, zuerst die wahren, darauf aber die scheinbaren Höhen h und H der beiden beobachteten Sterne und ebenso ihre Azimuthe berechnen; darauf kann man, ähnlich wie bei der Berechnung von Monddistanzen, von welchen unten die Rede sein wird, den scheinbaren Winkelabstand dieser Sterne von einander bestimmen.

Vergleicht man die berechnete scheinbare Winkelentfernung mit der wirklich beobachteten, so wird man aus dem Unterschiede beider den Fehler des Sextanten bei dem entsprechenden Winkel erhalten.

Obgleich es nun zur Bestimmung der Excentricität des Instruments genügend ist, nur zwei zwischen einander hinlänglich verschiedene Winkel zu beobachten, so ist es doch besser, viele verschiedene Winkel, deren genauer Werth bekannt ist, mit Hülfe des Sextanten zu untersuchen, und die Excentricität nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen. Hat man die gemessenen Winkel vom Einflusse der Excentricität befreit, so kann man mit Hülfe ihrer entsprechenden wahren Werthe auf den Grad der Genauigkeit der Theilung selbst schliessen. Um die Richtigkeit des Nonius zu prüfen, muss man seinen Nullpunkt immer ganz genau auf die Theilstriche 0°, 10°, 20° u. s. w. des Sextantenlimbus einstellen, und darauf jedesmal das andere Ende ablesen. Nimmt man dann Rücksicht auf die Wirkung der Excentricität bei 0°, 10°, 20° u. s. w. und auf ihre Wirkung auf den Bogen, bei welchem sich das Ende des

Nonius befindet, so erhält man viele Bestimmungen für den Werth des Noniusbogens, deren Mittelzahl uns dann seinen wahrscheinlichsten Werth giebt.

Untersuchung der gefärbten Gläser.

10. Wenn die gefärbten Gläser nicht von parallelen Ebenen begrenzt sind, so sind die auf sie einfallenden Lichtstrahlen mit den ausfallenden nicht parallel; da aber diese Gläser ihre Lagen gegen die durch sie gehenden Strahlen niemals ändern, so muss die prismatische Gestalt der gefärbten Gläser einen constanten Fehler, sowohl bei der Bestimmung des Indexfehlers, als auch bei der Messung irgend eines Winkels hervorbringen. Wenn man also Sonnenhöhen beobachtet, so ist es nur nöthig, vermittelst derselben gefärbten Gläser den Indexfehler zu untersuchen, vermittelst welcher man die Sonnenhöhen misst; alsdann hat die Unrichtigkeit dieser Gläser keinen Einfluss auf die aus solchen Beobachtungen abgeleitete Höhe der Sonne. In dem Falle aber, wo Winkel zwischen der Sonne und dem Monde, oder einem irdischen Gegenstand gesucht werden, ist eine solche Elimination nicht mehr möglich, weil man in diesem Falle nur die von der Sonne herkommenden Strahlen durch die gefärbten Gläser gehen lassen darf, und daher entweder die Gläser P (Fig. 22), oder die Gläser Q allein vorschieben muss, je nachdem man die Sonne direct, oder an beiden Spiegeln doppelt reflectirt beobachtet. Bei solchen Messungen ist es also wichtig, die Richtigkeit der gefärbten Gläser zu prüfen; die Mittel dazu werden wir kurz, nach der Anleitung Bohnenbergers, hier anführen.

Am bequemsten lässt sich der Fehler der gefärbten Gläser

entdecken und bestimmen, wenn die Gläser in ihren Fassungen um ihre Mittelpunkte gedreht, oder mit ihrer Fassung umgelegt werden können, so dass der obere Theil derselben nach unten kommt, und der rechte nach links, wie es bei den Borda'schen, Ertel'schen und anderen Instrumenten leicht zu machen ist. Die Gläser werden dann vermittelst viereckiger Zapfen in Fassungen eingesteckt, welche auf dem Körper des Instruments angebracht sind. Wenn man den Indexfehler vermittelst der Sonne bestimmt hat, und alsdann die Gläser, wie gesagt, umgekehrt hat, so wird der von den gefärbten Gläsern herrührende Fehler auf die andere Seite fallen; bestimmt man also den Indexfehler noch einmal, so muss er eben so viel grösser oder kleiner herauskommen, als er anfangs zu klein oder zu gross war; der halbe Unterschied beider Angaben giebt sogleich den Fehler der gefärbten Gläser*).

Wenn man die Gläser nicht umkehren kann, so muss man ihre Fehler auf folgende Art zu bestimmen suchen. Zuerst bestimme man vermittelst des Mondes den Indexfehler ohne alle gefärbten Gläser; alsdann suche man denselben, nachdem man das hellste grüne Glas bei dem kleinen Spiegel, und hernach bei dem grossen vorgeschoben hat; so bekommt man nach und nach die Fehler dieser Gläser. Ebenso verfahre man mit den anderen etwas dunkleren grünen Gläsern. Wenn man nun den Fehler jedes einzelnen Glases auf diese Art gefunden hat, so suche man den Indexfehler vermittelst der Sonne, indem man die dunkeln braunen und die hellsten grünen Gläser gebraucht. Dieser Indexfehler, mit dem verglichen, den man ohne die ge-

*) Wenn die gefärbten Gläser umzukehren sind, so kann man den Einfluss der Unrichtigkeit der Gläser noch folgendermassen wegschaffen. Man beobachtet den Winkel zwischen der Sonne und dem Monde, oder einem irdischen Gegenstande, erst bei einer Lage der gefärbten Gläser; alsdann kehrt man die Gläser um und wiederholt ebenso viele Beobachtungen bei dieser neuen Lage der Gläser; das Mittel aus solchen Beobachtungen wird von der Unrichtigkeit der Gläser frei sein, nur muss man dabei einen Indexfehler gebrauchen, welcher ebenfalls unabhängig davon bestimmt ist.

färbten Gläser, vermittelst des Mondes gefunden hat, giebt den Fehler der beiden Gläser zusammen. Da man aber den Fehler der grünen Gläser schon kennt, so kann man auch den Fehler der dunkeln Gläser bestimmen.

Vom Einflusse der unrichtigen Aufstellung des Fernrohrs und des Spiegels auf die mit Hülfe eines Sextanten gemessenen Winkel.

11. Bohnenberger war der erste, welcher diesen Einfluss sorgfältig und umständlich untersucht hat; später ist jedoch noch eine vollständigere und allgemeinere Behandlung desselben Gegenstandes von Encke bekannt gemacht worden. Bemerkt man, dass es sich hier, sowie in allen anderen Fällen nicht darum handelt, die absolute Lage der Linien oder Ebenen im Raume, sondern nur ihre Richtungen zu bestimmen; so wird man leicht einsehen, dass diese Richtungen am bequemsten ausgedrückt werden, wenn man einen beliebigen Punkt als Centrum einer Kugel annimmt, und diese Kugel mit einem willkürlichen Radius beschrieben denkt. Die den gegebenen Linien parallelen Radien, werden alsdann unter einander dieselben Winkel, wie die Linien selbst bilden. Die Bögen der grössten Kreise, welche zwischen den Endpunkten solcher Radien liegen, bestimmen das Mass der zu untersuchenden Winkel. Ebenso werden auch die Bögen, welche zwischen Radien enthalten sind, die auf gegebenen Ebenen senkrecht stehen, wiederum die Neigung dieser Ebenen gegen einander messen. Hieraus sieht man, dass alle gesuchten Winkel sehr leicht durch die sphärische Trigonometrie zu berechnen sein werden; eine sehr elegante und ganz strenge Auflösung der

Aufgabe die Fehler eines mit einem Sextanten gemessenen Winkels zu berechnen, welche von der unrichtigen Stellung der beiden Spiegel und des Fernrohrs herrühren, hat Encke im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1830 gegeben; anstatt dieser analytischen Auflösung hat Struve aber eine andere, auf mehreren Constructionen beruhende, sehr einfache geometrische Auflösung vorgeschlagen.

Wir werden hier aber mit Hülfe einer einzigen Construction die Sache noch einfacher darstellen, wobei wir einen für die Praxis vollkommen hinreichenden Grad der Genauigkeit im Auge behalten werden.

Es sei O der Punkt, welcher dem Centrum des Sextanten entspricht (Fig. 26) und um welchen eine Kugel mit einem beliebigen Halbmesser beschrieben ist; die Ebene, in welcher sich der Limbus des Sextanten befindet, bilde mit dieser Kugel bei ihrem Durchschnitte irgend einen grössten Kreis $UPCQ$. Wenn nun das Fernrohr und beide Spiegel richtig stehen, so werden alle Radien, welche den Lichtstrahlen parallel laufen, die von dem beobachteten Gegenstande ausgehen, sich in der Ebene des grössten Kreises $UPCQ$ befinden. Wir wollen aber zuerst den Fall untersuchen, wenn die Spiegel zwar senkrecht auf der Ebene des Instruments stehen, die Gesichtslinie oder die Achse des Fernrohrs jedoch mit dieser letzteren Ebene nicht parallel ist. Alsdann wird der Radius, welcher von O aus der Richtung der Gesichtslinie parallel läuft, die Oberfläche der Kugel in irgend einem Punkte A' treffen, ausserhalb der Ebene des grössten Kreises $UPCQ$; der Bogen $AA' = i$, welcher senkrecht auf letzterem Kreise steht, drückt alsdann die Neigung der Gesichtslinie gegen die Ebene des Sextanten aus. Es sei der Punkt p auf der Kugeloberfläche der Pol der Ebene, welche dem kleinen Spiegel parallel ist, und es entspreche dieser Pol der Rückseite (d. h. der dem direct gesehenen Gegenstande zugekehrten Seite) des kleinen Spiegels und ebenso sei P der Pol der mit dem grossen Spiegel parallelen Ebene; und zwar der Pol, welcher

der reflectirenden Fläche entspricht. Beide Punkte, p sowohl als P, werden nach unserer Annahme in der Ebene des grössten Kreises $UPCQ$ liegen, und der Kürze halber wollen wir p den Pol des kleinen, P aber den Pol des grossen Spiegels nennen.

Der Bogen pA' misst alsdann den Winkel zwischen der Gesichtslinie und der Senkrechten auf dem kleinen Spiegel; wenn wir nun diesen Bogen nach der entgegengesetzten Seite von p aus verlängern und $pB' = pA'$ machen, ferner B' und P durch den Bogen $B'P$ verbinden und ihn so weit verlängern, bis $PC' = B'P$, so muss C' der Durchschnittspunkt der Kugeloberfläche mit demjenigen Radius sein, welcher der Gesichtslinie parallel ist, welche vom Gegenstande ausgehend auf den grossen Spiegel fällt und alsdann mittelst doppelter Reflexion in das Gesichtsfeld des Fernrohrs gebracht wird; denn der Einfallswinkel dieses Lichtstrahls ist gleich dem Bogen PC'; und da nun $PB' = PC'$ ist, so wird B' die Lage des Strahls nach seiner Reflexion im grossen Spiegel bestimmen; alsdann wird dieser Strahl auf den kleinen Spiegel unter einem Winkel einfallen, der gleich dem Bogen $B'p$ ist und endlich von diesem wiederum unter einen Winkel zurückgeworfen werden, der gleich dem Bogen $pA' = B'p$ ist. Auf diese Weise stellen also A' und C' die entsprechenden Orte der Gegenstände auf der Kugelfläche dar, von denen der eine den direct erblickten, der andere aber den durch doppelte Reflexion gesehenen bezeichnet; auf diese Weise muss also der Bogen $A'C' = x$ den wahren Winkel zwischen beiden Gegenständen ausdrücken; während der mit Hülfe des Sextanten beobachtete gleich dem doppelten Bogen Pp, oder dem doppelten Winkel gleich ist, welchen die Ebenen beider Spiegel mit einander bilden. Aus den Punkten A', B' und C' fälle man die senkrechten Bögen AA', UB' und CC' auf die Ebene des Sextanten, und setze $2\,Pp = s$, $Ap = \beta$; so hat man aus der Congruenz der sphärischen Dreiecke pAA' und $pB'U$ sogleich $B'U = AA' = i =$ der Neigung des Fernrohrs

gegen die Ebene des Sextanten und ebenso $Up = Ap = \beta =$ dem Winkel, welcher zwischen der Senkrechten auf dem kleinen Spiegel und der Richtung des Fernrohrs enthalten sein würde, wenn letzteres mit der Ebene des Sextanten wirklich parallel wäre. Aber $PA = pP - pA = \frac{1}{2}s - \beta$ und die beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $UB'P$ und PCC' sind congruent, folglich $i = B'U = CC'$; $CP = UP = Ap + pP = \beta + \frac{1}{2}s$; und $AC = AP + CP = s$. Nimmt man nun an, dass R der geometrische Pol des grössten Kreises $UPCQ$, oder der Sextantenebene $UPCQ$ ist; so werden die durch A' und R, C' und R durchgelegten grössten Kreise $A'R$ und $C'R$ auf dem Kreise $UPCQ$ senkrecht stehen, und ihn in den Punkten A und C schneiden; folglich hat man dann $AR = CR = 90°$, $A'R = C'R = 90° - i$ und der Winkel ARC wird gleich dem Bogen $AC = s$; so dass aus der Auflösung des Dreiecks $A'C'R$, in welchem $A'C' = x$, sogleich folgt:

$$\cos x = \sin^2 i + \cos^2 i \cos s = \cos s + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} s \sin^2 i;$$

da nun i immer ein sehr kleiner Winkel sein wird, so kann man statt dieser Gleichung mit hinreichender Genauigkeit folgende annehmen:

$$x - s = -i^2 . \sin 1'' . tg \tfrac{1}{2} s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A);$$

hieraus sieht man, dass der Fehler, welcher von der Neigung des Fernrohrs gegen die Ebene des Sextanten herrührt, zugleich mit dem gemessenen Winkel wächst, und da immer $\frac{1}{2}s < 90°$ ist, so wird der wahre Winkel immer zu klein gemessen. Bei $i = 10' = 600''$ und $s = 140°$ wird der Fehler sehr nahe $= -4'',8$ werden; für kleinere Winkel wird er noch kleiner, und da in der Praxis i selten grösser als $4'$ ist, so ist der Einfluss eines solchen Werthes von i verschwindend.

Wir wollen jetzt die Aufgabe allgemeiner fassen, und annehmen, dass das Fernrohr gegen die Ebene des Sextanten um den Winkel $= i$ geneigt ist; dass ferner der grosse Spiegel gegen die Linie, welche senkrecht auf der Ebene des Sextanten

steht, um den Winkel $= l$ geneigt, und endlich der kleine Spiegel von der senkrechten Lage gegen die Sextantenebene um den Winkel $= k$ abweicht. Bei jedem Sextanten werden diese Winkel sehr klein sein, und um daher unnöthige Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir dieses durchweg in den folgenden Untersuchungen annehmen.

Man denke sich nun wieder eine Kugel mit beliebigem Halbmesser um das Centrum unseres Instruments beschrieben, und bilde sich eine Figur, welche derjenigen ähnlich ist, die wir schon oben erwähnt haben. Es seien p' und P' (Fig. 27) die entsprechenden Pole des kleinen und grossen Spiegels auf der Kugelfläche, A' der direct gesehene Gegenstand in der Richtung der Absehenslinie des Fernrohrs, und es sei der grösste Kreis MAL in der Ebene des Sextanten gelegen, wobei wir ausserdem noch annehmen wollen, dass die drei Punkte $p'A'$ und P' über der Ebene des Sextanten MAL liegen.

Man denke sich nun, dass die Bögen pp', AA' und PP' auf dieser Ebene senkrecht stehen, so wird $AA' = i =$ der Neigung des Fernrohrs, $PP' = l =$ der Neigung des grossen Spiegels und endlich $pp' = k =$ der Neigung des kleinen Spiegels gegen die Senkrechte auf der Ebene des Sextanten sein. Um den Punkt C', oder den Punkt auf der Kugeloberfläche zu finden, welcher dem Orte des durch doppelte Reflexion gesehenen Gegenstandes entspricht, nehme man auf der Verlängerung von $p'A'$ den Bogen $p'B' = p'A'$, und verbinde darauf B' und P' durch den Bogen $P'B'$, indem man auf dessen Verlängerung den Bogen $P'C' = B'P'$ macht; alsdann wird C' der gesuchte Punkt sein, und ferner drückt der Bogen $A'C' = x$ den wahren Winkel zwischen den im directen und reflectirten Bilde beobachteten Gegenständen aus; der Winkel s aber, der mit Hülfe des Sextanten bestimmt wurde, ist gleich dem doppelten Bogen Pp. Nun sei $pP = \alpha$, oder $2\alpha = s$; und um x mit Hülfe von s zu bestimmen, wollen wir zuerst den Bogen $p'P' = \alpha'$ mit Hülfe von $\frac{1}{2}s$ oder α berechnen. Nimmt man dazu an, dass

R der geometrische Pol der Sextantenebene, oder des grössten Kreises MAL ist, so wird $pR = PR = 90°$; $p'R = 90° - k$, $P'R = 90° - l$, und Winkel $p'RP' = pP = \alpha$; folglich erhält man aus dem sphärischen Dreiecke $p'RP'$:

$$\cos p'P' = \cos \alpha' = \sin k \sin l + \cos k \cos l \cos \alpha;$$

aber wegen der Kleinheit der Winkel k und l kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass $\sin k = k \sin 1''$; $\sin l = l \sin 1''$; $\cos k = 1 - \frac{1}{2} k^2 \sin^2 1''$; $\cos l = 1 - \frac{1}{2} l^2 \sin^2 1''$; vernachlässigt man nun das Glied $\frac{1}{4} k^2 l^2 \sin^4 1''$, so kommt:

$$\cos \alpha' = k l \sin^2 1'' + \cos \alpha - \tfrac{1}{2}(k^2 + l^2) \sin^2 1'' \cos \alpha;$$
$$\cos \alpha' - \cos \alpha = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha') \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha')$$
$$= k l \sin^2 1'' - \tfrac{1}{2}(k^2 + l^2) \sin^2 1'' \cos \alpha.$$

Da nun α' sehr nahe an α ist, so kann man annehmen, dass $2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \alpha') = (\alpha - \alpha') \sin 1''$ und $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha)' = \sin \alpha$; folglich

$$\alpha' - \alpha = \left(\frac{k^2}{2} + \frac{l^2}{2}\right) \frac{\sin 1''. \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{k l \sin 1''}{\sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B).$$

Zieht man aus A' den Bogen $NA' = \eta$ senkrecht auf $p'P'$, so bezeichnet η die Neigung des Fernrohrs gegen den grössten Kreis $Mp'P'L$, und der Bogen $A'C' = x$ (Fig. 27) wird sich in derselben Abhängigkeit zu $pP' = \alpha'$ und $A'N = \eta$ befinden; wie sich in (Fig. 26) S. 332 der Bogen $A'C' = x$ zum Bogen pP und zu AA' befand; aber dort bezeichneten wir durch s den doppelten Bogen $pP = \alpha$ (Fig. 26); folglich müssen wir die auf S. 334 gefundene Formel (A) in unserem Falle so umändern, dass $2\alpha'$ jetzt für s, und η für i gesetzt wird, wodurch also:

$$A'C' - 2P'p' = x - 2\alpha' = -\eta^2 \sin 1''. tg \alpha'.$$

Aber wegen der sehr geringen Neigung der Kreise $Mp'P'$ und MpP gegen einander, wird ein Bogen, der auf einem dieser Kreise senkrecht ist, es sehr nahe auch auf dem anderen

sein; bezeichnet man nun AA' und NA' nach dem Früheren durch i und η, und den senkrechten Bogen AN auf pP durch ξ, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass $\eta = NA' = NA - AA' = \xi - i$ (Fig. 27). Nimmt man nun an, dass $pA = \beta$ und $pP = \alpha$ und ferner noch $Mp = z$, so erhält man aus den sphärischen Dreiecken Mpp', MPP' und MAN:

$$cotg M = cotg k . sin z = cotg l . sin (z + \alpha) = cotg \xi . sin (z + \beta),$$

so dass folglich auch:

$$tg z = \frac{tg k . sin \alpha}{tg l - tg k cos \alpha} = \frac{tg k . sin \beta}{tg \xi - tg k cos \beta}.$$

Vernachlässigt man die kleinen Werthe dritter Ordnung, so kann man statt der Tangenten von k, l und ξ die entsprechenden Bögen selbst setzen; wodurch

$$\frac{k sin \alpha}{l - k cos \alpha} = \frac{k sin \beta}{\xi - k cos \beta};$$

$$\xi = \frac{1}{sin \alpha}[l sin \beta + k sin (\alpha - \beta)],$$

und da $\eta = \xi - i$, so hat man ferner:

$$\eta = \frac{1}{sin \alpha}[l . sin \beta + k . sin (\alpha - \beta) - i . sin \alpha].$$

Nun ist α sehr nahezu $= \alpha'$; folglich kann man $x - 2\alpha' = -\eta^2 sin 1'' tg \alpha$ setzen, und dann ist ferner $x - 2\alpha = 2\alpha' - \eta^2 sin 1'' tg \alpha - 2\alpha$; setzt man statt $2\alpha' - 2\alpha$ seinen Werth aus Gleichung (B), so erhält man:

$$x - 2\alpha = (k^2 + l^2)\frac{sin 1'' cos \alpha}{sin \alpha} - \frac{2 k l sin 1''}{sin \alpha}$$
$$- [l . sin \beta + k . sin (\alpha - \beta) - i sin \alpha]^2 \frac{sin 1''}{sin \alpha cos \alpha}.$$

Der Winkel x ist der gesuchte genaue Winkel; $2\alpha = s$ aber ist der unmittelbar aus den Beobachtungen gefundene Werth desselben, also wird der Fehler in s gleich:

$$x - s = [(k^2 + l^2) \cos \tfrac{1}{2} s - 2 k l] \frac{\sin 1''}{\sin \tfrac{1}{2} s} -$$
$$- [l . \sin \beta + k . \sin (\tfrac{1}{2} s - \beta) - i \sin \tfrac{1}{2} s]^2 \frac{2 \sin 1''}{\sin s} \quad . \quad . \quad (C).$$

Diese Formel stimmt in den Grenzen der von uns angenommenen Näherung mit dem genauen Ausdrucke überein, welchen Encke im Anhange zum Berliner Astronomischen Jahrbuche für 1830 angegeben hat.

Die Werthe i und k sind constante Winkel für einen bestimmten Sextanten; wenn aber die Umdrehungsachse der Alhidade und der grosse Spiegel nicht senkrecht auf der Ebene des Sextanten steht, so wird der Werth l für jeden gemessenen Winkel ein anderer sein; die Künstler aber verwenden alle mögliche Sorgfalt darauf, um die Umdrehungsachse senkrecht auf die erwähnte Ebene zu machen; verlässt man sich darauf, so wird man die kleine Veränderlichkeit von l vernachlässigen können.

Es ist bekannt, dass die leichteste Berichtigung des Sextanten darin besteht, den kleinen Spiegel dem grossen vollkommen parallel zu stellen (§ 5, S. 720); in diesem Falle hat man $k = l$ und dann findet man aus der Gleichung (C):

$$x - s = - 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} s \, \{l^2 + [l \cos (\tfrac{1}{2} s - \beta) - i . \cos \tfrac{1}{2} s]^2\} \sin 1'' \quad . \quad (D).$$

Wenn $i = 0$ und $l = 0$, so hat man aus der Gleichung (C):

$$x - s = k^2 \sin 1'' \left\{ \frac{\cos \tfrac{1}{2} s}{\sin \tfrac{1}{2} s} - \frac{2 \sin^2 (\tfrac{1}{2} s - \beta)}{\sin s} \right\};$$
$$= \frac{2 k^2 \sin 1''}{\sin s} [\cos^2 \tfrac{1}{2} s - \sin^2 (\tfrac{1}{2} s - \beta)];$$
$$= \frac{2 k^2 \sin 1''}{\sin s} [\cos^2 \tfrac{1}{2} s - \sin^2 \tfrac{1}{2} s \cos^2 \beta - \cos^2 \tfrac{1}{2} s \sin^2 \beta$$
$$+ 2 \sin \tfrac{1}{2} s \cos \tfrac{1}{2} s . \sin \beta \cos \beta];$$
$$= \frac{2 k^2 \sin 1''}{\sin s} \left\{ \cos^2 \beta \cos s + \tfrac{1}{2} \sin s \sin 2 \beta \right\};$$

und endlich erhält man:

$$x - s = 2k^2 \sin 1'' \cos^2 \beta . \cot g s + k^2 \sin 1'' . \sin 2\beta.$$

Das letzte Glied im zweiten Theile dieser Gleichung ist für jeden Winkel s eine constante Grösse, und ist daher schon folglich in der Bestimmnng des Indexfehlers miteinbegriffen; da aber die abgelesenen Winkel für diesen Indexfehler verbessert werden, so muss man bei der Berechnung eines jeden gemessenen Winkels s, nur den im ersten Gliede des zweiten Theiles der Gleichung abgeleiteten Ausdruck berücksichtigen, so dass alsdann wird:

$$x - s = 2k^2 \sin 1'' . \cos^2 \beta \cot g s.$$

In vielen Sextanten ist $\beta = 17°$ oder $15°$; nimmt man an, dass $k = 1' = 60''$, und $s = 0° 30'$, so wird der Fehler im Winkel s kleiner als $4''$ werden, beim Wachsen der Winkel nimmt dieser Fehler rasch ab, und verschwindet beinahe gänzlich bei grossen Winkeln.

Praktische Bemerkungen über die Bestimmung der Fehler des Sextanten.

12. Um die numerischen Werthe einiger von den erwähnten Fehlern des Sextanten bequem finden zu können, muss man die Winkelentfernung der Fäden kennen, welche in der Focalebene des Sextanten-Fernrohrs aufgespannt sind. Annähernd findet man den Fadenabstand, wenn man das Fernrohr auf die Sonne richtet, und durch Schätzung ermittelt, um wie viel dieser Abstand grösser oder kleiner ist, als der Sonnendurch-

messer. Um diese Entfernung genauer zu bestimmen, stellt man den Sextanten auf ein passendes Stativ fest auf, und dreht das Ocular so, dass zwei Fäden nach dem Augenmasse senkrecht auf der Ebene des Sextanten stehen; richtet darauf das Fernrohr auf einen deutlichen entfernten terrestrischen Gegenstand; bringt das directe Bild dieses Gegenstands mit einem der beiden Fäden in Berührung, und liest die Angabe des Nonius, welche diesem Stande der Alhidade entspricht, ab: sie sei $= c$. Indem man nun das directe Bild des Gegenstands mit demselben Faden in Berührung lässt, bringt man durch eine Drehung der Mikrometerschraube das reflectirte Bild des Gegenstands an den zweiten Faden, und liest wiederum die Angabe des Nonius ab; diese sei $= s$; so wird alsdann *die gesuchte Entfernung der Fäden* $= s - c$; wobei man übrigens darauf zu achten hat, ob die Ablesungen s und c sich beide auf derselben Seite von $0°0'$, oder auf entgegengesetzten Seiten des Nullpunkts des Limbus befinden; denn hiervon hängt es ab, ob die Werthe von s und c positiv oder negativ sind. Man kann den Fadenabstand noch besser folgendermassen bestimmen; man bringt zuerst das directe Bild des erwähnten Gegenstands auf einen Faden, und zugleich das doppelt reflectirte Bild desselben Gegenstands auf den andern Faden; die abgelesene Angabe des Nonius heisse $s_{,}$, negativ genommen, wenn sie auf den Excedens (rechts von $0°$ des Limbus) fällt. Dann vertauscht man die Bilder, und bringt das directe Bild auf den Faden, wo früher das reflectirte war, und das reflectirte, wo sich früher das directe befand. Die jetzt abgelesene Angabe des Nonius sei $s_{,,}$. Wenn alsdann das beobachtete irdische Object sehr entfernt ist, so wird der Fadenabstand sehr nahezu $= \frac{1}{2}(s_{,} - s_{,,})$ sein.

Die Neigung der Absehenslinie des Fernrohrs gegen die Ebene des Sextanten kann man mit Hülfe zweier Diopter finden, welche wir schon erwähnt haben, als wir auf S. 721 von der Stellung des Fernrohrs sprachen; dreht man darauf die Ocularröhre so, dass die darin sich befindenden Fäden mit der Ebene

des Sextanten parallel sind, und stellt die Diopter so auf, wie wir es auf S. 721 gezeigt haben, indem man einen entfernten terrestrischen Gegenstand durch die Diopter und durch das Fernrohr beobachtet; dann wird die Gesichtslinie, welche durch das Diopter geht, wegen ihrer gleichen Erhebung über der Ebene des Sextanten, mit dieser letzteren parallel sein, und wenn man bemerkt, dass das Bild des Gegenstands sich genau in der Mitte des Raumes zwischen den Fäden befindet, so ist $i = 0$; im entgegengesetzten Falle kann man nach dem Augenmasse bestimmen, wie weit entfernt das Bild des Gegenstandes von der erwähnten Mitte, im Vergleich zur Fädenentfernung, absteht; diese Entfernung in derselben Einheit, wie der Fädenabstand ausgedrückt, giebt uns i. Versetzt man die Diopter so, dass das vordere nach hinten und das hintere nach vorn kommt, und wiederholt die erwähnten Beobachtungen noch einmal, so wird man im Mittel auf die Neigung i schliesen können, unabhängig von den Fehlern der Diopter.

Man kann übrigens i auch ohne Diopter, wie folgt, bestimmen, jedoch weniger genau. Es sei das Fädenintervall $= m$; man stellt nun die Fäden mit der Ebene des Sextanten parallel, und misst einen sehr grossen Winkel, nahe an 120° oder 130°, welcher zwischen zwei irdischen Gegenständen enthalten ist; darauf beobachtet man die Coincidenz oder den Contact der Bilder dieser Gegenstände zuerst an dem einen Faden und nachher an dem andern, indem man dabei jedes Mal die Angaben des Nonius abliest; sucht man darauf den Indexfehler, so kann man die beiden erwähnten Ablesungen von diesem befreien, und wenn man dann annimmt, dass die aus der ersten Beobachtung erhaltene, schon corrigirte Ablesung $= s'$, die andere aber ebenfalls für Indexfehler verbesserte Ablesung $= s''$ ist, so erhält man, wenn die Neigung des Fernrohrs $= i$ ist, bei der ersten Beobachtung die Neigung der Gesichtslinie gegen die Sextantenebene $= i + \frac{m}{2}$, bei der zweiten aber diese Neigung

$i - \frac{m}{2}$, oder auch umgekehrt, und folglich haben wir nach dem, was auf S. 734 gezeigt wurde:

$$s' - s'' = \sin 1'' \left\{ \left(i + \frac{m}{2}\right)^2 tg \frac{s'}{2} - \left(i - \frac{m}{2}\right)^2 tg \frac{s''}{2} \right\}.$$

Wegen des geringen Unterschiedes zwischen s' und s'' kann man im zweiten Theile der Gleichung s' statt s'' setzen; alsdann wird:

$$s' - s'' = 2\, i . m . \sin 1'' . tg \frac{s'}{2};$$

und daher die gesuchte Neigung der optischen Achse des Fernrohrs

$$i = \frac{s' - s''}{2 \sin 1'' . m\, tg \tfrac{1}{2} s'}.$$

Der kleinere der gemessenen Winkel s' und s'' bezieht sich immer auf die Beobachtung desjenigen Fadens, welcher weniger als der andere gegen die Ebene des Sextanten geneigt ist. Hat man gefunden, dass das Fernrohr eine Neigung hat, so wird man am besten thun, die Neigung wegzuschaffen durch eine Drehung des Ringes, in welchem das Sextantenfernrohr eingeschraubt ist, um die beiden Spitzen. Ist aber keine Vorrichtung zur Correction der Neigung vorhanden, so muss man sich die Stelle im Gesichtsfelde, wo man beobachten muss, durch einen neuen Faden, oder durch Schätzung gegen den Abstand der vorhandenen Fäden bemerken.

Bei der Aufstellung des grossen Spiegels in die senkrechte Lage auf die Ebene des Sextanten, nach der auf S. 717 angegebenen Methode, ist es kaum möglich, einen grösseren Fehler als 3 bis 4 Minuten zu begehen; nimmt man nun an, dass der kleine Spiegel diesem vollkommen parallel gestellt worden ist (S. 720), so dass also seine Neigung gegen die Sextantenebene genau der des grossen Spiegels gleich ist, so findet man aus der Formel (D) S. 738, dass sogar für einen Winkel von 140° bei $l = 3'$ oder $4'$ dieser Fehler ungefähr 0'',3 ist; bei allen

anderen Winkeln wird er noch kleiner werden, und verschwindet meistentheils beinahe gänzlich.

Wir haben gesehen, auf welche Weise man den kleinen Spiegel aufstellt, und ebenso haben wir auf S. 739 gesehen, dass die Ungenauigkeit seiner Aufstellung wenig Einfluss hat und nur bei sehr kleinen Winkeln in Betracht kömmt. Misst man daher mit Hülfe eines Sextanten den scheinbaren Durchmesser der Sonne und vergleicht den so gefundenen mit seinem genau bekannten Werthe, so kann man aus dem Unterschiede beider auf die Neigung des kleinen Spiegels zurückschliessen.

Um die Fehler nach den auf S. 738 angegebenen Formeln berechnen zu können, muss man den Winkel β messen, welcher von der Senkrechten auf den kleinen Spiegel und der optischen Achse des Fernrohrs gebildet wird. Hierzu giebt es nun eine sehr bequeme Methode von Gauss. Indem man nun wieder auf (Fig. 21) S. 710 zurückkehrt, wird man bemerken, dass der grosse Spiegel KCN einen auf ihn einfallenden Lichtstrahl beständig nach derselben Richtung Cm zurückwirft, welche also mit der Senkrechten auf den kleinen Spiegel rms einen constanten Winkel β bildet, wobei wir die Richtung der Linie von m nach C nach der Seite von O zählen wollen. Der Strahl mO, vom kleinen Spiegel ab reflectirt, geht alsdann in die Mitte des Gesichtsfeldes des Fernrohrs O, und bildet mit dem erwähnten Perpendikel ebenfalls ganz denselben Winkel β, jedoch auf der entgegengesetzten Seite dieses Perpendikels; folglich wird der Winkel $CmO = 2\beta = D'Cm$, weil die Linie $D'C$ mit mO parallel ist. Wenn man darauf die Alhidade so bewegt, dass der grosse Spiegel sich auf die Linie Cm stellt, so wird der Strahl eines entfernten Gegenstandes k, welcher in der Verlängerung von Cm liegt, auf den kleinen Spiegel fallen, ohne vom grossen Spiegel reflectirt zu werden, und alsdann von dem kleinen Spiegel in das Fernrohr zurückgeworfen werden; folglich wird der Winkel $D'Ck = 180^\circ - D'Cm = 180^\circ - 2\beta$ und mithin der äusserste Grenzwinkel werden, den man überhaupt

noch mit dem Sextanten messen kann. Man muss indessen dabei bemerken, dass die Dicke des grossen Spiegels und seine Fassung allemal den erwähnten Strahl verhindern wird, den kleinen Spiegel zu erreichen; es wird also in diesen kleinen Spiegel ein Lichtstrahl von einem Gegenstande einfallen, welcher etwas zur Linken von k abliegt; dieser Strahl wird daher gegen den kleinen Spiegel weniger geneigt sein, und folglich mit dem Perpendikel auf diesen einen gewissen Winkel $\beta + n$ bilden, welcher grösser als β ist. Der Strahl wird dann vom kleinen Spiegel aus reflectirt, und in das Fernrohr eintreten, wobei er auf der linken Seite des Gesichtsfeldes ein Bild hervorbringt, welches von der Mitte des Gesichtsfeldes um den Winkel n abstehen wird, den man nach dem Augenmass schätzen kann, indem man ihn mit dem bekannten Intervalle der Fäden vergleicht. Misst man den Winkel zwischen dem vom Gegenstande auf den kleinen Spiegel einfallenden und dem von ihm reflectirten, ins Fernrohr einfallenden Strahle, so wird dieser $= 2\beta + 2n$ werden; diesen Werth wird er haben, wenn man ihn vom kleinen Spiegel aus nach dem Gegenstande und nach dem Fernrohre zählte; zählt man dagegen die Richtung des einfallenden Strahls vom Gegenstande aus bis zu der Richtung des in das Fernrohr eintretenden, wie man gewöhnlich bei Winkelmessungen zählt, so wird der Winkel $= 180° - 2\beta - 2n$ werden. Man kann nun noch den grossen Spiegel durch eine kleine Bewegung der Alhidade ein wenig von der Lage CmP (Fig. 21) nach A zurückdrehen, und dieses wird den Lichtstrahl vom Gegenstande, der sich links von k befindet, nicht verhindern, den kleinen Spiegel zu erreichen; aber alsdann wird mit diesem Strahle parallel noch ein zweiter Strahl vom grossen Spiegel aus reflectirt werden, welcher von einem Gegenstande ausgeht, der mehr noch als derjenige Gegenstand zur Linken von k liegt, dessen Lichtstrahlen direct auf den kleinen Spiegel fallen. Auf diese Weise kann man nun die Berührung der Bilder beider Gegenstände auf der linken Seite des Gesichtsfeldes beobachten, von denen der eine einmal, der andere

aber zweimal reflectirt wird; der Winkel, welcher aber zwischen diesen Gegenständen enthalten ist, wird dem Unterschiede zwischen $180°-2\beta-2n$ und $s-c$ gleich werden, wo s die Ablesung ist, welche unmittelbar auf dem Nonius bei der Berührung der beiden Bilder beobachtet wurde, und c der Indexfehler ist, so dass also $s-c$ die Ablesung bezeichnet, welche vom wahren Nullpunkte des Sextantenlimbus ab gezählt wurde. Daher muss man endlich, um β finden zu können, auf die gewöhnliche Weise den Winkel zwischen den beiden erwähnten Gegenständen messen; und es sei dieser Winkel $= s'-c$, wo s' die unmittelbare Noniusangabe bei der Messung dieses Winkels bedeutet; folglich wird dann:

$$s'-c = 180°-2\beta-2n-(s-c);$$

oder

$$\beta = 90°-n-\tfrac{1}{2}(s+s'-2c).$$

Bei dieser Beobachtung muss man den Sextanten beinahe horizontal auf ein Stativ aufstellen; die zu dieser Bestimmung passenden Gegenstände werden sich irgendwo am Horizonte befinden. Ausserdem ist es auch gut, hinter dem kleinen Spiegel ein Blendglas oder irgend etwas anderes aufzustellen, damit das fremde Licht, welches durch den durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels eindringt, sich nicht mit den matten Strahlen des einfach und des doppelt reflectirten Bildes der beobachteten Gegenstände vermischt.

Herr Knorre hat zur Bestimmung von β folgendes Verfahren vorgeschlagen. Man nimmt den grossen Spiegel ganz ab; hat das Fernrohr nur zwei Parallelfäden, so stellt man dieselben nach dem Augenmasse gegen die Ebene des Sextanten senkrecht, richtet das Fernrohr bei horizontaler Lage des Instruments auf einen Gegenstand D (Fig. 21), so dass dieser genau in der Mitte zwischen den Fäden erscheint, und bemerkt den Punkt des Horizontes k, der durch den Reflex des kleinen Spiegels mit D zusammenfällt. Findet sich dort kein leicht zu beob-

achtender Gegenstand, so kann man einen solchen durch einen Gehülfen aufstellen lassen. Man wählt alsdann einen, etwa in der Mitte zwischen D und k liegenden Gegenstand E, und misst die Winkel zwischen D und E und zwischen E und k. Die halbe Summe dieser Winkel ist das Complement von β. Will man sehr genau verfahren, so sind die Winkel auf den Punkt m (Mitte des kleinen Spiegels) zu reduciren, darauf der Versuch, nachdem man das Ocular um 180° gedreht hat, nochmals zu wiederholen, und aus den beiden für β erhaltenen Werthen das Mittel zu nehmen.

Von dem Fehler, welcher von der prismatischen Gestalt des grossen Spiegels herrührt.

13. Wir wollen zuerst annehmen, dass dieser Spiegel von parallelen Ebenen begrenzt sei, und uns eine Ebene denken, welche durch den Strahl JP, der vom Punkte J (Fig. 28) auf den Spiegel fällt und durch die Senkrechte RPQ auf dem Spiegel geht; diese Ebene wird alsdann die erste und zweite (oder belegte) Seite des Spiegels in den parallelen Linien BA und ba schneiden; beim Eintritte des Strahls JP aus der Luft in das Glas, wird er gebrochen und nimmt die Richtung PD an, welche mit der Senkrechten RPQ einen Winkel QPD bildet, der kleiner als der Winkel JPR ist den der einfallende Strahl mit eben demselben Perpendikel macht. Der gebrochene Strahl PD erreicht darauf in D die belegte Fläche des Spiegels ab und wird von dieser unter dem Winkel $LDM = PDQ$ zurückgeworfen, gelangt darauf zur ersten oder durchsichtigen Fläche des Spiegels BA, im Punkte L, und tritt nun endlich wieder in die Luft aus dem Glase heraus, wobei er wiederum

gebrochen wird und die Richtung der Linie *LS* annimmt, welche mit dem Perpendikel *MLN* einen grösseren Winkel *NLS* bildet, als der Winkel *DLM* ist. Aus der Gleichheit der Winkel *QPD* und *DLM* folgt nach einem bekannten Gesetze der Brechung, dass die Winkel *JPR* und *NLS* ebenfalls einander gleich sein müssen*), und daher wird der Strahl *LS* unter eben derselben Neigung gegen den Spiegel austreten, als wenn gar keine Brechung stattgefunden hätte; der ganze Unterschied besteht nur darin, dass der Strahl nicht von *D*, sondern so gut wie von *C* aus zurückgeworfen wird, und nicht von der Linie *ab* aus, sondern von der Linie *nCn*, welche zwischen *AB* und *ab* parallel mit dieser Linie läuft. Man muss ferner bemerken, dass nicht alle Strahlen, welche von irgend einem Gegenstande auf *AB* einfallen, aus der Luft in das Glas eindringen; denn einige von ihnen (übrigens noch viele) werden von der Fläche *AB* zurückgeworfen und bringen dann ein schwaches Bild des Gegenstandes hervor; ein anderes, weit stärkeres Bild rührt von der Reflexion auf der belegten Fläche *ab* des Spiegels her; wenn nun der Gegenstand sehr weit entfernt ist, so werden seine Strahlen unter sehr nahezu parallelen Richtungen auf den Spiegel fallen; die beiden Bilder fallen dann zusammen und die Beobachtungen können auf keine Weise beeinträchtigt werden.

Aber ganz das Gegentheil wird in demjenigen Falle stattfinden, wenn der Spiegel eine prismatische Gestalt hat; d. h. wenn die erste und zweite Ebene des Spiegels sich unter irgend einem Winkel schneiden; diese Durchschnittslinie heisst die Kante des Prismas und kann gegen den Sextanten sehr ver-

---

*) Man hat $\sin NLS = \mu . \sin DLM$ und $\sin JPR = \mu . \sin DPQ$, wo μ den Brechungscoefficienten beim Durchgange des Lichts aus der Luft ins Glas bezeichnet. Nun ist der Winkel *DLM* dem Winkel *DPQ* gleich, weil die Linien *NM* und *RQ* parallel sind; folglich ist der Winkel *NLS* dem Winkel *JPR* gleich.

schiedene Lagen haben. Wir wollen nun annehmen, dass aAB (Fig. 29) eine Ebene darstellt, welche senkrecht auf der Kante des Prismas steht und durch den Strahl JP gelegt ist, der im Punkte P auf die obere Fläche des Spiegels AB einfällt; dieser Strahl wird bei seinem Eintritte aus der Luft ins Glas im Punkte P gebrochen werden, und nimmt man nun an, dass die Linie RPQ auf der Ebene AB senkrecht steht; so wird dieser Strahl nach der Brechung näher an dieses Perpendikel kommen, alsdann nach D gelangen und hier reflectirt werden unter dem Winkel $PDQ = LDM$; nun erreicht der Strahl wiederum die erste Fläche im Punkte L, und tritt aus dem Glase in die Luft unter der gebrochenen Richtung LS, welche mit dem Einfallsperpendikel NLM auf der Fläche AB den Winkel SLN bildet, welcher grösser als DLM ist. Hieraus folgt, dass bei der prismatischen Gestalt des Glasspiegels, der Lichtstrahl aus dem Spiegel an seinem breiten Theile aB näher an der Fläche AB austritt, als in demjenigen Falle, wenn beide Flächen des Spiegels einander parallel sind*).

---

*) Bezeichnet man nämlich das constante Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels beim Eintritte des Lichtstrahls aus Luft in Glas durch μ, und nimmt an, dass der Winkel des Prismas $BAa = A$ und der Winkel $PDQ = LDM = D$ (Fig. 29), so erhält man nach einem bekannten Gesetze der Brechung:

$$\sin SLN = \mu \sin DLM; \text{ aber } DLM + D = 90^\circ + A;$$
$$\sin RPJ = \mu \sin QPD; \qquad QPD + D = 90^\circ - A;$$

folglich:

$$QPD = DLM - 2A.$$

Der Unterschied $SLN - RPJ = x$ lässt sich leicht berechnen, wenn A ein sehr kleiner Winkel ist; dann ist x ebenfalls ein kleiner Winkel, und daher kann man in diesem Falle ohne merklichen Fehler annehmen, dass: $\sin A = A \sin 1''$ und $\sin SLN - \sin RPJ = x \sin 1'' \cos \frac{1}{2}(SLN + RPJ)$, oder sehr nahe $x \sin 1'' \cos SLN = \mu(\sin DLM - \sin QPD) = \mu \sin DLM - \mu \sin(DLM - 2A)$ oder $\frac{1}{2} x \cos SLN = \mu . A \sqrt{1 - \frac{\sin^2 SLN}{\mu\mu}}$. Aber

Offenbar muss die ganze Wirkung der Strahlenbrechung in der Ebene ABa, welche senkrecht auf der Kante des Prismas steht, geschehen, und wenn daher diese Kante mit der Ebene des Sextanten parallel ist, so wird der Lichtstrahl, welcher aus dem prismatischen Spiegel austritt, gegen die Ebene des Sextanten geneigt sein, so dass er sich um etwas erhebend, oder zu jener Ebene niedersinkend, laufen wird, jedoch wird dieses auf den gemessenen Winkel wenig Einfluss haben. Wenn aber die Kante des Prismas senkrecht auf der Sextantenebene steht, so wird ein Strahl, welcher aus dem Prisma austritt, in der Ebene des Sextanten selbst liegen, aber in dieser seitlich von der Richtung abweichen, welche er haben würde, wenn der Spiegel nicht prismatisch wäre; diese Abweichung wird unmittelbar einen entsprechenden Fehler auf den gemessenen Winkel zur Folge haben. Bei anderen Lagen der Kante muss etwas, was zwischen den erklärten beiden Fällen liegt, geschehen. Der Fehler ist in solchen Fällen demjenigen zu vergleichen, welcher stattfinden würde, wenn der Spiegel zwar ganz gut wäre, aber unabhängig von der Bewegung der Alhidade noch eine schlotternde oder eine besondere Bewegung hätte, welche sich zusammen mit dem beobachteten Winkel änderte. Ausserdem wird noch bei einer prismatischen Gestalt des grossen Spiegels das matte Bild, welches von den vor der vorderen Fläche des grossen Spiegels zu-

---

aus Versuchen hat man den Brechungsindex aus Luft in Glas $\mu = \frac{3}{2}$ gefunden; folglich ist

$$\frac{1}{2}x = \frac{3}{2} A \sec SLN \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 SLN}.$$

Also ist x mit dem Winkel SLN veränderlich.

Es sei F der Punkt, in welchem der einfallende Strahl JP und der austretende Strahl LS sich durchschneiden; ziehen wir die Perpendikel HLG, EFT und KPO zur belegten Ebene AMa des Spiegels, so ist der Unterschied der Winkel $SLK - KPJ = SLN + a - (RPJ - a) = x + 2a$ der Einfluss der prismatischen Gestalt des Spiegels; und da $2a$ constant ist und durch die Anbringung des Indexfehlers eliminirt wird, so bezeichnet x allein den Einfluss.

rückgeworfenen Strahlen gebildet wird, niemals mit dem viel helleren zusammenfallen können, welches von der Reflexion des Lichts an der belegten Fläche des Spiegels abhängt; es werden also diese beiden Bilder ineinandergreifen und zusammen ein undeutliches Bild hervorbringen, wodurch die Genauigkeit der Beobachtungen beeinträchtigt werden muss.

Die Strahlen, welche von dem grossen Spiegel zurückgeworfen werden, fallen immer unter demselben Winkel auf den kleinen Spiegel ein, und daher wird der Fehler, welcher von der prismatischen Gestalt des kleinen Spiegels herrührt, auf alle beobachteten Winkel und auch auf den Indexfehler einen constanten Einfluss haben; da man aber nun die Winkel dadurch bestimmt, dass man von der unmittelbar erhaltenen Noniusablesung auf dem Sextantenlimbus den Indexfehler abzieht, so wird der Fehler, welcher von der prismatischen Gestalt des kleinen Spiegels herrührt, keinen Einfluss auf den abgeleiteten wahren Winkel haben. Die prismatische Gestalt des kleinen Spiegels schadet insofern dadurch, dass alsdann zwei Bilder des beobachteten Gegenstands durch Reflexion entstehen werden, und also auch wegen verzerrter Bilder des Gegenstands die Genauigkeit der Beobachtungen leiden muss.

Aus dem Vorhergehenden wird es nun leicht sein, die Regeln aufzustellen, aus welchen man beurtheilen kann, ob der grosse Spiegel prismatisch gestaltet ist. Wenn er nämlich von vollkommen parallelen Ebenen begrenzt ist, so wird man, wenn man ihn gegen die Sonne oder den Mond richtet, nur ein einziges Bild sehen; sollte er aber prismatisch geformt sein, so werden zwei Bilder erscheinen, oder sogar noch mehrere, welche von den inneren und äusseren Reflexionen herrühren. Je schräger die Strahlen auf den Spiegel fallen, um so weiter werden diese Bilder von einander sein. Mit Hülfe des Fernrohrs kann man diesen Versuch noch weit genauer anstellen.

Das zuverlässigste Mittel, den Fehler in den gemessenen Winkeln zu bestimmen, welcher von der prismatischen Gestalt

des grossen Spiegels herrührt, besteht in Folgendem. Man berichtigt den Sextanten so genau wie möglich, misst mehrere Winkel, und nachdem man den grossen Spiegel aus seinem Rahmen herausgenommen hat, setzt man ihn wieder auf umgekehrte Weise ein, d. h. so, dass der frühere obere Rand des Spiegels jetzt zu unterst liegt. Hierauf stellt man von neuem den grossen Spiegel senkrecht auf die Ebene des Sextanten, und beobachtet noch einmal alle früheren Winkel; findet man nun einen Unterschied zwischen den ersteren und letzteren Bestimmungen, so kann man diesen Unterschied halbiren, und erhält dadurch die Correction für jeden beobachteten Winkel; vermittelst einer passenden Interpolation kann man hierauf diese Correction für die anderen Winkel genähert finden.

Allgemeine Vorschriften zur Messung von Winkeln mittelst des Sextanten.

14. Bei diesen Messungen kann man den Sextanten entweder in der Hand halten, oder ihn auch auf ein Stativ befestigen; meistens ist ersteres bequemer als letzteres; wenn jedoch das Stativ gut ist, und der Sextant auf ihm in allen Lagen unbeweglich bleibt, so kann man ein solches Stativ mit Vortheil gebrauchen, besonders wenn sehr genaue Messungen verlangt werden.

Zuerst wird das Ocular auf den Focus eingestellt, und die Ocularröhre so gedreht, dass die beiden in ihr aufgespannten Fäden mit der Ebene des Sextanten parallel sind; darauf richtet man das Instrument so, dass die beiden Gegenstände, zwischen denen man den Winkel messen will, genau in die Ebene des Sextanten kommen. Beobachtet man mit der Hand, ohne Stativ,

so hält man gewöhnlich den Sextanten mit der rechten Hand und bewegt die Alhidade mit der linken. Wenn der zu messende Winkel genähert bekannt ist, so bringt man den Nonius auf diejenige Stelle der Theilung, welche diesem Winkel entspricht, und beobachtet darauf die genaue Coincidenz der Bilder beider Gegenstände, oder die Berührung ihrer Ränder. Wenn aber der zu messende Winkel unbekannt ist, so stellt man die Alhidade auf den Nullpunkt des Limbus, indem man das Fernrohr auf den rechts liegenden Gegenstand richtet, und erblickt dadurch zwei Bilder dieses Gegenstandes, ein directes und ein doppelt reflectirtes; bewegt man nun die Alhidade nach links, so kann man durch eine passende Bewegung des ganzen Instruments nach der Linken das gespiegelte Bild des nach rechts liegenden Gegenstands immer im Gesichtsfelde des Fernrohrs behalten. Setzt man diese Bewegung der Alhidade immer weiter fort, indem man das Bild des nach rechts liegenden Gegenstandes immer festhält, und indem man darauf achtet, dass zugleich der links liegende Gegenstand in der Ebene des Sextanten bleibt, so wird endlich das directe Bild des nach links liegenden Gegenstandes selbst durch den durchsichtigen Theil des kleinen Spiegels ins Fernrohr fallen und dadurch dem Beobachter im Gesichtsfelde erscheinen. Bringt man darauf beide Bilder nahe aneinander und zieht die Druckschraube an, so kann man mit der Mikrometerschraube beide genau in Berührung bringen und alsdann die entsprechende Noniusangabe auf dem Sextantenlimbus in Graden, Minuten und Secunden ablesen *). Dieses Zusammenfallen der Bilder, oder ihre Berührung selbst, muss man in der Mitte des Raumes beobachten, der im Gesichtsfelde des Fernrohrs

*) Für solche Beobachter, welche noch keine Uebung im Beobachten mit dem Sextanten haben, wird es bequemer sein, das Fernrohr erst aus seiner Ringfassung herauszuschrauben, und alsdann durch die Ringöffnung, in der das Fernrohr sich befand, die Bilder beider Gegenstände zur Deckung zu bringen; setzt man alsdann das Fernrohr wieder an seine Stelle, so kann man die Beobachtung so beendigen, wie wir oben angegeben haben.

zwischen den beiden Fäden enthalten ist, die der Ebene des Sextanten parallel sind; denn sonst würde man einen Fehler begehen, wegen der Neigung der Visirlinie gegen die Ebene des Sextanten.

Auf ganz ähnliche Weise beobachtet man mit dem Sextanten, wenn man ein Stativ benutzt. Wenn einer von den beobachteten Gegenständen die Sonne ist, so kann man den Schatten des Instruments dazu benutzen, um den Sextanten richtig zu stellen; wenn nämlich die Sonne in der Ebene des Instruments liegen soll, so wird man den Sextanten so stellen müssen, dass der Schatten des Sextantenbogens sich als gerade Linie darstellt.

Man kann auch noch die Art zu beobachten umkehren, indem man den oberen Theil des Sextanten, auf welchem sich die Gradtheilung und das Fernrohr befindet, nach untenzu kehrt, aber alsdann wird der direct gesehene Gegenstand rechts ab vom anderen beobachteten Gegenstande liegen; diese Art zu beobachten ist weniger bequem, als die andere.

Wenn die scheinbare Grösse der zu beobachtenden Gegenstände bedeutend ist, so muss man, anstatt der Deckung beider Bilder dieser Gegenstände, die gegenseitige Berührung sowohl ihrer nächsten als entferntesten Ränder beobachten und daraus den Winkel zwischen den Mittelpunkten beider Bilder herleiten. Bei der Messung einer Distanz zwischen Mond und Sonne bestimmt man immer den Winkel zwischen ihren nächsten Rändern, weil der entgegengesetzte Rand des Mondes gewöhnlich nicht zu sehen ist.

Man muss sorgfältig darauf achten, dass beide Bilder einerlei Lichtstärke haben; sollte sich der direct gesehene Gegenstand heller als der andere zeigen, so bringt man das Fernrohr ein wenig herunter mit Hülfe der Schraube, welche sich unter dem Träger des Fernrohrs befindet; wenn dagegen das gespiegelte Bild mehr Lichtstärke als das directe hat, so muss man das Fernrohr ein wenig höher schrauben; denn in beiden Fällen

bleibt das Fernrohr mit der Ebene des Sextanten parallel. Nach dem Ende der Beobachtungen oder auch vor ihrem Anfange muss man den Indexfehler ermitteln; wie wir schon auf S. 722—725 näher erläutert haben.

Von der Messung horizontaler Winkel zwischen terrestrischen Gegenständen.

15. Solche Winkel werden zur Bildung eines trigonometrischen Dreiecknetzes, sowie auch zur Land- oder Küstenaufnahme u. s. w. bestimmt; aber mit Hülfe eines Sextanten misst man diese Winkel nicht in der Ebene des Horizonts, sondern in derjenigen Ebene, welche durch das Centrum des Instruments und durch beide zu beobachtende Gegenstände durchgeht und welche also gegen den Horizont geneigt sein kann; man muss also alle gemessenen Winkel erst auf den Horizont reduciren, wie wir auf S. 726 gezeigt haben. Hierzu muss man aber die Höhen der Gegenstände wissen; sind diese nun sehr klein, wie es gewöhnlich bei den Höhen irdischer Gegenstände stattfindet, so kann man sie nicht durch den Sextanten beobachten, sondern sie müssen mit Hülfe eines anderen Instruments bestimmt werden; es ist genügend, die Höhen nur genähert zu wissen, und um dieses zu erreichen, giebt es viele Methoden (siehe: Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung von Bohnenberger).

Von der Messung der Höhe eines Gestirns.

16. Bei diesen Höhenmessungen verfährt man auf verschiedene Weisen, je nachdem sich der Beobachter auf dem Festlande oder auf dem Meere befindet. Auf dem Festlande bedient man sich dazu eines künstlichen Horizonts, der meistens aus einem hölzernen oder metallenen Kasten besteht, welcher ungefähr 6 Zoll lang, 3 Zoll breit und 1/2 Zoll tief ist; in diesen giesst man reines Quecksilber; dessen Oberfläche nimmt von selbst eine horizontale Lage an und bildet einen Spiegel. Damit das Quecksilber nicht vom Winde bewegt wird, bedeckt man den Kasten mit einem besonderen Dache, welches aus zwei Platten von Glimmer oder auch aus gewöhnlichem Glase besteht, die in besondere Rahmen eingefasst sind. In dem letzteren Falle müssen die beiden Flächen eines jeden Glases genau eben und untereinander parallel sein, damit die Strahlen durch die Brechung im Glase keine Abweichung von der frühern Richtung bekommen. Das Dach ist ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundflächen rechtwinklige Dreiecke sind. Das Gefäss mit Quecksilber muss so gestellt sein, dass dessen längere Seite nach dem Augenmasse in die Verticalebene gebracht wird, in welcher man beobachten will, was bei den Sonnenbeobachtungen durch den Schatten des Gefässes angezeigt wird. Das Dach wird über das Gefäss so gesetzt, dass der rechte Winkel gegen den Scheitelpunkt gekehrt ist, die beiden Grundflächen aber mit der erwähnten Verticalebene parallel sind.

Darauf wird sich nun das Gestirn in dem Quecksilber spiegeln, und ein Lichtstrahl, welcher vom Gestirne auf diesen Quecksilberspiegel einfällt, wird mit dessen Ebene einen Winkel bilden, der gleich der Höhe des Gestirns über dem Horizonte sein muss; da aber der einfallende Strahl mit dem aus dem Spiegel ausfallenden in derselben Verticalebene sein muss, und der Einfallwinkel dem Ausfallwinkel gleich ist, so wird der

ausfallende Strahl mit der Spiegelebene ebenfalls einen Winkel bilden, der gleich der Höhe des Gestirns über dem Horizonte ist, aber an der entgegengesetzten Seite, so dass also der Beobachter das Bild des Gestirns im Quecksilber um ebensoviel unter dem Horizonte sehen wird, als es wirklich darüber liegt. Hieraus ist es klar, dass, wenn man den Winkel misst, der zwischen dem Bilde des Gestirns im Quecksilberhorizonte und dem Gestirne selbst eingeschlossen ist, man dadurch die doppelte Höhe des Gestirns über dem Horizonte findet. Misst man nun diesen Winkel durch einen Sextanten, so muss man das gespiegelte Bild des Gestirns im künstlichen Horizonte direct durch den durchsichtigen Theil des kleinen Sextantenspiegels beobachten, das durch beide Sextantenspiegel doppelt reflectirte Bild des Gestirns aber mit diesem in Coincidenz oder in Berührung bringen. Das Bild des Gestirns im künstlichen Horizonte muss man so nahe wie möglich in der Mitte des Quecksilbers beobachten; denn gegen die Mitte zu wird dieses wirklich einen Planspiegel bilden, an den Rändern aber wegen Capillarität eine convexe Gestalt annehmen und dadurch verzerrte Bilder geben.

Wenn man die Sonne beobachtet, so muss man statt der vollständigen Deckung beider Sonnenbilder, welche nicht mit Genauigkeit wahrgenommen werden kann, die oberen oder unteren Ränder der Bilder in Berührung bringen, so dass man also dann die Höhe des Ober- oder Unterrandes der Sonne beobachtet. Zieht man darauf den Sonnenhalbmesser von der Höhe des Oberrandes ab, oder legt ihn zur Höhe des Unterrandes hinzu, so erhält man die Höhe des Sonnencentrums; um aber die Beobachtungen unabhängig von der Genauigkeit des sogenannten Halbmessers reduciren zu können, so misst man gewöhnlich sowohl die Höhe des Unterrandes als auch die des Oberrandes und nimmt dann das arithmetische Mittel aus beiden Messungen, wodurch man dann ebenfalls die Höhe des Sonnencentrums findet. Bei der Beobachtung des Mondes misst man immer die Höhe

seines sichtbaren Randes, welcher je nach den Umständen zuweilen der obere, zuweilen aber auch der untere sein wird.

Wenn die Höhe eines Gestirns 70° übersteigt, so kann sie mit Hülfe des Sextanten und eines künstlichen Horizontes nicht mehr gemessen werden. Auf dem Meere misst man überhaupt keine Höhen, die nahe an 90° sind.

Wenn die Glasplatten des Daches eine prismatische Gestalt haben, so wird die Richtung des Strahls, welcher durch sie hindurchgeht, geändert und dadurch in der Höhenbestimmung ein mehr oder weniger merklicher Fehler stattfinden. Es ist jedoch leicht, sich vom Einflusse dieses Fehlers frei zu machen; denn hat man einige Beobachtungen in einer Lage des Daches angestellt, so braucht man dieses darauf nur umzustellen, so dass die Seite, welche vorher nach vorn gewendet war, jetzt nach hinten gewendet wird, und dann stellt man wiederum eben so viele Beobachtungen bei dieser entgegengesetzten Lage des Daches an; das Mittel, welches aus allen diesen Beobachtungen hergeleitet wird, wird von der prismatischen Gestalt der Dachgläser unabhängig sein. Um die beiden Seiten des Daches zu unterscheiden, macht man auf ihren entgegengesetzten Seiten beliebige Bezeichnungen, z. B. auf der einen Seite wird A, und auf der anderen Seite B eingeschrieben.

Anstatt des Quecksilbers kann man zur Bildung eines künstlichen Horizonts Baumöl oder anderes Oel brauchen; alsdann macht man den Kasten aus Blech und streicht ihn mit schwarzer Farbe an; dieser Horizont wird insofern bequemer als ein Quecksilberhorizont sein, als bei ihm die Flüssigkeit nicht so leicht in eine wellenförmige Bewegung geräth; doch wird auf der Quecksilberfläche das Licht am stärksten gespiegelt und daher das Bild am glänzendsten sein; bei Sonnenbeobachtungen hat dieses keinen Nachtheil, weil das Sonnenlicht ohnedem sehr geschwächt werden muss; bei der Beobachtung von Sternhöhen dagegen ist der Unterschied sehr merklich. Zuweilen benutzt man auch ebenso einen gläsernen Horizont; er besteht aus einer

polirten und sehr genau ebenen Glasplatte, welche auf ihrer unteren Fläche matt geschliffen ist; diese Platte stellt man horizontal auf, durch ein empfindliches Niveau, welches mit Füsschen von Elfenbein versehen ist, die man auf die gläserne Platte setzt. Diese letztere ruht nun auf drei Schrauben, die in eine Marmorplatte oder in eine andere ähnliche Unterlage eingelassen sind; ist das Niveau berichtigt, so setzt man das Niveau auf der Glasplatte erst nach der Richtung der zwei Fussschrauben der Platte und bringt durch Drehen der Schrauben das Niveau zum Einspielen; darauf setzt man das Niveau senkrecht zu seiner ersten Richtung, und bringt es wieder zum Einspielen, so wird man dadurch die gläserne Platte horizontal aufstellen können.

Beispiel. Bei 30,0 englische Zoll Barometerhöhe und bei + 17°,0 Réaumur am äusseren Luftthermometer, wurde die doppelte Höhe des Sonnenunterrandes mit Hülfe eines Sextanten und künstlichen Horizontes = 98° 40′ 50″ unmittelbar auf dem Nonius gefunden; der Indexfehler war + 5′ 8″, wo (+) deswegen gebraucht wird, weil der wahre Nullpunkt der Theilung sich zur Rechten von 0° 0′ auf dem Sextantenbogen befand; der Radius und die Horizontalparallaxe der Sonne wurden für den Beobachtungstag aus den astronomischen Ephemeriden entnommen. Es war nun:

Limbusablesung	=	98° 40′ 50″
Indexfehler.	=	+ 5 8
Scheinbare doppelte Höhe des ⊙Unterrandes .	=	98° 45′ 58″
Scheinbare Höhe des Sonnenunterrandes . .	=	49 22 59
Zugehörige Höhenparallaxe	=	+ 0 5
Zugehörige Strahlenbrechung.	=	— 0 48
Sonnenhalbmesser	=	+ 15 46
Wahre Höhe des Sonnencentrums	=	49° 38′ 2″

Zur Bestimmung der Höhe der Sonne über dem Meere misst man die Winkelentfernung des Ober- oder Unterrandes

der Sonne von demjenigen Punkte der Grenze des Meereshorizonts, der sich in einem Verticalkreise und zugleich am nächsten an der Sonne befindet; auf diese Weise erhält man die Höhe des beobachteten Sonnenrandes direct. Die Grenze des scheinbaren Horizontes auf dem Meere stellt sich als ein Kreis dar, in welchem der Himmel das Meer zu berühren scheint, und in dessen Centrum der Beobachter sich befindet.

Da der Beobachter sich aber gewöhnlich höher als der Meeresspiegel befindet, so wird die Gesichtslinie, welche vom Beobachter nach der Grenze des Meereshorizontes geht, vom Auge des Beobachters nach unten gerichtet sein und eine Tangente an die Erdoberfläche bilden; folglich muss diese Gesichtslinie überall unter der Horizontallinie liegen, welche durch das Auge des Beobachters geht, und zwischen diesen beiden Linien wird ein Winkel enthalten sein, den man die Kimmtiefe (*Dépression de l'horizon*) nennt. Es wird daher auf dem Meere die Höhe des Gegenstandes etwas zu gross gemessen; um aber die wirkliche Höhe zu finden, muss man von der gemessenen stets die Kimmtiefe abziehen; übrigens wird die wahre Erniedrigung des Horizonts etwas kleiner als der erwähnte Winkel sein, weil ein Lichtstrahl, der von der Grenze des Horizonts ausgeht, durch Luftschichten von verschiedener, mit Annäherung zum Erdboden zunehmender Dichtigkeit durchgehen muss und daher so gebrochen wird, dass diese Grenze des Horizonts höher erscheint, als sie wirklich ist, und zwar wird der richtige Ausdruck für die Kimmtiefe

$$\delta = \frac{0,92}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2h}{R}}$$

werden, wo durch δ die Kimmtiefe, durch h die Höhe des Beobachters über dem Meeresspiegel, in einem gewissen Masse ausgedrückt (z. B. englische Fuss), durch R der Halbmesser der Erde, in demselben Längenmasse wie h ausgedrückt, bezeichnet werden. Die Strahlenbrechung ändert sich jedoch so sehr durch

die Verschiedenheit in der Temperatur der Luft und des Meeres, dass die nach der vorhergehenden Formel berechnete Kimmtiefe zuweilen 2 bis 3 Minuten in Bogen fehlerhaft sein kann.

Zeitbestimmung mittelst des Sextanten.

17. Hierzu muss man Höhen weit ausserhalb des Meridians beobachten, und sie so berechnen, wie wir erwähnt haben in § 106, S. 282 ff. Will man die Zeit aus absoluten Höhenmessungen bestimmen und dabei nicht für einzelne Höhen besonders rechnen, so würde es ungenau sein, wenn man das arithmetische Mittel der Höhen als entsprechend dem Mittel aus den Beobachtungszeiten betrachten wollte. Man muss alsdann nach der Regel rechnen, welche weiter unten näher erklärt werden wird. Jedoch braucht man meistens hierzu die Methode der correspondirenden Sonnenhöhen, über welche wir schon in § 110, S. 296 gesprochen haben. Am besten ist es, die Beobachtungen in der Nähe des ersten Verticals anzustellen, wobei man aber gar zu kleine Höhen vermeiden muss; meistens fängt man die Beobachtungen etwa 3 Stunden, höchstens aber 2 Stunden vor dem Mittage an und bedient sich bei diesen Beobachtungen eines künstlichen Horizonts, indem man auf folgende Weise verfährt. Man stellt die Alhidade genau auf eine runde Zahl von Graden und Zehnern von Minuten, liest diese Angabe ab, und wartet den Augenblick ab, wenn der Oberrand der Sonne mit seinem entsprechenden im Quecksilber abgebildeten Rande im Gesichtsfelde des Fernrohrs in Berührung kommt; im Augenblicke, wo dieses stattfindet, schreibt man die Chronometerzeit auf; alsdann rückt man die Alhidade um 20′ genau auf dem Limbus

weiter und stellt eine ähnliche Beobachtung wie früher an; hat man auf diese Weise einige Höhen des Oberrandes beobachtet, so ist es gut, auf dieselbe Weise ebenso viele Höhen des Unterrandes ebenso zu beobachten. Nachmittags fängt man die Beobachtungen mit derselben Höhe und demselben Rande der Sonne an, mit welcher man die vormittägige Beobachtungsreihe beendigt hatte. Legt man darauf zu der genäherten Zeit des Chronometers im wahren Mittage die Zahl von Stunden und Minuten, welche seit den vormittägigen Beobachtungen und diesem Chronometermittage verflossen sind, hinzu, so erhält man nahezu die Chronometerzeiten, zu welchen der Sonnenrand dieselben Höhen wie des Vormittags haben wird, und nun stellt man die Beobachtungen ebenso wie die des Vormittags an, indem man die Alhidade jedesmal auf die frühere Anzahl von Graden und Minuten stellt und auch denselben Rand wie früher beobachtet.

Will man sehr genau beobachten, so muss man noch den vormittägigen und nachmittägen Stand des Barometers und Thermometers ablesen, um das Resultat vom Einflusse der Veränderung der Strahlenbrechung in der Zwischenzeit zu befreien. Wenn die Beobachtungen der correspondirenden Höhen mit einem künstlichen Horizonte angestellt werden, so muss man das Glasdach, mit welchem man ihn bedeckt, immer so stellen, dass eine und dieselbe Seite (z. B. die mit A bezeichnete) des Vormittags und Nachmittags dem Beobachter zugewendet ist; denn alsdann wird eine Unrichtigkeit der Glastafeln, welche in dem Dache befestigt sind, immer auf derselben Seite wirken und also die Gleichheit der correspondirenden Höhen nicht beeinträchtigen. Derselbe Zweck wird erreicht, wenn man die Höhen des Oberrandes der Sonne bei einer Lage des Daches und die Höhen des Unterrandes bei entgegengesetzter Lage des Daches beobachtet.

Beispiel. Zu Novotscherkask, dessen nördliche Breite $= 47°24'$ und östliche Länge von Greenwich $= 2^h 40^m 30^s$ ist, wurden am 20. September 1836 folgende correspondirende Sonnenhöhen beobachtet:

Ablesung am Sextanten oder unverbesserte doppelte Höhe:	Entsprechende Angabe des Chronometers, welches sehr nahe nach mittlerer Zeit ging:		Unverbesserter Mittag:
Oberrand	*Vormittags*	*Nachmittags*	
51° 0′	$19^h 49^m 16^s,0$	$2^h 48^m 58^s,5$	$23^h 19^m 7^s,25$
20	50 24 ,0	47 49 ,5	6 ,75
40	51 32 ,0	46 41 ,0	6 ,50
52 0	52 41 ,0	45 33 ,0	7 ,00
20	53 49 ,5	44 25 ,0	7 ,25
Unterrand			
52° 20′	$19^h 57^m 27^s,5$	$2^h 40^m 48^s,0$	$23^h 19^m 7^s,75$
40	58 36 ,0	39 39 ,0	7 ,50
53 0	59 46 ,0	38 30 ,0	8 ,00
20	20 0 55 ,5	37 21 ,0	8 ,25
40	2 3 ,0	36 10 ,0	6 ,50
		Mittel . .	$23^h 19^m 7^s,27.$

Aus dem Nautical Almanac für 1836 findet man am 20. September für den wahren Mittag in Novotscherkask die Declination der Sonne $= \delta = +1° 1'.7$, wo das Zeichen (+) hier gebraucht wird, weil die Declination nördlich war; vom 19. bis 21. September war die Abnahme der Declination $= 2802''$; folglich $\mu = -2802''$; die mittlere Zeit im wahren Mittage zu Novotscherkask war $= 23^h 53^m 20^s,38$. Das halbe Zeitintervall zwischen der Mitte der vormittägigen und nachmittägigen Beobachtungen war gleich $3^h 23^m 34^s = t$ und das Chronometer ging sehr nahe nach mittlerer Zeit, folglich braucht man keine Correction an t anzubringen. Berechnet man mit diesem Werthe von t die schon in § 110, S. 298 erklärten Werthe von A und B, oder entnimmt man sie auch aus Peters' Hülfstafeln, so findet man:

$lg\,A = 7,7834-10$	$lg\,B = 0,5832-10$	I. Theil der Correction
$lg\,tg\,\varphi = 0,0365$	$lo\,tg\,\delta = 8,2540$	$= +18^s,51$
$lg(-\mu) = 3,4475$	$lg(-\mu) = 3,4475$	II. Theil $= -\ 0,19$
$lg 18.51 = 1,2674$	$lg\,0.19 = 9,2847-10$	$I + II = +18^s,32$

Unverbesserter Mittag	=	$23^h 19^m 7^s,27$
Correction	=	$+18,32$
Wahrer Mittag nach dem Chronometer . .	=	$23^h 19^m 25^s,59$
Mittlere Zeit im wahren Novotscherk. Mittag	=	23 53 20,38
Chronometer zu spät gegen mittlere Zeit um		$0^h 33^m 54^s,79$

Wie der Chronometerfehler gegen die wahre Mitternacht bestimmt wird, ist bereits in § 110, S. 298 ff. auseinandergesetzt worden.

Bestimmung der Breite eines Ortes.

18. Die bequemste Methode, die Polhöhe durch den Sextanten zu bestimmen, besteht in der Beobachtung der Circummeridianhöhen der Sonne oder eines sehr hellen Sternes, wobei die Zeit der Beobachtung als bekannt vorausgesetzt wird. Wenn man die Sonne beobachtet, so ist es vortheilhaft, gleich viele Höhen, sowohl des Ober- als auch Unterrandes zu messen. Vor dem Anfange oder nach der Beendigung der Beobachtungen muss man den Indexfehler suchen, und ebenfalls den Stand des Barometers und die Temperatur der Luft aufschreiben. Gebraucht man einen künstlichen Horizont, so muss man darauf achten, dass man immer abwechselnd einige Höhen bei einer Lage des Daches, welches den künstlichen Horizont bedeckt, und dann wieder ebenso viele in der entgegengesetzten Lage des Daches messen muss.

Aus diesen Beobachtungen leitet man, wie wir es schon § 16, S. 758 gezeigt haben, die scheinbaren Höhen des Centrums des Gestirns her, und aus diesen letzteren berechnet man wiederum die Breite des Orts nach den in § 99, 100 und 101, S. 256—262 angegebenen Methoden.

Bestimmung der Breite eines Orts und der Zeit der Beobachtung mit Hülfe zweier verschiedenen ausserhalb des Meridians gemessenen Höhen.

19. Beobachtet man des Nachts und auf dem Festlande, so wird man niemals die hier weiter unten beschriebene Methode nöthig haben; wenn die Beobachtungen aber bei Tage angestellt werden, und vorzüglich zur See, so wird diese Methode zuweilen sehr nützlich sein. Hieraus misst man gewöhnlich Sonnenhöhen, und wir wollen zuerst diesen Fall näher ins Auge fassen, weil er der wichtigste in der Praxis ist.

Man bestimmt nämlich unmittelbar aus den Beobachtungen die Höhen des Ober- oder Unterrandes der Sonne; mit Hülfe dieser genäherten Höhen und dem aufgeschriebenen Stande des Barometers und Luftthermometers sucht man alsdann die Strahlenbrechung und zieht sie von den beobachteten Höhen ab; legt man dann endlich die entsprechende Höhenparallaxe hinzu, so erhält man die wahren Höhen des Ober- oder Unterrandes; addirt man nun hierzu den scheinbaren Halbmesser der Sonne, oder zieht man ihn davon ab, je nachdem der Unter- oder Oberrand der Sonne beobachtet wurde, so erhält man die wahren Höhen des Sonnencentrums. Vermittelst des bekannten Ganges der Uhr kann man das zwischen beiden Beobachtungen verflossene Zeitintervall leicht in wahre Sonnenzeit und darauf auch in Grade verwandeln, wovon funfzehn auf eine Stunde gehen. Dadurch erhält man entweder den Unterschied der Stundenwinkel der Sonne, wenn beide Beobachtungen auf einer Seite des Meridians angestellt wurden, oder auch ihre Summe, wenn die Sonne auf verschiedenen Seiten desselben beobachtet wurde.

Es sei Z das Zenith (Taf. V, Fig. 31), P der sichtbare Pol des Aequators, S und S' die wahren Orte des Sonnencentrums bei der ersten und zweiten Beobachtung; kennt man alsdann die genäherte Zeit der Beobachtung und die genäherte Länge des Be-

obachtungsorts, so wird man aus den astronomischen Ephemeriden die entsprechenden Declinationen der Sonne δ und δ' finden. Nennt man h und h' die wahren Sonnenhöhen, δ und δ' die entsprechenden Declinationen, t und t' die Stundenwinkel, $\frac{1}{15}T$ die Zwischenzeit der Beobachtungen, in wahrer Sonnenzeit ausgedrückt, so wird $t' \pm t = T$ und in den sphärischen Dreiecken werden die Seiten $PS = 90° - \delta$, $PS' = 90° - \delta'$, $ZS = 90° - h$, $ZS' = 90° - h'$, und der Winkel $SPS' = T$, welcher, wie oben bemerkt wurde, gleich der Summe oder dem Unterschiede der Stundenwinkel ist, bekannt sein; gesucht aber wird die Seite $ZP = 90° - \varphi$, wo φ die Breite des Beobachtungsortes ist, und der Winkel $ZPS' = t'$ oder der Stundenwinkel in der Beobachtung, welche z. B. am nächsten am Mittage liegt. Diese Aufgabe lässt sich nun auf verschiedene Weisen auflösen; die folgende Methode scheint sehr bequem zu sein.

Setzt man den Bogen $SS' = u$, so erhält man aus dem sphärischen Dreiecke SPS':

$$\cos u = \sin\delta \sin\delta' + \cos\delta \cos\delta' \cos T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

$$\cos u = \cos(\delta' - \delta) - 2\cos\delta \cos\delta' \sin^2 \tfrac{1}{2} T.$$

Da nun die Zwischenzeit der Beobachtungen selten 3 oder 4 Stunden übersteigen wird, so wird in diesem Zeitraume, selbst zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen, die Declination der Sonne sich nur 3′ bis 4′ ändern können, und folglich $\cos(\delta' - \delta)$ sehr nahe $= 1$ sein; alsdann wird aber

$$\sin \tfrac{1}{2} u = \sin \tfrac{1}{2} T \sqrt{\cos\delta \cos\delta'},$$

oder sehr nahezu

$$\sin \tfrac{1}{2} u = \sin \tfrac{1}{2} T . \cos \tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Aus dem Dreiecke PSS' folgt weiter wegen der Kleinheit von $\delta' - \delta$, wenn die Winkel $S'SP = c$, $SS'P = c'$ gesetzt werden, dass:

$$tg\,\tfrac{1}{2}(c'+c)=\frac{cotg\,\tfrac{1}{2}T}{sin\,\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)};\ \tfrac{1}{2}(c'-c)=\tfrac{1}{2}\,\delta'-\delta)\frac{cotg\,\tfrac{1}{2}T}{cos\,\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta)}\ \ .\ (b).$$

Setzt man nun

$$u+h'+h=2p\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ (c),$$

so erhält man aus dem Dreiecke ZSS', wo der Winkel $SS'Z$ durch b' bezeichnet werden soll:

$$sin\,\tfrac{1}{2}b'=\sqrt{\frac{cos\,p\,.\,sin(p-h)}{sin\,u\,cos\,h'}},$$

oder

$$cos\,\tfrac{1}{2}b'=\sqrt{\frac{cos(p-u)\,sin(p-h')}{sin\,u\,cos\,h'}}\ \ .\ .\ .\ .\ \ (d).$$

Ist darauf b' und c' gefunden, so bestimmt man den Winkel $ZS'P$; in unserer Figur (Fig. 31) wird $ZS'P=c'-b'$; in anderen Fällen wird man nun auch ebenso $ZS'P=b'-c'$ finden können; aber wie man aus unseren Formeln leicht weiter unten sehen wird, werden diese beiden Fälle keinen Unterschied auf die Auflösung unserer Aufgabe hervorbringen.

Ueberhaupt werden aber beide Fälle dann stattfinden, wenn die Distanz der Sonne vom sichtbaren Pole des Aequators grösser ist, als die Entfernung dieses Poles vom Zenithe, oder wenn auf der nördlichen Halbkugel die Sonne an den Meridian, südlich vom Zenithe ab, tritt; im entgegengesetzten Falle aber, d. h. wenn die Sonne durch den Meridian zwischen dem Zenithe und dem sichtbaren Pole des Aequators durchgeht, wird $ZS'P=b+c$, oder auch $360°-(b+c)$; diese beiden letzteren Fälle bringen ebenfalls keinen Unterschied auf die Rechnung hervor. Da die Breite des Orts immer ungefähr auf 1° oder 2° vorläufig bekannt sein wird, so wird man unter den verschiedenen Umständen nie im Zweifel sein können, ob man den Unterschied oder die Summe der Winkel b' und c' zu nehmen hat, um den Winkel $ZS'P=v$ zu finden. Aus dem sphärischen Dreiecke ZPS' findet man endlich, wenn der Winkel $ZPS'=v$ gesetzt wird:

$$sin\,\varphi=sin\,h'.\,sin\,\delta'+cos\,h'\,cos\,\delta'.\,cos\,v,$$

oder setzt man

$$\cos v \operatorname{cotg} h' . = tg f \ldots\ldots\ldots (e),$$

o hat man:

$$\sin \varphi = \frac{\sin h' . \sin(\delta' + f)}{\cos f} \ldots\ldots (f).$$

Sobald die Breite φ bekannt ist, kann man den Stundenwinkel t' berechnen, nach der Formel:

$$\sin t' = \frac{\cos h' . \sin v}{\cos \varphi} \ldots\ldots\ldots (g),$$

oder nach anderen bekannten Formeln. Am besten ist es, wenn eine Beobachtung nahe am Meridiane, die andere aber nahe am ersten Verticale angestellt wird.

Gewöhnlich wird man rasch hinter einander auf ein Mal mehrere Höhen messen; aber selten wird man ihr Mittel als dem Mittel der dazu gehörigen Zeiten entsprechend annehmen können, und besonders wird der Fehler namhaft werden, wenn die Beobachtungen nahe am Meridiane angestellt sind; es ist also nöthig, entweder das Mittel der Höhen oder das Mittel der Zeiten zu verbessern. Das hierbei angewendete Verfahren ist in § 106, S. 284—287 auseinandergesetzt worden.

Beispiel. Am 7. August 1845 wurden auf der St. Petersburger Sternwarte mehrere doppelte Höhen des Ober- und Unterrandes der Sonne gemessen; aus früheren Beobachtungen war zugleich bekannt, dass die tägliche Voreilung des Chronometers gegen mittlere Zeit = 11^s,0 war, und am 7. August 1845 war es ungefähr um 6,5 Minuten zu früh gegen mittlere Zeit. Man erhielt dabei folgende Bestimmungen:

Scheinbare Höhe des ⊙-Centr.	Chronometerzeit	Barom.-Höhe in engl. Zoll	Thermometer	
			inneres	äusseres
28° 3′ 13″	20^h 5^m 10^s,0	30,04	+ 13,6 Réaum.	+ 15,8 Réaum.
45 28 23	23 26 38 ,7	30,07	+ 14,5 „	+ 19,2 „

Die verflossene Zeit zwischen beiden Beobachtungen war $= 3^h 21^m 28^s,7$; zieht man hiervon $1^s,54$ ab, oder die Voreilung des Chronometers im Zeitraume $3^h 21^m,5$, so wird die verflossene Zeit in mittlerer Zeit ausgedrückt $= 3^h 21^m 27^s,16$; aber am 7. August 1845 war die tägliche Verspätung der mittleren Zeit gegen wahre Sonnnenzeit, oder die tägliche Aenderung der Zeitgleichung $= 7^s,35$; folglich im Laufe von $3^h 21^m,5$ mittlerer Zeit war die Verspätung $= 1^s,02$ und daher die verflossene Zeit zwischen beiden Beobachtungen in wahrer Zeit ausgedrückt $= 3^h 21^m 28^s,18 = T$, oder in Graden $15\,T = 50° 22' 2'',7$, mithin $\frac{15}{2} T = 25° 11' 1'',35$.

Die genäherte Uhrcorrection des Chronometers war $= -6^m,5$; folglich wird die genäherte mittlere St. Petersburger Zeit bei der ersten und zweiten Beobachtung $19^h 58^m 40^s$ und $23^h 20^m 8^s,7$ sein; zieht man hiervon die Länge St. Petersburgs von Greenwich ab $= 2^h 1^m 16^s$, so erhält man die mittleren Greenwicher Zeiten $= 17^h 57^m 24^s$ und $21^h 18^m 52^s,7$, die Aenderung der Sonnendeclination in einer mittleren Stunde $= -42'',69$, welche aus der 48stündigen Aenderung zwischen dem 7. und 8. August hergeleitet wurde. Aus dem Nautical Almanac folgen für die erwähnten Greenwicher Zeiten die wahren Declinationen der Sonne: $\delta = +16° 12' 21'',0$ und $\delta' = +16° 9' 57'',5$. Die Horizontalparallaxe der Sonne war zu dieser Zeit $= 8'',4$ im Bogen; es folgt also für die

		1. Beobachtung	2. Beobachtung
Scheinb. Höhe des ⊙ Centrums	=	28° 3′ 13″,0	45° 28′ 23″,0
Höhenparallaxe	=	+ 7 ,5	+ 5 ,9
Strahlenbrechung	=	− 1 45 ,3	− 54 ,5
Wahre Höhe des ⊙ Centrums:		$h = 28° 1' 35'',2$;	$h' = 45° 27' 34'',4$.

Man hat nun zuerst: $\frac{15}{2} T = 25° 11' 1'',35$; $\frac{1}{2}(\delta' + \delta) = +16° 11' 9'',25$ und $\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = -0° 1' 11'',75$, mit welchen Werthen die Rechnung unter Zuziehung der Formeln (*a*) und (*b*) in § 19, S. 765 und 766 folgendermassen geführt werden kann:

$lg\,sin\,\frac{1}{2}T = 9{,}628922$	$lg\,cotg\,\frac{1}{2}T = 0{,}327702$
$lg\,cos\,\frac{1}{2}(\delta'+\delta) = 9{,}982435$	$lg\,sec\,\frac{1}{2}(\delta'+\delta) = 0{,}017565$
$lg\,sin\,\frac{1}{2}u = 9{,}611357$	$lg\,\frac{1}{2}(\delta'-\delta) = 1{,}855822_n$
$\frac{1}{2}u = 24^\circ\ 7'\,13'',5$	$lg\,\frac{1}{2}(c'-c) = 2{,}201089_n$
$u = 48\ 14\ 27\ ,0$	$\frac{1}{2}(c'-c) = -\ 0^\circ\ 2'\,38'',9$
$lg\,cotg\,\frac{1}{2}T = 0{,}327702$	$\frac{1}{2}(c'+c) = +82\ 31\ 57\ ,1$
$lg\,sin\,\frac{1}{2}(\delta'+\delta) = 9{,}445222$	$c' = 82^\circ 29'\,18'',2$
$lg\,tg\,\frac{1}{2}(c'+c) = 0{,}882480$	$c = 82\ 34\ 36\ ,0$
$\frac{1}{2}(c'+c) = 82^\circ 31'\,57'',1$	

Hierauf hat man vermittelst der Formeln (*c*), (*d*) und (*e*):

$p = 60^\circ 51'\,48'',3$	$b' = 90^\circ 31'\,39'',0$
$p-u = 12\ 37\ 21\ ,3$	$c' = 82\ 29\ 18\ ,2$
$p-h' = 15\ 24\ 13\ ,9$	$v = b'-c' = 8^\circ\ 2'\,20'',8$
$lg\,cos(p-u) = 9{,}989374$	$lg\,cos\,v = 9{,}995711$
$lg\,sin(p-h') = 9{,}424263$	$lg\,cotg\,h' = 9{,}993033$
$comp\,lg\,sin\,u = 0{,}127290$	$lg\,tg\,f = 9{,}988744$
$comp\,log\,cos\,h' = 0{,}154026$	$f = +44^\circ 15'\,27'',1$
Summe $= 19{,}694953$	$\delta' = +16\ \ 9\ 57\ ,5$
$lg\,cos\,\frac{1}{2}b' = 9{,}847477$	$f+\delta' = 60^\circ 25'\,24'',6$
$\frac{1}{2}b' = 45^\circ 15'\,49'',5$	

und endlich findet man mit Hülfe von (*f*) und (*g*):

$lg\,sin\,h' = 9{,}852941$	$lg\,sin\,v = 9{,}145660$
$comp\,lg\,cos\,f = 0{,}144959$	$lg\,cos\,h' = 9{,}845974$
$lg\,sin(\delta'+f) = 9{,}939368$	$comp\,lg\,cos\,\varphi = 0{,}300243$
$lg\,sin\,\varphi = 9{,}937268$	$lg\,sin\,t' = 9{,}291877$
Breite $= \varphi = 59^\circ 56'\,24'',1$	$t' = 11^\circ 17'\,35'',5$
	oder in Zeit: $t' = 0^h\,45^m\,10^s,4$.

Wir haben daher jetzt für die gesuchte Breite des Orts $59^\circ\,56'\,24'',1$; der östliche Stundenwinkel der Sonne in der zweiten Beobachtung war $= t' = 0^h\,45^m\,10^s4$; mithin:

Wahre Zeit der Beobachtung	=	$23^h\,14^m\,49^s,6$	am 7. August 1845
Zeitgleichung	=	$+\,5\;22\;,4$	
Mittlere Zeit der Beobachtung	=	$23^h\,20^m\,12^s,0$	
Chronometerzeit.	=	$23\;26\;38\;,7$	
Chron. zu früh gegen mittl. Zeit		$6^m\,26^s,7$.	

Die Gauss'sche Methode, die Polhöhe, die Uhrcorrection und den Fehler des Instruments aus den Zeiten abzuleiten, wo drei verschiedene Sterne einerlei Höhe erreichen.

20. Jede Beobachtungsmethode ist um so besser, je sicherer bei derselben die Ungenauigkeiten der Messapparate beseitigt werden, was von besonderer Wichtigkeit ist, wenn man mit einem so schwachen Instrumente wie der Sextant beobachtet, welcher vielen Fehlern unterworfen ist, die schwer wegzuschaffen oder genau zu bestimmen sind. Eine solche Methode zur Polhöhen- und Zeitbestimmung, hat Gauss in der Monatlichen Correspondenz von Zach 1808, Bd. XVIII, S. 277—293 vorgeschlagen; später schrieb Oriani darüber in dem Anhange zu der Effemeridi di Milano 1810, so wie auch H. Knorre in einer vortrefflichen, in russischer Sprache im Jahre 1832 zu Nicolaef erschienenen Abhandlung die Gauss'sche Methode näher erläutert und eine besondere Rechnungsart gegeben hat, welche mit Vortheil gebraucht werden kann, wenn mehr als drei Sterne beobachtet sind.

Die Gauss'sche Methode besteht darin, dass man die Zeiten bemerkt, wo drei beliebige Sterne in Verticalkreisen, die am Zenithe nicht zu spitze Winkel machen, dieselbe (übrigens willkürliche) Höhe erreichen, welche selbst nicht bekannt zu sein

braucht. Die Positionen der Sterne, der Uhrgang und der Stand des Barometers und Thermometers werden als gegeben vorausgesetzt.

21. Hat man nur so viel beobachtet, als zur Auflösung der Aufgabe durchaus nöthig ist, und ist zugleich die Polhöhe und die Uhrcorrection noch nicht mit ziemlicher Annäherung im Voraus bekannt, so wird folgende, von Gauss ursprünglich gegebene Berechnungsart jedenfalls die bequemste sein.

Es sei nämlich:

φ die gesuchte Polhöhe;

AR, AR', AR'' die bekannten geraden Aufsteigungen der drei Sterne;

δ, δ', δ'' die bekannten Declinationen der drei Sterne, wo südliche Declinationen als negativ betrachtet werden, wenn die Polhöhe eine nördliche ist;

Θ, Θ', Θ'' die drei bekannten Uhrmomente, als diese Sterne einerlei wahre Höhe h erreicht hatten;

K die gesuchte Uhrcorrection gegen Sternzeit, für ein beliebig zu wählendes Zeitmoment T an der Uhr geltend; z. B. für die Uhrangabe, welche ungefähr in der Mitte der Zeiten Θ, Θ', Θ'' liegt; wobei K als positiv betrachtet wird, wenn die Uhrangabe kleiner ist, als die entsprechende Sternzeit;

k die Retardation gegen Sternzeit in einer beliebigen Zeiteinheit, z. B. während einer Minute, wenn die Zeitintervalle $\Theta - T$, $\Theta' - T$, $\Theta'' - T$ in Minuten ausgedrückt werden;

t, t', t'' die drei, in Bogen verwandelten Stundenwinkel der Sterne, von Süden nach Westen gerechnet; so dass man hat:

$$\tfrac{1}{15}t = \Theta + K + k(\Theta - T) - AR;$$
$$\tfrac{1}{15}t' = \Theta' + K + k(\Theta' - T) - AR';$$
$$\tfrac{1}{15}t'' = \Theta'' + K + k(\Theta'' - T) - AR''.$$

Wenn man also:

$$15K = x;\ \Theta + k(\Theta - T) - AR = \tfrac{1}{15}\lambda;$$
$$\Theta' + k(\Theta' - T) - AR' = \tfrac{1}{15}\lambda';\ \Theta'' + k(\Theta'' - T) - AR'' = \tfrac{1}{15}\lambda''$$

setzt, so ist $t = \lambda + x$, $t' = \lambda' + x$; $t'' = \lambda'' + x$, und man hat alsdann die drei folgenden Gleichungen:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta . \cos(\lambda + x) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' . \cos(\lambda' + x) . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta'' + \cos\varphi \cos\delta'' . \cos(\lambda'' + x) \quad . \quad . \quad (3).$$

Zieht man (1) von (2) ab, und dividirt den Rest durch $\cos\varphi$, so kommt:

$$tg\,\varphi(\sin\delta' - \sin\delta) = \cos\delta \cos(\lambda + x) - \cos\delta' \cos(\lambda' + x)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\cos\delta - \cos\delta')[\cos(\lambda' + x) + \cos(\lambda + x)]$$
$$- \tfrac{1}{2}(\cos\delta + \cos\delta')[\cos(\lambda' + x) - \cos(\lambda + x)];$$
$$tg\,\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) =$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda)\cos[\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) + x]$$
$$+ \cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\sin\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda)\sin[\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) + x],$$
$$tg\,\varphi = tg\,\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)\cos\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda)\cos[\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) + x]$$
$$+ cotg\,\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)\sin\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda)\sin[\tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) + x].$$

Man bestimme $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$ auf solche Weise, dass:

$$\mathfrak{A}' \sin\mathfrak{B}' = \sin\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda) . cotg\,\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta),$$
$$\mathfrak{A}' \cos\mathfrak{B}' = \cos\tfrac{1}{2}(\lambda' - \lambda) . tg\,\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta),$$
$$\mathfrak{C}' = \tfrac{1}{2}(\lambda' + \lambda) - \mathfrak{B}'$$

wird; alsdann verwandelt sich die Gleichung für $tg\,\varphi$ in folgende:

$$tg\,\varphi = \mathfrak{A}' \cos(\mathfrak{C}' + x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Völlig auf gleiche Weise wird man aus den Gleichungen (1) und (3), einen ähnlichen Ausdruck für $tg\,\varphi$ bekommen. Wenn man nämlich

$$\mathfrak{A}'' \sin \mathfrak{B}'' = \sin \tfrac{1}{2}(\lambda'' - \lambda) . \cot g \tfrac{1}{2}(\delta'' - \delta),$$
$$\mathfrak{A}'' \cos \mathfrak{B}'' = \cos \tfrac{1}{2}(\lambda'' - \lambda) . tg \tfrac{1}{2}(\delta'' + \delta),$$
$$\mathfrak{C}'' = \tfrac{1}{2}(\lambda'' + \lambda) - \mathfrak{B}''.$$

setzt, so erhält man:

$$tg \varphi = \mathfrak{A}'' . \cos(\mathfrak{C}'' + x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Also:

$$\mathfrak{A}' . \cos(\mathfrak{C}' + x) = \mathfrak{A}'' . \cos(\mathfrak{C}'' + x);$$

$$(\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}')[\cos(\mathfrak{C}'' + x) + \cos(\mathfrak{C}' + x)]$$
$$= (\mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}')[\cos(C' + x) - \cos(\mathfrak{C}'' + x)];$$

$$\frac{\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}'} . \cot g \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}'' - \mathfrak{C}') = tg[x + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}')];$$

Setzt man nun

$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}''} = tg z,$$

wodurch

$$\frac{\mathfrak{A}'' - \mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}'' + \mathfrak{A}'} = tg(45° - z),$$

wird, und bestimmt einen Hülfswinkel ψ durch folgende Gleichung:

$$tg(45° - z) \cot g \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}'' - \mathfrak{C}') = tg \psi,$$

so hat man:

$$x = \psi - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}'),$$

und nachher φ durch die Gleichung (4) oder (5). Aus der gefundenen Polhöhe φ und den Stundenwinkeln $\lambda + x$, $\lambda' + x$, $\lambda'' + x$ kann man durch eine der Formeln (1), (2) und (3), oder durch eine passende Transformation einer dieser Formeln die wahre Höhe h finden. Wenn man sich bei der Beobachtung der Sternhöhen eines künstlichen Horizonts bedient, so wird der Unterschied zwischen der berechneten $2h + 2r$ (wo r die genaue Refraction ist) und der von dem Indexfehler befreiten und vermittelst des Sextanten gemessenen doppelten scheinbaren Höhe, den Fehler des Sextanten für den Winkel $2h + 2r$ geben.

Die Grössen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ werden stets als positiv betrachtet und $\mathfrak{B}'$ wird in solchen Quadranten genommen, dass $sin\,\mathfrak{B}$ das Zeichen von $sin\,\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda).cotg\,\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$, und dass $cos\,\mathfrak{B}$ das Zeichen von $cos\,\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda).tg\,\frac{1}{2}(\delta'+\delta)$ hat; eine ähnliche Regel giebt es auch bei der Berechnung des Winkels $\mathfrak{B}''$. Die Zweideutigkeit bei der Bestimmung von ψ durch die Tangente muss so entschieden werden, dass $tg\,\varphi$ positiv wird; man nimmt also ψ zwischen $-90°$ und $+90°$, vorausgesetzt, dass die Beobachtungen in der nördlichen Hemisphäre gemacht werden. In der südlichen würde es umgekehrt sein.

22. Gewöhnlich werden auf einmal, innerhalb eines Zeitraumes von 10 oder 15 Minuten, mehrere Höhen eines Sterns gemessen, und man wartet die Zeiten ab, wo die anderen Sterne dieselben Höhen erreichen. Da die Beobachtungen eines jeden Sterns kurz aufeinander folgen, so kann man bequem die Beobachtungsmomente auf die Zeit reduciren, welche für jeden Stern dem arithmetischen Mittel der gemessenen doppelten Höhen entspricht. Die Reduction lässt sich nach den Regeln berechnen, welche zuerst Soldner in Bode's Astronomischem Jahrbuche für 1818 gegeben hat, und welche wir in § 106, S. 184—187 erläutert haben. Aehnliche Regeln befinden sich auch in der Sammlung der Schumacher'schen Hülfstafeln, neu herausgegeben von Warnstorf, Altona 1845, S. 122; aber das Zeichen der Correction des westlichen Stundenwinkels muss hier umgekehrt werden; weil nach jenen Regeln das arithmetische Mittel der beobachteten Zeiten unverändert bleibt und die Correction an den Stundenwinkel angebracht wird, welcher aus dem Mittel der gemessenen Höhen zu berechnen ist; hier aber müssen wir im Gegentheil die Zeit finden, welche der mittleren Höhe entspricht. Sind also n doppelte Höhen gemessen und wird der Stundenwinkel t von der oberen Culmination gegen Westen bis 360° gezählt und ist h die wahre Höhe, welche dem arithmetischen Mittel der ge-

messenen doppelten Höhen entspricht, so wird die an das Mittel der Beobachtungszeiten anzubringende Correction

$$= -\frac{M}{15 . n} \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin t}$$

sein, wo α und β aus den Gleichungen:

$$\sin\alpha = \frac{\sin t}{\cos h} \cdot \cos\delta; \quad \sin\beta = \frac{\sin t}{\cos h} \cos\varphi,$$

nur auf Minuten berechnet werden; hier ist $M = \Sigma \cdot \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin 1''}$, oder gleich der Summe der Glieder: $\frac{2\sin^2 \frac{1}{2} \Delta t}{\sin 1''}$; indem nach und nach für Δt der Unterschied jedes einzelnen Beobachtungsmoments vom Mittel der Beobachtungszeiten gesetzt werden muss. Wenn man sich das sphärische Dreieck zwischen dem Zenithe, dem Sterne und dem Pole des Aequators denkt, so ist α der Winkel am Zenithe, oder das Azimuth, β aber der Winkel an dem Sterne, oder der parallactische Winkel; so dass also auch

$$\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta\sin h - \cos t;$$

diese Gleichung entscheidet, ob $\cos\alpha\cos\beta$ positiv oder negativ ist, und dient zugleich zur Controlle der Richtigkeit der berechneten Werthe von α und β.

Wenn bei den Beobachtungen eines Sterns einige der correspondirenden Höhen ausgelassen sind, so muss man die so corrigirte Zeit, wie sie der mittleren Höhe entspricht, auf die Zeit reduciren, welche der definitiv für alle drei Sterne gemeinschaftlich angenommenen und vom Instrumente unmittelbar gemessenen doppelten Höhe gehört. Es sei $2H$ diese doppelte Höhe und γ der Unterschied zwischen $2H$ und dem arithmethischen Mittel aller gemessenen doppelten Höhen; τ der Unterschied zwischen den entsprechenden Stundenwinkeln, oder die gesuchte Reduction. Wenn γ in Bogenminuten, und τ in Zeitsecunden ausgedrückt wird, so ist nach § 106, S. 285—287:

$$\tau = p.\gamma - p \sin 15'' (\tfrac{1}{2} p \cot g\, t + tg\, h) \gamma^2 \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$\tau = p.\gamma + \tfrac{1}{2} p^2 . \sin 15'' . \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin t} . \gamma^2,$$

und $p = -\frac{2 \cos h}{\cos \varphi \cos \delta \sin t} = +\frac{2}{\cos \varphi \sin A}$, wo A das Azimuth bezeichnet, welches dem Stundenwinkel t entspricht, aber bei nördlicher Polhöhe von Norden gegen Osten bis 360° gezählt wird.

Man sieht übrigens leicht ein, dass der Ausdruck (a) auch ganz unabhängig von den oben erklärten Regeln angewandt werden kann, um alle Beobachtungsmomente eines Sterns auf die Zeit zu reduciren, welche der gemeinschaftlichen Höhe entspricht, was besonders bequem ist, wenn die gemessenen doppelten Höhen in gleichen Intervallen auf einander folgen.

23. Sind aber *noch mehr als drei Sterne* beobachtet worden, und werden daraus die wahrscheinlichsten Werthe der zu bestimmenden Grössen gesucht, so kann man die Rechnung am sichersten und bequemsten nach folgender, von H. Knorre vorgeschlagenen Methode führen.

Die gemessene doppelte Höhe eines Sterns, vom Indexfehler befreit und dann halbirt, giebt die genäherte scheinbare Höhe; zieht man davon die Refraction ab, so hat man die entsprechende wahre Höhe h. Vermittelst der nahezu bekannten Polhöhe φ und der Uhrcorrection K kann man den Stundenwinkel t, vom Süden gegen Westen bis 360° gezählt, und das Azimuth A, von Norden gegen Osten ebenfalls bis 360° gezählt, berechnen und dazu die folgenden Formeln benutzen:

$$b = \tfrac{1}{2}(h + 90° - \varphi), \quad c = \tfrac{1}{2}(h - 90° + \varphi)$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\sin(\tfrac{1}{2}\delta - c) \cos(b + \tfrac{1}{2}\delta)}{\cos \varphi \cos \delta},$$

oder:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} t = \frac{\sin(b - \tfrac{1}{2}\delta) \cos(\tfrac{1}{2}\delta + c)}{\cos \varphi \cos \delta},$$

$$sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{sin(b - \frac{1}{2}\delta) cos(b + \frac{1}{2}\delta)}{cos\,\varphi\, cos\, h},$$

oder:

$$cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{sin(\frac{1}{2}\delta - c) cos(\frac{1}{2}\delta + c)}{cos\,\varphi\, cos\, h};$$

der Stundenwinkel t muss genau auf ein Zehntheil einer Bogensecunde, das Azimuth A aber nur auf Minuten berechnet werden.

Wegen der Ungenauigkeit der bei der Rechnung angewandten Höhe h und Polhöhe φ wird ein Fehler im Stundenwinkel t entstehen; es sei dieser Fehler $= \delta t$; δh und $\delta\varphi$ seien aber die Correctionen, welche zu h und φ zugelegt werden müssen, um dem ganzen Complex der Beobachtungen am besten zu genügen. Alsdann erhält man nach § 96, S. 249:

$$\delta h = cos\,\varphi\, sin\, A . \delta t + cos\, A . \delta\varphi.$$

Es sei nun K die nahezu bekannte Uhrcorrection gegen Sternzeit, zu einer beliebigen Uhrangabe T gehörig; δK die aus allen Beobachtungen abzuleitende Verbesserung der vorläufig angenommenen Grösse von K, und k der genau bekannte Uhrgang gegen Sternzeit in einer willkürlichen Zeiteinheit; alsdann wird der wahre Stundenwinkel werden:

$$= 15[\Theta + K + \delta K + k(\Theta - T) - AR] = t + \delta t.$$

Hier bedeutet Θ die Zeit an der Uhr, zu welcher der Stern, dessen Declination δ und gerade Aufsteigung AR ist, die wahre Höhe h erreicht. Wenn aber statt t sein vermittelst der genäherten Werthe von h, φ und K genau berechneter Werth substituirt wird, so erhält man:

$$15[\Theta + K + k(\Theta - T) - AR - \tfrac{1}{15}t] + 15\delta K = \delta t.$$

Dieser Ausdruck von δt in die Gleichung für δh substituirt, giebt:

$$\delta h = 15\, cos\,\varphi\, sin\, A[\Theta + K + k(\Theta - T) - AR - \tfrac{1}{15}t] +$$
$$+ cos\,\varphi\, sin\, A . 15\,\delta K + cos\, A . \delta\varphi.$$

Aehnliche Gleichungen kann man auch aus den Beobachtungen des zweiten, dritten u. s. w. Sterns ableiten, nur muss man statt A, Θ, t, AR, δ, respective A', Θ', t', AR', δ'; A'', Θ'', t'', AR'', δ'' u. s. w. schreiben; die Correctionen $\mathfrak{d}h$, $\mathfrak{d}K$ und $\mathfrak{d}\varphi$ bleiben natürlich für alle Sterne dieselben.

Der Grad der Annäherung in der vorläufig angenommenen Uhrcorrection K ist willkürlich, nur muss die zu bestimmende Verbesserung von K nicht gross sein: man kann also K immer so wählen, dass eine der Grössen:

$$\Theta + K + n(\Theta - T) - AR - \tfrac{1}{18}t;$$
$$\Theta' + K + k(\Theta' - T) - AR' - \tfrac{1}{18}t',$$

u. s. w. Null wird; die anderen aber bekommen kleine Werthe. Wir wollen z. B. annehmen, dass die erste dieser Grössen Null ist; alsdann erhält man für die Bestimmung von K die Gleichung:

$$K = \tfrac{1}{18}t + AR + (T - \Theta).k - \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b).$$

Setzt man der Kürze halber:

$$15 \sin\tfrac{1}{2}A' . \cos\tfrac{1}{2}A' . [\Theta' + K + k(\Theta' - T) - AR' - \tfrac{1}{18}t'] = a'$$
$$15 \sin\tfrac{1}{2}A'' . \cos\tfrac{1}{2}A'' . [\Theta'' + K + k(\Theta'' - T) - AR'' - \tfrac{1}{18}t''] = a''$$

u. s. w., so wird man folgende Bedingungsgleichungen bekommen, welche alsdann zur endlichen Bestimmung von $\mathfrak{d}h$, $\mathfrak{d}K$ und $\mathfrak{d}\varphi$ dienen können:

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}h &= + \cos\varphi \sin A . 15\,\mathfrak{d}K + \cos A . \mathfrak{d}\varphi \\ \mathfrak{d}h &= 2a' \cos\varphi + \cos\varphi \sin A' . 15\,\mathfrak{d}K + \cos A' . \mathfrak{d}\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (c) \\ \mathfrak{d}h &= 2a'' \cos\varphi + \cos\varphi \sin A'' . 15\,\mathfrak{d}K + \cos A'' \mathfrak{d}\varphi \end{aligned}$$

u. s. w.

Sind alle Messungen gleich zuverlässig, so muss jede von diesen Gleichungen mit der Anzahl der ihr entsprechenden Beobachtungen multiplicirt werden; die bekannte Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate giebt dann die wahrscheinlichsten Werthe von $\mathfrak{d}\varphi$, $15\,\mathfrak{d}K$ und $\mathfrak{d}h$.

Wenn man nur drei Sterne in gleicher Höhe beobachtet hat, so kann man die Gleichungen (c) ebenfalls benutzen, um die entsprechenden Verbesserungen der Polhöhe, Uhrcorrection und die Correction der angenommenen Höhe h zu bestimmen. Eine leichte Rechnung führt zur folgenden Auflösung:

Es sei

$$f' = \frac{15 \sin\frac{1}{2}A'.\cos\frac{1}{2}A'[\Theta'+K+(\Theta'-T).k - AR' \frac{1}{15}t']}{\sin\frac{1}{2}(A'-A).\sin\frac{1}{2}(A''-A')},$$

$$f'' = \frac{15 \sin\frac{1}{2}A''.\cos\frac{1}{2}A''[\Theta''+K+(\Theta''-T).k - AR''-\frac{1}{15}t'']}{\sin\frac{1}{2}(A''-A).\sin\frac{1}{2}(A''-A')};$$

alsdann ist

$$\begin{aligned} 15\,\delta K &= f''.\sin\tfrac{1}{2}(A'+A) - f'\sin\tfrac{1}{2}(A''+A) \\ \delta\varphi &= f''.\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(A'+A) - f'\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(A''+A) \\ \delta h &= f''.\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(A'-A) - f'\cos\varphi\cos\tfrac{1}{2}(A''-A). \end{aligned}$$

Der Fehler des Instruments ist alsdann $= 2(H+\delta h)-g$, wo H die scheinbare bekannte Höhe, und g die Angabe des Instruments ist. Diese Gleichungen sind sehr bequem um die Polhöhe, die Zeit und die Höhe genau zu bestimmen, bei welcher drei verschiedene Sterne beobachtet wurden; man braucht dabei nicht alle Beobachtungsmomente auf die Zeit einer einzigen gemeinschaftlichen Höhe zu reduciren; es müssen nur die Höhen der verschiedenen Sterne ungefähr dieselben sein. Denn man kann immer annehmen, dass der Fehler eines mit dem Instrumente gemessenen Winkels sich nur ganz unbedeutend ändert, wenn der Winkel sich um ein wenig vergrössert oder verkleinert; wenn also die doppelten Höhen der verschiedenen Sterne nur wenige Minuten differiren sollten, so kann man den Fehler des Instruments als constant betrachten.

24. Die letzten Gleichungen für $15\,K$ und für $\delta\varphi$ dienen auch dazu, um den Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Resultate schätzen zu können. Hat man die Zeit bei dem ersten Beobachtungsmomente Θ um $\pm\varepsilon$ falsch notirt, so wird dadurch ein Fehler $= \mp\varepsilon$ in K entstehen; wenn

ausserdem die Beobachtungsmomente Θ' und Θ'' um $\pm\varepsilon'$ und $\pm\varepsilon''$ Zeitsecunden unrichtig sind, und wir $\pm(\varepsilon'-\varepsilon)=\Delta'$, $\pm(\varepsilon''-\varepsilon)=\Delta''$ setzen, so werden respective die beiden folgenden Ausdrücke:

$$\frac{\Delta''.\sin A''.\sin\frac{1}{2}(A'+A)}{2\sin\frac{1}{2}(A''-A)\sin\frac{1}{2}(A'-A')}-\frac{\Delta'.\sin A'\sin\frac{1}{2}(A''+A)}{2\sin\frac{1}{2}(A'-A)\sin\frac{1}{2}(A''-A')}$$

und

$$\frac{15\Delta''\sin A''.\cos\varphi\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{2\sin\frac{1}{2}(A''-A)\sin\frac{1}{2}(A''-A')}-\frac{15\Delta'.\sin A'\cos\varphi\cos\frac{1}{2}(A''+A)}{2\sin\frac{1}{2}(A'-A)\sin\frac{1}{2}(A''-A')}$$

die Fehler in der Bestimmung von δK und φ ausdrücken. Hieraus sieht man, dass die günstigsten Umstände für die Gauss'sche Methode dann eintreffen, wenn keiner von den Sinussen von $\frac{1}{2}(A''-A)$, $\frac{1}{2}(A''-A')$, $\frac{1}{2}(A'-A)$ zu klein wird, welches man dadurch erwirkt, dass man nur Sterne auswählt, die die Höhe h in sehr ungleichen Azimuthen erreichen; am besten ist es, wenn die Unterschiede der Azimuthe ungefähr 120° betragen. Es ist auch klar, dass Sterne, deren Höhe sich langsam ändert, eben so brauchbar sind, wie solche, die schnell steigen oder fallen; es kommt bei jenen nicht darauf an, dass man den Augenblick, wo sie die verlangte Höhe haben, haarscharf trifft, sondern nur, dass sie in dem Augenblicke, den man dafür annimmt, in der That nicht merklich davon abstehen. Man kann also auch Sterne nahe bei der Culmination, oder auch den Polarstern wählen, und gerade solche sind sehr zweckmässig, weil man da dem eben erwähnten Erfordernisse mit Ruhe Genüge thun kann. Wenigstens einer von den drei Sternen wird übrigens immer seine Höhe schnell ändern, wenn die Bedingung der ungleichen Azimuthe erfüllt ist*). Wenn man z. B. bei nördlicher Breite den Polarstern beobachten will, so muss einer der übrigen Sterne im südöstlichen, und der andere im südwestlichen

*) „Monatliche Correspondenz", Bd. XVIII, S. 287; Gauss' Abhandlung.

Theile des Himmels auf derselben Höhe beobachtet werden. Es versteht sich von selbst, dass, wenn der Beobachtungsort eine sehr bedeutende Polhöhe hat, man den Polarstern (*α Ursae Minoris*) nicht mehr brauchen kann; so z. B. schon in der Polhöhe von 60° ist die doppelte Höhe dieses Sterns nahe an 120°, d. h. nicht mehr weit von der Grenze der Winkel entfernt, welche man mit dem Sextanten messen kann; dabei werden auch, wegen der sehr geneigten Stellung des grossen Spiegels, sehr wenige Lichtstrahlen von diesem Spiegel reflectirt, wodurch die Helligkeit des Sternbilds sehr geschwächt wird.

25. Es müssen überhaupt sehr schnelle Sterne, also die erster und zweiter Grösse, zu diesen Beobachtungen gewählt werden; in mondlosen Nächten kann man auch die Sterne dritter Grösse gut beobachten. Ehe man die Höhenmessungen vornimmt, ist es nöthig, sich darauf vorzubereiten, d. h. eine kleine Tabelle zu berechnen, um die Uhrzeiten auf ein Paar Minuten anzugeben, wo jeder der gewählten Sterne die verlangte Höhe erreicht.

Die Höhe, bei welcher die Sterne beobachtet werden, ist willkürlich; man kann z. B. die Höhe von 30° oder 40° mit Vortheil wählen. Doch hängt alles dies davon ab, zu welcher Nachtstunde man beobachten will und welche hinlänglich hellen Sterne in dieser Stunde aufzufinden sind. Um die Verwechselung zu vermeiden, muss man im Voraus die Alhidade des Sextanten auf die berechnete Höhe stellen.

Die Sternhöhen kann man aus freier Hand messen; es ist aber sicherer, mit einem passenden Stative zu beobachten, um die Coincidenz der Bilder schärfer und besser in der Mitte des Gesichtsfeldes bemerken zu können. In allen Fällen muss das Glasdach jedoch, welches den Quecksilberhorizont gegen den Wind schützt, auf dieselbe Weise bei allen Beobachtungen angewandt werden, d. h. immer mit derselben Seite gegen den Beobachter zugekehrt sein, damit der Fehler der Gläser des Daches bei der Polhöhen- und Zeitbestimmung nicht in Betracht kommt.

Wenn die Sterne gehörig gewählt sind, so kann man in einer Stunde, ja sogar in einer halben Stunde, drei Sterne auf mehreren correspondirenden oder einerlei Höhen beobachten; in so kurzer Zeit wird selten der Zustand der Atmosphäre sich bedeutend ändern. Alsdann braucht man den Barometerstand und die Temperatur der Luft nur einmal zu notiren, oder auch am Anfange und am Ende der Beobachtungen zu bemerken, und daraus das Mittel zu nehmen. Es ist auch sehr leicht, auf die Veränderung der Refraction Rücksicht zu nehmen, indem man die genauen Refractionen r, r', r'' für jeden der drei Sterne berechnet, und die Correctionen der Zeiten bestimmt, welche der Veränderung der doppelten Höhen um $2(\varrho - r)$, $2(\varrho - r')$, $2(\varrho - r'')$, wo $\varrho = \frac{1}{3}(r + r' + r'')$ ist, entspricht; dieselbe lässt sich aus den Beobachtungen selbst herleiten.

26. Am passendsten ist es, die Messungen in gleichen Intervallen der doppelten Höhen aufeinander folgen zu lassen; z. B. von 20 zu 20 Bogenminuten, wenn man in der Nähe des ersten Verticals beobachtet; für den Polarstern, oder für die Sterne nahe am Meridiane muss man die Intervalle kleiner machen, und die Messungen auf beiden Seiten der für alle Sterne verlangten gemeinschaftlichen doppelten Höhe symmetrisch fortführen. Will man aber dem Haupterfordernisse der Methode streng Genüge thun und die Resultate ganz unabhängig von den möglichen zufälligen Theilungsfehlern des Gradbogens erhalten, so muss man die doppelten Höhen für alle Sterne bei denselben Theilungsstrichen messen; in diesem Falle wird es nicht gut möglich sein, den Polarstern ebenso oft wie die anderen Sterne zu beobachten. Aus diesem Grunde ist es besser, nach Knorre's Vorschlag statt des Polarsterns den Stern β *Ursae minoris*, oder ähnliche, vom Pole etwas entferntere Sterne zu benutzen.

Beispiel. Am 18. Juni 1831, in Taganrog, beobachtete Herr M. Manganari, auf dem Quecksilberhorizont mit einem Sextanten vom Stative aus, die doppelten correspondirenden Höhen

der Sterne: *α Bootis*, *β Ursae minoris* und *α Cygni* an einem nahezu nach mittlerer Zeit gehenden Chronometer:

Doppelte Höhe	Zeit für *α Bootis*	Zeit für *β Urs. min.*	Zeit für *α Cygni*	
119° 0′	$9^h 18^m 37^s,5$		$11^h 39^m 58^s,0$	Barometer = 29,95 Engl. Z.
118 40	9 20 34,5	$10^h 58^m 22^s,5$	11 38 59,5	Thermom. = + 11°,0 R.
118 20	9 22 11,5	11 2 0,0	11 37 57,5	Tägliche Retardation der Uhr = $220^s,6$
118 0	9 23 56,0	11 5 28,0		Indexfehler = − 0° 1′ 0″.
117 40	9 25 34,5	11 8 56,5	11 35 58,5	

Scheinb. *AR.*	Scheinb. Declin.	Genäherte:
α Bootis *AR* = $14^h 7^m 58^s,68$	δ = + 20° 4′ 0″,5	Polhöhe = 47° 12′ N′
β Urs. m. *AR′* = 14 51 19,50	δ' = + 74 51 0,9	Oestl. L. = $2^h 36^m$ v. Gr.
α Cygni. *AR″* = 20 35 42,61	δ'' = + 44 40 46,5	Uhrcorr. = + $5^h 58^m$.

Fürs erste müssen wir alle Beobachtungen auf eine gemeinschaftliche Angabe des Instruments, nämlich auf 118° 20′ reduciren; diese Angabe, vom Indexfehler befreit, giebt 118° 19′, oder die genäherte scheinbare Höhe ist = 59° 9′,5; die genaue Refraction ist hier = 34″,1; die wahre Höhe ist also nahezu = 59° 9′ = h; mit φ = 47° 12′, giebt dann eine leichte Rechnung mit fünf- oder vierstelligen Logarithmen:

	für *α Bootis*	für *β Urs. min.*
Stundenwinkel = t	18° 4′	32° 38′
Azimuth = A	214 36	344 5
$lg \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t}$	$0,3839_n$	$0,0961_n$
$lg p$	$0,71462_n$	$1,03080_n$
$lg(\frac{1}{2} p^2 \sin 15''. \cos\alpha \cos\beta \operatorname{cosec} t)$		$7,7183_n - 10$
Mittel der Zeiten	$9^h 22^m 10^s,80$	$11^h 3^m 41^s,75$
Mittl. gemessene dopp. Höhen	118° 20′ 0″	118° 10′ 0″

Abw. der Mitte der Zeiten von der Zeit der		*m*		*m*
1. Beobachtung $\frac{1}{15}\Delta t$ =	$0^h 3^m 33^s,5$	24,8	$0^h 5^m 19^s,25$	55,6
2. „	1 36,3	5,1	1 41,70	5,6
3. „	0 0,7	0,0	1 41,60	6,2
4. „	1 45,8	6,1	5 14,80	54,1
5. „	3 33,7	24,9		
$M = \Sigma m$ . . .		60,9		121,5

Hier ist $m = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \triangle t}{\sin 1''}$, welches aus den Tafeln für die Reduction auf den Meridian (Peters' Tafeln und Formeln) mit dem entsprechenden Argumente $\triangle t$ in Zeit ausgedrückt, gefunden wird. Man hat also:

	für *α Bootis*	für *β Urs. min.*
Mittel der beobachteten Zeiten	$9^h 22^m 10^s,80$	$11^h 3^m 41^s,75$
Correction $= -\frac{M}{15.n} \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin t}$	$+1,90$	$+2,52$
Red. auf die Inst.-Ang. 118° 20′ . . .	$0,00$	$-1\ 46,83$
Corrigirte Zeit . . . . . $\Theta =$	$9^h 22^m 12^s,70$	$\Theta' = 11^h 1^m 57^s,44$

Auf dieselbe Weise erhält man die corrigirte Zeit für *α Cygni* gleich $11^h 37^m 58^s,4 = \Theta''$. Wir wollen als Zeitmoment, für welches die Uhrcorrection K gefunden werden muss, die Uhrangabe $T = 11^h 0^m 0^s$ nehmen; und da die Uhr in jeder Stunde um $9^s,19$, und in jeder Minute um $0^s,152$ gegen Sternzeit zurückblieb, so hat man:

	für *α Bootis*	für *β Urs. min.*	für *α Cygni*
$\Theta =$	$9^h 22^m 12^s,7$	$11^h\ 1^m 57^s,4$	$11^h 37^m 58^s,4$
$k(\Theta - T)$	$-15,0$	$+0,3$	$+5,8$
AR	$= 14\ \ 7\ 58,7$	$14\ 51\ 19,5$	$20\ 35\ 42,6$
$\Theta + k(\Theta - T) - AR =$	$-4^h 46^m\ 1^s,0$	$-3^h 49^m 21^s,8$	$-8^h 57^m 38^s,4$
	$\lambda = -71° 30' 15''$	$\lambda' = -57° 20' 27''$	$\lambda'' = -134° 24' 35''$

$\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) = +\ 7°\ 4' 54'',0$	$\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda) = -31° 27' 10'',2$
$\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = +27\ 23\ 30,2$	$\frac{1}{2}(\delta'' - \delta) = -12\ 18\ 23,0$
$\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = +47\ 27\ 30,7$	$\frac{1}{2}(\delta'' + \delta) = +32\ 22\ 23,5$

$lg\,tg\,\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) = 9,094232$	$lg\,tg\,\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda) = 9,786517_n$
$lg\,cotg\,\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = 0,285531$	$lg\,cotg\,\frac{1}{2}(\delta'' - \delta) = 0,661241$
$lg\,cotg\,\frac{1}{2}(\delta' + \delta) = 9,962684$	$lg\,cotg\,\frac{1}{2}(\delta'' + \delta) = 0,197938$
$lg\,tg\,\mathfrak{B}' = 9,342447$	$lg\,tg\,\mathfrak{B}'' = 0,645696_n$
$\mathfrak{B}' = +12° 24' 29'',1$	$\mathfrak{B}'' = -\ 77° 15' 34'',4$
$\frac{1}{2}(\lambda' + \lambda) = -64\ 25\ 21,0$	$\frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda) = -102\ 57\ 25,2$
$\mathfrak{C}' = -76° 49' 50'',1$	$\mathfrak{C}'' = -\ 25° 41' 50'',8$
$\frac{1}{2}(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) = +25\ 33\ 59,7$	$\frac{1}{2}(\mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}) = -\ 51\ 15\ 50,5$

$lg\,sin\,\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda) = 9{,}090907$	$lg\,sin\,\frac{1}{2}(\lambda''-\lambda) = 9{,}717501_n$
$lg\,cotg\,\frac{1}{2}(\delta'-\delta) = 0{,}285531$	$lg\,cotg\,\frac{1}{2}(\delta''-\delta) = 0{,}661241$
$compl\,lg\,sin\,\mathfrak{B}' = 0{,}667817$	$compl\,lg\,sin\,\mathfrak{B}'' = 0{,}010827_n$
$lg\,\mathfrak{A}' = 0{,}044255$	$lg\,\mathfrak{A}'' = 0{,}389569$
$lg\,\mathfrak{A}'' = 0{,}389569$	$\mathfrak{C}'' = -25^\circ 41' 50'',8$
$lg\,tg\,z = 9{,}654686$	$x = +89\ 34\ 0\ ,7$
$z = 24^\circ 18' 2'',0$	$\mathfrak{C}''+x = +63^\circ 52' 9'',9$
$45^\circ - z = 20\ 41\ 58\ ,0$	$lg\,cos(\mathfrak{C}''+x) = 9{,}643865$
	$lg\,\mathfrak{A}'' = 0{,}389569$
$tg\,\eta = cotg\,\varphi\,cos(\lambda+x)$	$lg\,tg\,\varphi = 0{,}033434$
$sin\,h = \frac{sin\,\varphi\,sin(\eta+\delta)}{cos\,\eta}$	$\varphi =$ Polhöhe $= 47^\circ 12' 11'',8$
$lg\,tg(45^\circ - z) = 9{,}577328$	$lg\,cotg\,\varphi = 9{,}966566$
$lg\,cotg\,\frac{1}{2}(\mathfrak{C}''-\mathfrak{C}) = 0{,}320207$	$lg\,cos(\lambda+x) = 9{,}978052$
$lg\,tg\,\psi = 9{,}897535$	$lg\,tg\,\eta = 9{,}944618$
$\psi = +38^\circ 18' 10'',2$	$\eta = 41^\circ 21' 23'',4$
$\frac{1}{2}(\mathfrak{C}''+\mathfrak{C}) = -51\ 15\ 50\ ,5$	$\delta = 20\ 4\ 0\ ,5$
$x = 15K = +89^\circ 34' 0'',7$	$\eta+\delta = 61^\circ 25' 23'',9$
$K =$ Uhrc. $= +5^h 58^m 16^s,05$	$lg\,sin(\delta+\eta) = 9{,}943582$
	$lg\,sin\,\varphi = 9{,}865560$
$\lambda = -71^\circ 30' 15'',0$	$lg\,sec\,\eta = 0{,}124585$
$x = +89\ 34\ 0\ ,7$	$lg\,sin\,h = 9{,}933727$
$t = \lambda + x = +18^\circ\ 3' 45'',7$	$h = 59^\circ 8' 44'',0$

Nun ist die Refraction $r = 34'',1$; folglich die berechnete scheinbare Höhe $= h + r = 59^\circ 9' 18'' = H$; oder $118^\circ 18' 36'' = 2H$ und da die entsprechende Angabe des Instruments $= 118^\circ 20' 0''$ ist, so giebt das Instrument $1' 24''$ zu viel. Man hat also die Polhöhe des Beobachtungsorts $= 47^\circ 12' 11'',8$; die Uhrcorrection gegen Sternzeit um 11^h an der Uhr $= 5^h 58^m 16^s,05$, und der Fehler des Instruments, mitsammt Indexfehler $= 1' 24''$ bei einem Winkel von $118^\circ 20'$.

Wir wollen jetzt dasselbe Beispiel nach Knorre's Gleichungen berechnen:

	α *Bootis*	β *Urs. min.*	α *Cygni*
Angabe des Instr.	118°20′ 0″,0	118°10′ 0″,0	118°20′ 0″,0
Indexfehler . .	— 1 0 ,0	— 1 0 ,0	— 1 0 ,0
Angenom. Höhe .	59° 9′30″,0	59° 4′30″,0	59° 9′30″,0
Refraction r . .	34 ,1	34 ,2	34 ,1
Gen. w. Höhe h =	59° 8′55″,9	59° 3′55″,8	59° 8′55″,9

damit und mit $\varphi = 47°12'0''$, hat man nach § 23, S. 777:

$t = +18°3'40'',1$;	$t' = +32°38'22'',7$;	$t'' = -44°50'12'',6$
$\frac{1}{15}t = +1^h 12^m 14^s,68$;	$\frac{1}{15}t' = +2^h 10^m 33^s,5$;	$\frac{1}{15}t'' = -2^h 59^m 20^s,84$
$\frac{1}{2}A = -72°41',9$;	$\frac{1}{2}A' = -7°57',4$;	$\frac{1}{2}A'' = +38°56',0$
$\Theta = 9^h 22^m 12^s,7$;	$\Theta' = 11^h 3^m 44^s,3$;	$\Theta'' = 11^h 37^m 58^s,44$
$k(\Theta - T) = -15,0$;	$k(\Theta' - T) = +0,6$;	$k(\Theta'' - T) = +5',86$,

wobei $T = 11^h 0^m 0^s$ gesetzt worden ist; wenn man alsdann K aus der Beobachtung der Höhe von α *Bootis*, unter der Annahme von $\varphi = 47°12'0''$ bestimmt, so kömmt $K = 5^h 58^m 15^s,70$; folglich:

$$\Theta' + K + k(\Theta' - T) - AR' - \tfrac{1}{15}t' = +7^s,60;$$
$$\Theta'' + K + k(\Theta'' - T) - AR'' - \tfrac{1}{15}t'' = -1,77.$$

Damit ist

$$lg f' = 1,3742_n,\ lg f'' = 1,2705_n$$
$$+f'' \sin\tfrac{1}{2}(A' + A) = +18'',40$$
$$-f' \sin\tfrac{1}{2}(A'' + A) = -13,15$$
$$15\,\delta K = +\ 5'',25$$
$$\delta K = +\ 0^s,35$$

$$+f'' \cos\varphi \cos\tfrac{1}{2}(A' + A) = -\ 2'',05$$
$$-f' \cos\varphi \cos\tfrac{1}{2}(A'' + A) = +13,71$$
$$\delta\varphi = +11'',66$$

$$+f'' \cos\varphi \cos\tfrac{1}{2}(A' - A) = -\ 5'',41$$
$$-f' \cos\varphi \cos\tfrac{1}{2}(A'' - A) = -\ 6,19$$
$$\delta h = -11'',60$$

Man hat also die Breite des Beobachtungsorts $= \varphi + \delta\varphi = 47°12'11'',66$; die Uhrcorrection um 11 Uhr $= 5^h 58^m 16^s,05$;

die wahre Höhe $= h + \delta h = 59°8'44'',3$; scheinbare Höhe $= h + \delta h + r = H + \delta h = 59°9'18'',4$; $2(H + \delta h) = 118°18'36'',8$; Instrumentangabe $= 118°20'0''$; Fehler des Instruments $= 1'23'',2$; alles sehr nahezu übereinstimmend mit den früheren Resultaten.

Bestimmung des Azimuths eines terrestrischen Gegenstandes.

27. Hierzu misst man den Winkel zwischen einem Gegenstande und der Sonne und beobachtet eine gleiche Zahl Abstände des Gegenstandes von dem ihm zunächst gelegenen und am entferntesten gelegenen Sonnenrande. Bei jeder dieser Beobachtungen schreibt man die zugehörige Chronometerzeit auf, dessen Stand entweder in Bezug auf mittlere oder auch auf Sternzeit als bekannt vorausgesetzt wird; ferner bemerkt man den Stand des Barometers und der beiden Thermometer. Wenn die Beobachtungen nicht gar zu lange währen, z. B. nicht viel mehr als 10^m in Zeit dauern, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass das arithmetische Mittel der Beobachtungsdem arithmetischen Mittel der gemessenen Winkel entspricht; im entgegengesetzten Falle aber muss man die Beobachtungen in einzelne Gruppen eintheilen und für jede Gruppe besonders die Rechnung gerade so einrichten, wie wir es jetzt zeigen werden.

Befreit man die Beobachtungen zuerst vom Index-, sowie von anderen bekannten Fehlern, so erhält man die Winkel zwischen dem Gegenstande und einem der beiden Sonnenränder; legt man alsdann den scheinbaren Radius der Sonne zu diesen Winkeln hinzu, wenn der dem Gegenstande nähere Rand beob-

achtet wurde, oder zieht man ihn ab, wenn der vom Gegenstande entferntere Sonnenrand beobachtet wurde, so erhält man die Winkel zwischen dem Gegenstande und dem Centrum der Sonne.

Es sei Z (Taf. V, Fig. 32) das Zenith; O und S die scheinbaren Orte des terrestrischen Gegenstandes und des Sonnencentrums. Bezeichnet man nun durch h und H die scheinbaren Höhen der Punkte O und S, durch b aber den Bogen OS, oder den Winkel zwischen dem irdischen Gegenstande und dem Sonnencentrum, so erhält man aus dem sphärischen Dreiecke ZOS, wo $ZO = 90°—h$, $ZS = 90°—H$ und $OS = b$, leicht den Winkel $OZS = n$, oder den Unterschied der Azimuthe des Gegenstandes und der Sonne durch folgende Gleichung:

$$sin \tfrac{1}{2} n = \sqrt{\frac{sin \tfrac{1}{2}(b + H - h) \, sin \tfrac{1}{2}(b - H + h)}{cos\, h \, cos\, H}}.$$

Wenn h sehr nahe an Null ist, so wird:

$$cos\, n = \frac{cos\, b}{cos\, H}.$$

Der gesuchte Unterschied der Azimuthe oder n wird um so genauer erhalten, je kleiner die Sonnenhöhe ist, und je mehr sich der Winkel ZOS (Fig. 32) einem rechten Winkel nähert; man darf jedoch die Sonne nicht zu nahe am Horizonte beobachten; denn in diesem Falle wird das Sonnenbild verzerrt und unruhig. Die scheinbare Höhe H der Sonne leitet man unmittelbar aus Höhenmessungen vor und nach den beobachteten Winkeln zwischen dem Gegenstande und der Sonne ab, aber noch bequemer ist es, diese Höhe vermittelst der astronomischen Ephemeride aus der Breite des Beobachtungsorts und der Zeit der Beobachtung zu berechnen; das Azimuth und die Höhe der Sonne werden durch folgende einfache Formeln bestimmt:

$$tg\, \omega = \frac{tg\, \delta}{cos\, t}; \quad tg\, a = \frac{cos\, \omega \, . \, tg\, t}{sin\, (\varphi - \omega)}; \quad cotg\, H° = \frac{tg\, (\varphi - \omega)}{cos\, a},$$

wo φ die nördliche Breite des Orts ist; δ die Declination, t der Stundenwinkel vom Südpunkt gerechnet; H° die wahre Höhe und a das Azimuth der Sonne zur Zeit der Beobachtung, ebenso wie der Stundenwinkel vom Südpunkte abgerechnet; δ ist positiv oder negativ, je nachdem die Declination eine nördliche oder südliche ist. Legt man zu H° die entsprechende Strahlenbrechung hinzu, und zieht die Höhenparallaxe davon ab, so erhält man die scheinbare Höhe H, welche bei der Berechnung des Werthes n gebraucht wird.

Beispiel. In Kronstadt nahe am Ende des Festungswalles, unweit des Handelshafens, wurden am 10. Juni 1843 mehrere Entfernungen der beiden Ränder der Sonne, des zunächst gelegenen und entfernteren Randes, von beiden Rändern des Thurmknopfes der Sternwarte des Steuermannscorps mit einem Sextanten gemessen; und aus diesen Beobachtungen fand sich, dass die für Indexfehler schon verbesserte Distanz des Sonnencentrums von der Mitte des Thurmknopfes =

$$b = 88^\circ 49' 47'' \text{ um } 6^h 7^m 1^s{,}0 \text{ Chronometerzeit war.}$$

Die Correction des Chronometers gegen Sternzeit war $56^s{,}5$ zu früh und also war die Sternzeit der Beobachtung $= 6^h 6^m 4^s{,}5$. Die angenommene östliche Länge Kronstadts von Berlin ist $= 1^h 5^m 25^s$, und damit findet man aus dem Berliner astronomischen Jahrbuche, dass am 10. Juni 1843 die Sternzeit im wahren Mittage zu Kronstadt $= 5^h 12^m 21^s{,}2$ war, und die Bewegung der geraden Aufsteigung der Sonne in einer Stunde Sternzeit war $= 10^s{,}35$ in Zeit; hieraus folgt für die wahre Sonnenzeit der Beobachtung $0^h 53^m 34^s{,}1$, welches der westliche Stundenwinkel der Sonne in Zeit war; in Graden ausgedrückt, wird dieser Winkel $= 13^\circ 23' 31''{,}5 = t$. Die Breite des Beobachtungsorts $= 59^\circ 59' 30'' = \varphi$; die Declination des Sonnencentrums $= +23^\circ 0' 42''{,}0$; die Höhe der Mitte des Thurmknopfes vom Beobachtungsorte aus gesehen $= 1^\circ 23' 30'' = h$, die Temperatur der Luft war $= +16^\circ{,}0$ Réaumur; die Höhe

des Barometers = 30,05 englische Zoll. Berechnet man jetzt die wahre Höhe und das Azimuth des Sonnencentrums nach den oben angegebenen Formeln, sowie die Strahlenbrechung und Höhenparallaxe, so erhält man:

Wahre Höhe . . . $= H^\circ$	$= 50^\circ 54' 14''$	Nordwestliches Azimuth
Refraction — Paral. =	$+41$	der Sonne $= 160^\circ 14' 30''$
Scheinbare Höhe ☉ $= H$	$= 50^\circ 54' 55''$	oder
Sch. H. d. Knopfes $= h$	$= 1\ 23\ 30$	Südwestliches Azimuth
Gemess. Abstand $= b$	$= 88\ 49\ 47$	der ☉ $= a = 19^\circ 45' 30''$

$\frac{1}{2}(b + H - h) = 69^\circ 10' 36'' \ldots lg\,sin = 9{,}970663$

$\frac{1}{2}(b - H + h) = 19\ 39\ 11 \ldots lg\,sin = 9{,}526758$

$comp\,lg\,cos\,H = 0{,}200336$

$comp\,lg\,cos\,h = 0{,}000128$

Summe $= 9{,}697885$

$lg\,sin\,\frac{1}{2}n =$ halbe Summe $= 9{,}848942$

$\frac{1}{2}n = 44^\circ 55' 42''$

$n = 89\ 51\ 24$

Die Sonne befand sich zur Zeit der Beobachtung südwestlich vom Knopfe:

Azimuthdifferenz zwischen Knopfmitte und ☉-Centrum	$n =$	$89^\circ 51' 24''$
Südwestliches Azimuth des ☉-Centrums . . .	$a =$	$19\ 45\ 30$
Südöstliches Azimuth der Mitte des Knopfes .	$=$	$70^\circ\ 5' 54''$

Den Höhenwinkel eines entfernten irdischen Objectes kann man nicht unmittelbar mit dem Sextanten messen; der Fehler, welcher jedoch in der Bestimmung des Azimuths wegen der Vernachlässigung dieser Höhe entstehen würde, ist meistens zu bedeutend, um vernachlässigt werden zu können; er wird desto grösser, je kleiner der Unterschied zwischen den Azimuthen der Sonne und des Objects, und um je grösser die Sonnenhöhe ist. Wir müssen also hier die Methode auseinander setzen, wie der Beobachter, welcher nur mit einem Sextanten und Chronometer versehen ist, sowohl das Azimuth, wie auch die Höhe des Ob-

jects finden kann. Diese Methode, auf welche zuerst der Herr Akademiker Wisniewsky*), und nachmals Herr Knorre**) aufmerksam gemacht hat, besteht darin, dass man die Distanzen des Objects von der Sonne zu zwei verschiedenen Tageszeiten misst und zugleich die entsprechenden Angaben eines bereits verificirten Chronometers bemerkt. Es wird am besten sein, wenn die Lage des Objects es erlaubt, eine Distanz nahe an der Verticalebene zu messen, in welcher das Object liegt***), die andere Distanz aber dann zu nehmen, wenn die Sonne in einer bedeutenden Entfernung, etwa 90°, von dieser Ebene sich befindet.

Bei der Messung der Sonnendistanzen vom Objecte notirt man auch den Barometer- und Thermometerstand um die Refraction berechnen zu können. Es sei Z das Zenith; P (Fig. 31) das irdische Object, von welchem die Sonnendistanzen $PS = \mathfrak{d}$ und $PS' = \mathfrak{d}'$ gemessen wurden; S und S' die scheinbaren Orte des Sonnenmittelpunkts. Mit der gegebenen Polhöhe und Länge des Beobachtungsorts und den bekannten wahren Sonnenzeiten der Beobachtungen, berechnet man die Azimuthe und Höhen der Sonne, und nach Anbringung der Refraction minus Parallaxe, die scheinbaren Sonnenhöhen H und H', so wird man die scheinbaren Zenithdistanzen $ZS = 90° - H$, $ZS' = 90° - H'$ und den Winkel SZS' erhalten, wo SZS' den Unterschied der nach einer Richtung bis 360° fortgezählten

*) Mémoires de l'académie de St. Petersbourg 1816.

**) Astronomische Nachrichten, Bd. VII, S. 264.

***) Man beobachtet mehrere Distanzen in kurzen Zeitintervallen, wenn möglich symmetrisch auf beiden Seiten des Verticals vom irdischen Object, um die Höhe des Objects abzuleiten. Sind H und h die scheinbaren Höhen, a und α die Azimuthe der Sonne und des Objects, $\mathfrak{d}$ die gemessene Distanz und wird $a - \alpha = y$ gesetzt, so ist, wenn y einen kleinen Winkel bedeutet, in Secunden

$$h = H - \mathfrak{d} - \frac{\cos h \cdot \cos H \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2} y}{\sin \frac{1}{2}(d + H - h) \sin 1''}.$$

Azimuthe der Sonne bedeutet, welche den beobachteten Zeiten für $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ entsprechen.

Im Dreiecke ZSS' sind die Seiten ZS, ZS' und der Winkel SZS' bekannt und es lässt sich die Seite $S'S$ und der Winkel ZSS' bestimmen; im Dreiecke $S'SP$ sind also alle drei Seiten gegeben und man kann den Winkel $S'SP$ berechnen. Dadurch sind im Dreiecke SZP die Seiten ZS, $SP = \mathfrak{d}$ und der Winkel ZSP gegeben, weil ZSP aus zwei bekannten Winkeln ZSS' und $S'SP$ besteht; es wird also möglich sein, die Seite $ZP = 90°-h$ und den Winkel $SZP = y$ zu berechnen, wo h die scheinbare Höhe des Objects und y den Unterschied der Azimuthe der Sonne und des Objects bedeuten. Die strenge Auflösung der Aufgabe ist aber weitläufig; wegen der Kleinheit der Höhe h des irdischen Objects wird es viel bequemer sein, auf folgende, von Herrn C. Knorre vorgeschlagene Art h und y mit hinreichender Annäherung zu bestimmen.

Wir nehmen an, dass die scheinbaren Höhen H, H' und die Azimuthe a, a' der Sonne den Distanzen $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ des irdischen Objects von der Sonne entsprechen. Es sei x das Azimuth des Objects; werden a, a', x in einer Richtung bis 360° gezählt und $a'-a = b$ gesetzt, so bezeichnen $x-a$ und $x-a'$ oder $x-a-b$ die Unterschiede der Azimuthe des Objects und der Sonne. Wenn wir $x-a = y$ setzen, so entstehen die Gleichungen

$$\cos\mathfrak{d} = \sin h.\sin H + \cos h \cos H \cos y$$
$$\cos\mathfrak{d}' = \sin h.\sin H' + \cos h \cos H' \cos(y-b).$$

Bestimmen wir die Winkel β und β' aus den Gleichungen:

$$\cos\beta = \frac{\cos\mathfrak{d}}{\cos H}, \quad \cos\beta' = \frac{\cos\mathfrak{d}'}{\cos H'},$$

so sind β und β' die genäherten Werthe von y und $y-b$, da h einen kleinen Winkel bedeutet. Bei der Berechnung der Sextantenbeobachtungen kann man $\cos h = 1$, $\sin h = h \sin 1''$ annehmen; man erhält dann:

$$y - \beta = \frac{h.tg H}{sin \beta}; \quad y - b - \beta' = \frac{h tg H'}{sin \beta'} \; \ldots \; ^{*}).$$

Es sei

$$\frac{tg H}{sin \beta} = tg \omega, \quad \frac{tg H'}{sin \beta'} = tg \omega';$$

hieraus findet man:

$$h = \frac{(b + \beta' - \beta)}{sin(\omega - \omega')} cos \omega \, cos \omega',$$

$$y = \beta + \frac{(b + \beta' - \beta)}{sin(\alpha - \omega')} sin \omega . cos \omega'.$$

Um die scheinbaren Sonnenhöhen zu berechnen, ist es nöthig, die Angabe des Thermometers und Barometers zu bemerken, damit eine genaue Bestimmung der Refraction möglich wird.

Bestimmung der geographischen Länge durch Messung von Monddistanzen.

28. Der Winkel, welcher zwischen zwei Gesichtslinien enthalten ist, die vom Auge eines Beobachters nach dem Monde und der Sonne, oder einem anderen Gestirne gehen, heisst gewöhnlich die Monddistanz, und diese wird sich wegen der raschen Bewegung des Mondes sehr schnell ändern. Wenn die Parallaxe und Strahlenbrechung keine Wirkung auf diesen Winkel

---

*) Will man die Annäherung weiter treiben, so ist in Secunden

$$y - \beta = \frac{h.tg H}{sin \beta} - \frac{h^2 sin 1''}{2} cotg \beta \left(1 + \frac{tg^2 H}{sin^2 \beta}\right)$$

$$y - b - \beta' = \frac{h.tg H'}{sin \beta'} - h^2 sin 1'' cotg \beta' \left(1 + \frac{tg^2 H'}{sin^2 \beta'}\right)$$

anzunehmen.

äusserten, und man an zwei verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche eine und dieselbe Monddistanz zu bekannten Zeiten gemessen hätte, so würde man die geographische Längendifferenz dieser beiden Orte direct finden können, weil die Längendifferenz nur den Unterschied der gleichnamigen Zeiten (mittleren, wahren oder Sternzeiten), die an verschiedenen Orten in demselben physischen Momente gezählt werden, ausdrückt. Solche Monddistanzen, die vom Einflusse der Parallaxe und Strahlenbrechung befreit sind, heissen wahre*), und in unseren heutigen astronomischen Ephemeriden werden sie für alle Tage im Jahre im Jahre im Voraus angegeben, wenn ihre Benutzung überhaupt möglich ist. Um nun den Längenunterschied zu erhalten, so vergleicht man diese Angaben der Ephemeriden mit der wahren Distanz, welche aus den Beobachtungen auf folgende Weise abgeleitet werden kann. Gewöhnlich misst man die Distanzen zwischen den nächsten Rändern des Mondes und der Sonne; legt man dann zu der gefundenen Distanz dieser Ränder die Summe der scheinbaren Halbmesser des Mondes und der Sonne hinzu, so erhält man die scheinbare Distanz zwischen den Mittelpunkten der Gestirne. Es sei nun Z (Fig. 33) das Zenith des Beobachtungsorts, L' der scheinbare und L der wahre Ort des Mondcentrums, S' und S der scheinbare und wahre Ort der Sonne; nimmt man nun zuerst die Erde als kugelförmig an, so wird L auf der Ebene des Verticalkreises liegen, nämlich auf ZL', und ebenso wird S auf der Ebene des Verticalkreises ZS' liegen;

---

*) Bezeichnet man durch δ die wahre Distanz zwischen den Mittelpunkten des Mondes und eines andern Gestirns für irgend eine gegebene mittlere Zeit des Meridians der Tafel; durch α und A die entsprechenden wahren geraden Aufsteigungen, und durch δ und D die wahren geraden Declinationen der Mittelpunkte dieser Gestirne, für dieselbe obige Zeit berechnet, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke, welches vom Pole des Aequators und den beiden wahren Orten der Gestirne gebildet wird, die Gleichung:

$$\cos \delta = \sin \delta \sin D + \cos \delta \cos D \cos (\alpha - A).$$

dabei ist L näher am Zenith als L', weil die Parallaxe des Mondes immer grösser als die Strahlenbrechung sein wird; dagegen wird S weiter vom Zenithe abliegen als S', weil die Sonnenparallaxe kleiner als die Strahlenbrechung ist. Der Bogen $L'S' = \delta'$ ist die bekannte scheinbare Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne, mit Hülfe welcher die wahre Distanz beider $= LS = \delta$ berechnet werden muss. Es sei nun: $ZL' = 90° - h'$; $ZL = 90° - h$; $ZS' = 90° - H'$; $ZS = 90° - H$. Aus der Vergleichung der beiden sphärischen Dreiecke ZLS und $ZL'S'$, in welchen der Winkel $LZS = L'ZS'$, hat man nun sogleich:

$$\frac{\cos\delta - \sin h \sin H}{\cos h \cos H} = \frac{\cos\delta' - \sin h' \sin H'}{\cos h' \cos H'},$$

mithin auch durch eine einfache Transformation:

$$\frac{\cos\delta + \cos(h+H)}{\cos h \cos H} = \frac{\cos\delta' + \cos(h'+H')}{\cos h' \cos H'} \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Setzt man nun $\delta' + h' + H' = 2p$, so hat man:

$$\cos\delta' + \cos(h'+H') = 2\cos p \cos(p - \delta');$$
$$\cos\delta = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\delta;$$
$$\cos(h+H) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}(h+H) - 1.$$

Folglich erhält man:

$$\frac{2\cos^2\frac{1}{2}(h+H) - 2\sin^2\frac{1}{2}\delta}{\cos h \cos H} = \frac{2\cos p \cos(p-\delta')}{\cos h' \cos H'},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\delta = \cos^2\tfrac{1}{2}(h+H) - \frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'}\cos p \cos(p-\delta').$$

Da nun $\sin^2\frac{1}{2}\delta$ stets ein positiver Werth sein muss, so wird das zweite Glied auf der rechten Seite der Gleichung kleiner als das erste werden müssen, und folglich wird man stets einen Hülfswinkel M so nehmen können, dass:

$$\sin M = \frac{2}{\cos\frac{1}{2}(h+H)}\sqrt{\frac{\cos h \cos H}{\cos h' \cos H'}\cos p \cos(p-\delta')} \quad . \quad . \quad (B)$$

ist; alsdann wird aber:

$$\sin \tfrac{1}{2} \delta = \cos \tfrac{1}{2}(h + H) \cos M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C).$$

Diese beiden letzten Gleichungen bilden die Auflösung der Aufgabe; sie wurden zuerst in dieser Gestalt von Borda entwickelt und sind zur Rechnung sehr bequem. Wenn drei Beobachter mit drei Instrumenten beobachten, so kann man die scheinbaren Höhen h' und H' zu gleicher Zeit mit der Monddistanz messen, worauf man dann mit Hülfe dieser Höhen, der Horizontalparallaxen und des beobachteten Barometer- und Thermometerstandes die wahren Höhen h und H sogleich finden kann. Gewöhnlich wird man jedoch h, h', H und H' lieber durch eine directe Berechnung bestimmen. Kennt man nämlich die Breite des Beobachtungsorts, die Zeit der Beobachtung und ebenso die genäherte Länge des Orts, so sucht man aus der astronomischen Ephemeride die wahren geraden Aufsteigungen, Abweichungen, Parallaxen und Halbmesser der Gestirne für den Beobachtungsmoment; alsdann giebt uns der Unterschied zwischen der Sternzeit der Beobachtung und den entsprechenden geraden Aufsteigungen der Gestirne, die Stundenwinkel dieser Gestirne selbst; darauf bestimmt man aber nach den in § 27, S. 788 angegebenen Formeln die wahren Höhen der Mittelpunkte der Gestirne, und dadurch erhält man dann die Parallaxen in Höhe und die Strahlenbrechungen; legt man nun die Strahlenbrechungen zu den wahren Höhen hinzu und zieht die Höhenparallaxen davon ab, so erhält man endlich die scheinbaren Höhen der Gestirne.

Die Formeln von Borda geben $\frac{1}{2}\delta'$ und fordern den Gebrauch von sieben-, oder wenigstens von sechsstelligen Logarithmen; der Unterschied $\delta' - \delta$ aber ist immer kleiner als 1°, und es scheint vortheilhafter, nicht δ', sondern $\delta' - \delta$ direct zu bestimmen.

Es sei (Fig. 33) $S'L = \delta''$, $SL = \delta$ und $\delta'' - \delta = x$; dann ist x der Unterschied zwischen der Distanz, die den wahren Ort S'' der Sonne mit dem scheinbaren Ort des Mondes ver-

bindet, und der gemessenen Distanz. Wird der Winkel $ZSL = S$ und der Winkel $ZLS = L$; der Bogen $SS' = s$ und der Bogen $LL' = l$ angenommen, so erhalten wir aus dem Dreiecke $S'LS$:

$$\cos\delta'' = \cos(\delta + x) = \cos s \cos\delta - \sin s . \sin\delta \cos S.$$

Da s und x nur einige Minuten, oft nur einige Secunden betragen, so kann man $\sin s = s . \sin 1''$, $\sin x = x \sin 1''$, $\cos s = 1 - \frac{1}{2} s^2 \sin^2 1''$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2$ annehmen; man hat dann in Secunden:

$$x = s \cos S + \tfrac{1}{2} \sin 1'' . \cot\delta . s^2 \sin^2 S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Es sei der Winkel $SLS' = \xi$; aus dem Dreiecke LSS' finden wir

$$\sin\xi = \frac{\sin s . \sin S}{\sin\delta''}, \text{ oder nahezu } \xi = \frac{s . \sin S}{\sin\delta''} \quad . \quad . \quad (2).$$

Dann ist im Dreiecke $S'L'L$ der Winkel $L'LS' = L + \xi$; wird $L'S' = \delta' = \delta'' + y$ gesetzt, so ist

$$\cos\delta' = \cos(\delta'' + y) = \cos l \cos\delta'' + \sin l \sin\delta'' \cos(L + \xi),$$

oder

$$\sin y = -\sin l . \cos(L + \xi) + \cot\delta'' (\cos y - \cos l).$$

Da nun y bis $55'$ steigen kann, so werden wir, um y bis auf einen Bruch der Secunde sicher bestimmen zu können:

$$\sin l = l \sin 1'' - \tfrac{1}{6} l^3 \sin^3 1'', \quad \sin y = y \sin 1'' - \tfrac{1}{6} y^3 \sin^3 1'',$$

$$\cos l = 1 - \frac{l^2 \sin 1''}{2}, \qquad \cos y = 1 - \frac{y^2 \sin^2 1''}{2}$$

annehmen, wo l und y in Secunden auszudrücken sind.

Nach einigen leichten Reductionen finden wir

$$y = -l \cos(L + \xi) + \tfrac{1}{2} \sin 1'' \cot\delta'' l^2 \sin^2(L + \xi)$$
$$+ \tfrac{1}{6} \sin^2 1'' . l^3 \cos(L + \xi) \sin^2(L + \xi)(1 + 3 \cot^2\delta'') \; . \; . \; (3).$$

Wenn wir $l = 0°55' = 3300''$, $L + \xi = 57°$, $\delta'' = 20°$ setzen, so ist das Glied erster Ordnung $1797'',3$, das Glied

zweiter Ordnung 51″,01 und das Glied dritter Ordnung noch 1″,19; meistens aber ist dieses Glied kleiner.

Zur Berechnung der Winkel L und S kann man folgende Formeln anwenden:

$$\sin k = \cos\delta . \sin h, \quad \sin K = \cos\delta \sin H$$

$$\cos L = \frac{2 \sin\frac{1}{2}(H-k)\cos\frac{1}{2}(H+k)}{\cos h . \sin\delta},$$

$$\cos S = \frac{2 \sin\frac{1}{2}(h-K)\cos\frac{1}{2}(h+K)}{\cos H \sin\delta},$$

oder

$$p = \frac{H+h+\delta}{2}$$

gesetzt, hat man

$$\sin L = \frac{Q}{\cos h \sin\delta}, \quad \sin S = \frac{Q}{\cos H \sin\delta},$$

$$Q = \sqrt{\cos p \cos(p-\delta) \sin(p-H) \sin(p-h)}.$$

Man muss L bis auf eine oder zwei Secunden und S bis auf 0′,1 genau berechnen.

Hat man x und y nach den Formeln (1), (2) und (3) gefunden, so ist

$$\delta'' = \delta + x, \quad \delta' = \delta'' + y.$$

29. **Berechnung der scheinbaren Halbmesser der Gestirne.** Bezeichnet man durch r den wahren Halbmesser des Mondes, durch r' aber seinen scheinbaren Halbmesser, so besteht zwischen beiden folgende Relation: $r' = r \cos(h-y) \sec h$, wo h die wahre Höhe des Mondes, und y die entsprechende Höhenparallaxe ist. Uebrigens wird in den meisten Hülfstafelsammlungen der Werth $r'-r$ oder die Vergrösserung des Mondhalbmessers, welche jeder Mondhöhe entspricht, gegeben. Diese Correction ist nur beim Monde merklich, bei allen anderen Gestirnen dagegen kann man sie ohne Weiteres vernachlässigen.

Es giebt aber noch eine andere Correction des scheinbaren Halbmessers der Gestirne, welche zuweilen sehr merklich werden kann, und von dem Unterschiede der Strahlenbrechung beim Ober- und Unterrande der Gestirne abhängt. Da die scheinbare Grösse der Durchmesser des Mondes und der Sonne nur ungefähr einen halben Grad ausmacht, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, dass der Unterschied der Strahlenbrechungen bei den verschiedenen Punkten am Umfange der Sonnen- und Mondscheibe sich der Höhendifferenz dieser Punkte proportional ändert. Ohne Strahlenbrechung würden die Gestirne als Kreisscheiben erscheinen; aber in Folge der Strahlenbrechung müssen alle verticalen Sehnen der scheinbaren Sonnen- oder Mondscheibe der Grösse dieser Sehnen selbst proportional verkleinert werden; jede horizontale Sehne aber bleibt dabei unverändert, und folglich nimmt das Gestirn die Gestalt einer Ellipse an, deren grosse Halbachse $= r' =$ dem scheinbaren Halbmesser des Gestirns, horizontal ist; der kleine aber $= r' - (\varrho - \varrho')$ vertical ist; ϱ ist dabei die Refraction für die Höhe des Unterrandes, und ϱ' diejenige für die Höhe des Oberrandes, so dass ϱ stets grösser als ϱ' ist. Die Abplattung dieser Ellipse ist $= \frac{\varrho - \varrho'}{2r'}$ und immer sehr klein. Aus den bekannten Eigenschaften der Ellipse folgt nun, dass, wenn man alle Potenzen der Abplattung, welche höher als die erste sind, vernachlässigt und durch $\mathfrak{r}$ irgend einen Halbmesser dieser kleinen Ellipse bezeichnet, welcher mit der kleinen oder verticalen Halbachse einen Winkel $= \psi$ bildet, man hat:

$$\mathfrak{r} = r' - \tfrac{1}{2}(\varrho - \varrho') \cos^2 \psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (D).$$

Dieser Winkel ψ liegt nun zwischen dem Verticalkreise, der vom Zenithe aus nach dem Centrum desjenigen Gestirnes geht, dessen Radius r ist, und dem Bogen des Kreises, der die Mittelpunkte beider Gestirne verbindet. Wenn z. B. das dem Horizonte näher gelegene Gestirn der Mond ist, das andere, aber

höher gelegene, die Sonne ist, so folgt aus dem sphärischen Dreiecke $S'ZL'$ (Fig. 33):

$$\cos\psi = \frac{\sin h' - \sin H' \cos \delta'}{\cos H' \sin \delta'},$$

oder:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\psi = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(H' + \delta' - h)\cos\tfrac{1}{2}(H' + \delta' + h'}{\cos H' \sin \delta'}.$$

Zur Berechnung dieses Winkels sind vierstellige Logarithmen vollkommen genügend. Die scheinbare Distanz der Mittelpunkte beider Gestirne oder δ' wird gefunden, wenn man zur beobachteten Distanz der Ränder die Summe derjenigen scheinbaren Halbmesser der Gestirne zulegt, die auf dem grössten Kreisbogen liegen, der beide Gestirne verbindet; folglich ist $\mathfrak{r}$ der Werth des Halbmessers, den man in der Rechnung statt r' brauchen muss, wo r' den scheinbaren horizontalen Halbmesser bedeutet, der schon nach § 29, S. 798 für die entsprechende Höhe des Gestirns über dem Horizonte berechnet ist. Die Correction, welche von der Strahlenbrechung herrührt, wird nur dann merklich werden, wenn die Höhe des Gestirns über dem Horizonte kleiner als 15° ist; in allen anderen Fällen ist sie beinahe verschwindend klein.

30. Einfluss der Gestalt der Erde auf die Berechnung der Monddistanz. Die Annahme, dass die Erde eine kugelförmige Gestalt hat, wird zwei Fehler hervorrufen; denn

1) wird die in dieser Voraussetzung berechnete Höhenparallaxe ungenau sein, weil man bei ihrer Berechnung sich der scheinbaren Distanzen der Gestirne vom geocentrischen Zenith bedienen soll, und nicht ihrer Distanzen, die vom scheinbaren Zenithe, oder von der Richtung der Lothlinie abgerechnet werden; und
2) wird die dabei angenommene Gleichheit der Winkel SZL und $S'ZL'$ (Fig. 33) nicht stattfinden, denn die Parallaxe führt den Mond aus der Verticalebene heraus, und

folglich wird $L'ZS'$ oder der Unterschied der scheinbaren Azimuthe des Mondes und der Sonne, nicht gleich dem Unterschiede LZS des wahren Azimuths dieser beiden Gestirne sein können. Die hier folgende Methode, um bei dieser Berechnung den Einfluss der wahren Gestalt der Erde mit hinreichender Genauigkeit zu berücksichtigen, rührt von Borda her.

Bezeichnet man durch Π die Aequatorial-Horizontalparallaxe des Mondes, durch μ die Erdabplattung und durch φ' die Breite des Beobachtungsorts, so berechnet man den Werth $\Pi(1+\mu \sin^2\varphi)$, welchen man statt der Horizontalparallaxe des Mondes annehmen muss; hat man damit die wahre Monddistanz $\mathfrak{d}$ berechnet, so muss man zu dem gefundenen $\mathfrak{d}$ die Correction:

$$2\mu . \Pi' \sin\varphi \left\{\frac{\sin D}{\sin \mathfrak{d}} - \cot g\, \mathfrak{d} . \sin\delta\right\},$$

hinzulegen, wo $\Pi' = \Pi(1+\mu \sin^2\varphi)$, δ die Declination des Mondes und D die Declination der Sonne ist.

Auf eine ähnliche Weise werden auch die Monddistanzen von Fixsternen und Planeten berechnet; für Fixsterne sind die scheinbaren Halbmesser und die Parallaxen gleich Null; in Betreff der Planeten werden wir unten einige Bemerkungen anführen und wenden wir uns zunächst zu einer sehr einfachen Erläuterung der Borda'schen Rechnungsart.

Man reducirt zuerst die scheinbare Monddistanz $\mathfrak{d}$ auf diejenige Distanz $\mathfrak{d}'$, welche aus dem Durchschnittspunkte der Umdrehungsachse der Erde mit der Normalen oder Verticallinie des Beobachters gesehen werden könnte; deswegen wird $\Pi(1+\mu \sin^2\varphi)$ statt der Horizontalparallaxe angewandt, da die Normale zum Radius der Erde am Beobachtungsort sich verhält wie $1+\mu \sin^2\varphi : 1$. Um $\mathfrak{d}'$ auf die geocentrische Monddistanz $\mathfrak{d}$, zu reduciren, werden wir den genannten Durchschnittspunkt N und die Normale, oder die Entfernung des Beobachtungsorts von N, n nennen. Es sei α und δ die geocentrische, α' und δ' die aus dem Punkte

N gesehene Rectascension und Declination des Mondes; wenn C (Fig. 34) den Mittelpunkt und P den dem Beobachter nächsten Pol der Erde, L den Mittelpunkt des Mondes bezeichnen, so liegen die Geraden CL und NL in der Ebene desselben Declinationskreises; man hat also $\alpha = \alpha'$; die Declinationen sind aber verschieden. Der Winkel PCL ist $= 90° - \delta$ und der Winkel $PNL = 90° - \delta'$, so dass der Winkel $CLN = \delta' - \delta$ sein muss.

Wenn φ die Polhöhe, n die Normale des Beobachtungsorts und e die Excentricität der Erdmeridiane bedeuten, so ist

$$CN = n \,.\, e^2 \sin\varphi.$$

Aus dem Dreiecke LCN hat man

$$\sin CLN = \frac{CN}{CL} \cdot \sin PNL;$$

nun ist nahezu $\frac{CN}{CL} = \frac{n \,.\, e^2}{CL} \sin\varphi = \sin \Pi \,.\, e^2 \sin\varphi$; da $\delta' - \delta$ klein ist und $PNL = 90° - \delta'$ ist, so kommt

$$\delta - \delta' = -\Pi \,.\, e^2 \sin\varphi \cos\delta'.$$

Sind A und D die Rectascension und Declination der Sonne, so wird

$$\cos \mathfrak{d}' = \sin\delta' \sin D + \cos\delta' \cos D \cos(\alpha' - A).$$

Differenziiren wir diese Gleichung in Bezug auf $\mathfrak{d}'$ und δ', setzen dabei $d\delta' = \delta - \delta'$, so giebt $d\mathfrak{d}'$ die verlangte Reduction oder $\mathfrak{d}_{,} - \mathfrak{d}'$; wir finden auf diese Weise

$$-\sin\mathfrak{d}' \,.\, (\mathfrak{d}_{,} - \mathfrak{d}') = [\cos\delta' \sin D - \sin\delta' \cos D \cos(\alpha' - A)]\,(\delta - \delta').$$

Da aber

$$\cos D \cos(\alpha' - A) = \frac{\cos\mathfrak{d}' - \sin\delta' \sin D}{\cos\delta'}$$

und nahezu $e^2 = 2\mu$ ist, so kommt, wenn für $\delta - \delta'$ sein Werth eingesetzt wird,

$$\mathfrak{d}_, - \mathfrak{d}' = 2\mu \Pi \sin\varphi \left(\frac{\sin D}{\sin \mathfrak{d}'} - \sin\delta' \cot g\, \mathfrak{d}'\right),$$

wo man ohne merklichen Fehler $\mathfrak{d}$ statt $\mathfrak{d}'$ und δ statt δ' annehmen kann, wodurch die Borda'sche Formel entsteht.

Der mittlere Werth von Π ist $57' 2''$; $2\mu = \frac{1}{147}$; also $2\mu\Pi$ ist ungefähr $23''$.

Hat man nun die wahre geocentrische Winkeldistanz $\mathfrak{d}_,$ des Mittelpunktes des Mondes von dem anderen Gestirn berechnet, so kann man vermittelst genauer Interpolation aus einer astronomischen Ephemeride die mittlere Zeit T an dem Meridiane dieser Ephemeride finden, zu welcher die wahre Distanz der beiden Gestirne den Werth $\mathfrak{d}_,$ hatte; dann wird der Unterschied zwischen dieser Zeit T und der entsprechenden mittleren Zeit am Beobachtungsorte, die gesuchte Länge des Orts, von jenem Meridiane abgezählt, bestimmen, welche östlich sein wird, wenn die Beobachtungszeit grösser als T, und westlich im entgegengesetzten Falle sein wird.

Benutzt man den englischen Nautical Almanac, so bedeutet T die mittlere Greenwicher Zeit, und mit Hülfe der besonders dazu bestimmten Tafel wird T sehr leicht gefunden. Es seien d°, d', d'' die im Nautical Almanac angezeigten wahren Monddistanzen zur Zeit T°, $T^\circ + 3^{St.}$, $T^\circ + 6^{St.}$, so dass d° dem $\mathfrak{d}_,$ zunächst vorangeht und d' dem $\mathfrak{d}_,$ zunächst nachfolgt. Setzen wir $T = T^\circ + x.3^{St.}$; $d' - d^\circ = \Delta'$; $d'' - d' - (d' - d^\circ) = \Delta^{(2)}$, so folgt aus der bekannten Interpolationsformel, dass

$$x = \frac{(\mathfrak{d}_, - d^\circ)}{\Delta'} - \tfrac{1}{2}\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta'} x(x-1)$$

ist. Da der Bruch $\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta'}$ immer sehr klein ist, so wird $\frac{\mathfrak{d}_, - d^\circ}{\Delta'}$ den genäherten Werth von x ausdrücken. Das gesuchte Zeitintervall ist $x.3^{St.}$; es sei t und $t^{(h)}$ dasselbe Intervall in Secunden und in Stunden ausgedrückt; da drei Stunden 10800 Secunden enthalten, so wird $t = x.10800$ und $t^{(h)} = x.3^{St.}$ sein müssen; man erhält also

$$t = (\mathfrak{d}_{,} - d^{\circ}) \cdot \frac{10800}{\varDelta'} - \tfrac{1}{2} \frac{\varDelta^{(2)}}{\varDelta'} \cdot 10800 \cdot \frac{t^{(h)}}{3} \left(\frac{t^{(h)}}{3} - 1 \right),$$

wo statt $t^{(h)}$ sein genäherter Werth $\frac{(\mathfrak{d}_{,} - d^{\circ})}{\varDelta'} \cdot 3$ angenommen werden kann.

Unter dem Namen „Proportional-Logarithmus" giebt der Nautical Almanac den $log \frac{10800}{\varDelta'}$, dem d° gegenüber; da die Charakteristik immer Null bleibt, so ist sie nicht angezeigt. Der nächstfolgende Proportional-Logarithmus ist $log \frac{10800}{\varDelta' + \varDelta^{(2)}}$; die Differenz derselben (Vorangehender von dem Nächstfolgenden abgezogen) ist:

$$log \frac{10800}{\varDelta' + \varDelta^{(2)}} - log \frac{10800}{\varDelta'} = -log \left(1 + \frac{\varDelta^{(2)}}{\varDelta'} \right)$$
$$= -0{,}434295 \frac{\varDelta^{(2)}}{\varDelta'} - \ldots$$

Wegen der Kleinheit von $\frac{\varDelta^{(2)}}{\varDelta'}$ kann man die zweite und die höheren Potenzen von $\frac{\varDelta^{(2)}}{\varDelta'}$ vernachlässigen. Wird $\frac{\varDelta^{(2)}}{\varDelta'}$ aus der letzten Gleichung bestimmt und in dem Ausdrucke von t eingesetzt, so kommt endlich (in Secunden):

$$t = (\mathfrak{d}_{,} - d^{\circ}) \frac{10800}{\varDelta'}$$
$$+ \frac{10800}{0{,}86859} \cdot \left(\begin{matrix} \text{Diff. der entspr.} \\ \text{Proport.-Logar.} \end{matrix} \right) \frac{t^{(h)}}{3} \left(\frac{t^{(h)}}{3} - 1 \right);$$

hier ist $t^{(h)} = \frac{t}{3600}$. Hat man $(\mathfrak{d}_{,} - d^{\circ}) \frac{10800}{\varDelta'}$ mit Hülfe des Proportional-Logarithmus berechnet, so findet man das letzte kleine Glied im Ausdrucke von t, oder die Correction im Nautical Almanac in einer besonderen Tafel, mit den Argumenten $t^{(h)}$ und der Differenz der Proportional-Logarithmen.

Um die wahre Monddistanz aus der direct beobachteten herzuleiten, hat Bessel eine andere sehr sinnreiche Methode vorgeschlagen, welche ganz streng ist (Astronomische Nachrichten,

Bd. X, S. 17—62); man findet diese Methode auch in einem russischen Werke von Knorre, mit vielen dazu gehörigen Zusätzen entwickelt, welche zu Anfang des Jahres 1837 in Nicolaew erschien. Da jedoch bisher die nöthigen Hülfstafeln noch nicht herausgegeben sind, ohne welche diese Methode bei ihrer Anwendung eine ziemlich weitläuftige Berechnung erfordert, so unterlassen wir hier ihre Auseinandersetzung.

Beispiel. Auf der St. Petersburger akademischen Sternwarte wurden am 1. Januar 1846, mit Hülfe eines Throughton'schen Sextanten, folgende Beobachtungen angestellt:

Uhrzeit nach der Pendeluhr von Lepaute	Distanz zwischen den nächsten Rändern des Mondes und der Sonne	Barometer = 29,38 englische Zoll oder = 27′6″,8 Pariser Mass
$1^h 53^m 30^s$	49° 10′ 30″	Inneres Thermometer
54 47	10 58	= +3°,0 Réaumur
56 11	11 33	Aeusseres Thermometer
57 34	12 5	= −3°,8 Réaumur.
58 43	12 30	
$1^h 56^m 9^s,0$	49° 11′ 31″,2 = Mittel.	

Die Uhr war gegen mittlere St. Petersburger Zeit um $7^m 10^s,0$ zu spät; der Indexfehler, sowohl vor als nach den Beobachtungen bestimmt, war = +5′49″; und folglich findet man, dass um $2^h 3^m 19^s,0$ mittlere St. Petersburger Zeit, die scheinbare Monddistanz = 49° 17′ 20″,2 = $\mathfrak{d}'$ war.

Mit der vorläufig angenommenen Länge St. Petersburgs von Greenwich = $2^h 1^m 16^s$ findet man, dass zur Zeit unserer Beobachtung die mittlere Zeit in Greenwich = $0^h 2^m 3^s$ war, und aus dem Nautical Almanac findet man damit:

Gerade Aufsteigung des Mondes	Declination des Mondes	Aequatorial-Horizontal-parallaxe	Mondes-Halbmesser
$22^h 4^m 9^s,41$	−6° 38′ 9″	Π = 60′ 2″,2	16′ 21″,6

Sonnen-Declination	Horizontal-Parallaxe der Sonne	Halbmesser der Sonne	Zeit-gleichung
$-23°1'11'',4$	$+8'',7$	$16'17'',3$	$-3^m 50^s,4$

(—) zeigt hier an, dass die Declination südlich war, und dass die wahre Sonnenzeit später als die mittlere war. Man bestimmt nun zuerst die Stundenwinkel der Gestirne:

St. Petersburger mittlere Zeit	=	$2^h\ 3^m\ 19^s,00$
Zeitgleichung	=	$-3\ 50,40$
Wahre Zeit	=	$1^h 59^m 28^s,60$

Folglich wird der westliche Stundenwinkel der Sonne in Graden ausgedrückt $= t$ . . . . $= 29°52'\ 9'',00$

Sternzeit im mittleren St. Petersburger Mittag	=	$18^h 42^m 41^s,45$
Mittlere Zeit der Beobachtung	=	$2\ \ 3\ \ 19.00$
Voreilung in $2^h 3^m 19^s$	=	$20,20$
Sternzeit der Beobachtung	=	$20^h 46^m 20^s,65$
Gerade Aufsteigung des Mondes	=	$22\ \ 4\ \ 9,41$
Oestlicher Stundenwinkel des Mondes . . .	=	$1^h 17^m 48^s,76$
oder in Graden $= t$	=	$19°27'11'',40$

Die Breite des Orts $\varphi = 59°56'31''$, und nun findet man nach den Formeln in § 27, S. 788, dass für den gegebenen Moment der Beobachtung die wahre Höhe des Sonnencentrums $= H = 3°30'51'',4$, die wahre Höhe des Mondes aber $= h = 21°39'36'',4$ war.

Bezeichnet man nun die Aequatorial-Horizontalparallaxe des Mondes durch Π, und will man nach der oben erwähnten Methode von Borda rechnen, so muss man bei der Berechnung eine Horizontalparallaxe gebrauchen, die $= \pi = \Pi(1 + \frac{1}{300} \sin^2 \varphi)$ ist; in unserem Falle wird $\pi = 60'11'',2$. Aus den Hülfstafeln, welche den Callet'schen Logarithmentafeln angehängt sind, findet man die entsprechende Höhenparallaxe $= 56'11'',4$; zieht

man diese darauf von der wahren Höhe des Mondes ab, so erhält man die erste genäherte Höhe des Mondes: 20°43′25″ $= h$☾, und dann leitet man daraus nach der Formel $= sin P$ $= sin \pi cos h$☾ die genaue Höhenparallaxe des Mondes $= P$ $= 56' 17'',6$ ab.

Die genäherte Strahlenbrechung kann man aus den Hülfstafeln nehmen, die den Anhang zu den Callet'schen Logarithmentafeln bilden, es wird nämlich dort die mittlere Strahlenbrechung für alle verschiedenen scheinbaren Höhen gegeben; aber da wir vorläufig nur die wahre Höhe minus Höhenparallaxe kennen, so muss man mit dieser Höhe die Strahlenbrechung aus der Tafel nehmen, sie zu jener hinzulegen, und dann erhält man auf diese Weise eine erste genäherte scheinbare Höhe, mit der man die Strahlenbrechung genauer suchen kann. Also hat man:

Wahre Höhe des Sonnencentrums . .	$= 3°30'51'',4 = H$;
Höhenparallaxe	$-8\ ,6$
Genäherte Refraction	$+12\ 30\ ,2$
Genäherte scheinbare Höhe	$= 3°43'13''$

Wahre Höhe des Mondcentrums. . .	$= 21°39'36'',4 = h$
Höhenparallaxe	$-56\ 17\ ,6$
Genäherte Refraction	$+\ 2\ 29\ ,0$
Genäherte scheinbare Höhe	$= 20°45'48''$

Mit diesen genäherten scheinbaren Höhen und den oben angegebenen Barometer- und Thermometerständen kann man aus den Peters'schen Hülfstafeln die genaue Strahlenbrechung bestimmen. Thut man dieses, so findet man die entsprechenden Strahlenbrechungen:

für die Sonne	für den Mond
12′57″,8	2′37″,9;

es wird daher:

	Sonne	Mond
Wahre Höhe der ☉	$=3°30'51'',4=H$	des ☾ $=21°39'36'',4=h$
Höhenparallaxe . .	$-8\ ,6$	$-56\ 17\ ,6$
Genaue Refraction	$+12\ 57\ ,8$	$+\ 2\ 37\ ,9$
Genaue schb. Höhe	$=3°43'40'',6=H'$	$=20°45'56'',7=h'$

Nach der Formel: $r'☾ = r☾.cos(h-P) sec h$ findet man den scheinbaren Halbmesser des Mondes $r'☾$; in unserem Falle wird $r'☾ = 16'27'',8$ und wegen der ziemlich grossen Höhe des Mondes über dem Horizonte braucht man die von der Strahlenbrechung abhängige Correction des Halbmessers nicht zu beachten. Die Sonne aber befand sich sehr nahe am Horizonte, so dass es durchaus nöthig sein wird, auf den Einfluss der Refraction auf den Halbmesser der Sonne Rücksicht zu nehmen. Nun ist aber der scheinbare Halbmesser der Sonne $= \mathfrak{r}☉ = r☉ - \frac{1}{2}(\varrho-\varrho')cos^2\psi$, wo $r☉$ der wahre Halbmesser der Sonne ist, ϱ die Strahlenbrechung für die scheinbare Höhe $H'-r☉$ des Unterrandes bezeichnet, und ϱ' die Strahlenbrechung für die scheinbare Höhe $H'+r☉$ des Oberrandes der Sonne; da nun $r☉$ nicht gross ist, und man nur die Differenz von $\varrho-\varrho'$ zu wissen braucht, so kann man ϱ und ϱ' aus einer Tafel der mittleren Refraction berechnen; ψ findet man dabei aus der oben in § 29, S. 800 angegebenen Formel, und dann hat man in unserem Falle:

$(\varrho-\varrho') = 39'',1;\ \psi = 65°48';\ \frac{1}{2}(\varrho-\varrho')cos^2\psi = 6'',5$ und $\mathfrak{r}☉ = 16'17'',3-6'',5 = 16'10'',8.$

Scheinbare Distanz der Ränder	$=$	$49°17'20'',2$
Scheinbarer Halbmesser des Mondes	$=$	$+16\ 27\ ,8$
Scheinbarer Halbmesser der Sonne	$=$	$+16\ 10\ ,8$
Scheinbare Distanz der Mittelpunkte $= \mathfrak{d}'$.	$=$	$49°49'58'',8$
Scheinbare Höhe der Sonne $= H'$	$=$	$3\ 43\ 40\ ,6$
Scheinbare Höhe des Mondes $= h'$	$=$	$20\ 45\ 56\ ,7$
$2p = \mathfrak{d}'+h'+H'$	$=$	$74°19'36'',1$
p	$=$	$37\ \ 9\ 48\ ,1$
$\mathfrak{d}'-p$	$=$	$12\ 40\ 10\ ,7$
$\frac{1}{2}(H+h)$	$=$	$12\ 35\ 13\ ,9$

$lg\,cos\,p =$	9,9014128	$M =$	$64°16'14'',5$
$lg\,cos(p - \mathfrak{d}') =$	9,9892945		
$lg\,cos\,h =$	9,9681979	$lg\,cos\,M =$	9,6376097
$lg\,cos\,H =$	9,9991828	$lg\,cos\,\frac{1}{2}(H+h) =$	9,9894345
$comp\,lg\,cos\,h' =$	0,0291709	$lg\,sin\,\frac{1}{2}\mathfrak{d} =$	9,6270442
$comp\,lg\,cos\,H' =$	0,0009199		
Summe $=$	39,8881788	$\frac{1}{2}\mathfrak{d} =$	$25°4'3'',1$
Halbe Summe $=$	19,9440894	$\mathfrak{d} =$	50 8 6 ,2
$lg\,cos\,\frac{1}{2}(H+h) =$	9,9894345		
$lg\,sin\,M =$	9,9546549		

Die Correction in $\mathfrak{d}$, welche von der Abplattung der Erde herrührt, berechnet man nach der Formel von Borda § 30, S. 801. In unserem Falle ist die Breite des Beobachtungsorts $= \varphi = 59°56'$; die Declination der Sonne $= \delta\odot = -23°1'$; die Declination des Mondes $= \delta☾ = -6°38'$; $\mathfrak{d} = 50°8'$, folglich:

$log\,22'',8 =$	1,3579	$log\,22'',8 =$	1,3579
$log\,sin\,\varphi =$	9,9457	$log\,sin\,\varphi =$	9,9457
$log\,sin\,\delta\odot =$	$9,5922_n$	$lg\,sin\,\mathfrak{d}☾ =$	$9,0626_n$
$comp\,log\,sin\,\mathfrak{d} =$	0,1168	$log\,cotg\,\mathfrak{d} =$	9,9266
$-10'',29$ . .	$1,0126_n$	$-1'',96$ . .	$0,2928_n$

Wir haben früher gefunden, dass: $\mathfrak{d}$	$=$	$50°8'\ 6'',20$
Erster Theil der Correction	$=$	$-10\ ,29$
Zweiter Theil der Correction	$=$	$+\ 1\ ,96$
Wahre Distanz	$=$	$50°7'57'',87$

Aus dem Nautical Almanac findet man, dass für die mittlere Grenwicher Zeit:

1845 December	31	um 21^h	war $\mathfrak{d}''$	$=$	$48°25'\ 6''$
1846 Januar	1	um 0^h	war $\mathfrak{d}''$	$=$	50 6 32
1846 Januar	1	um 3^h	war $\mathfrak{d}''$	$=$	51 47 38

Hieraus findet man durch scharfe Interpolation, dass zur wahren Distanz des Mittelpunkts des Mondes von der Sonne $= 50°7'57'',87$ am 1. Januar 1846 in Greenwich die mittlere

Zeit . . . . $= 0^h 2^m 32^s,8$ gehörte.
Entsprechende mittl. Zeit der Beobachtung $= 2\ 3\ 19,0$
Oestl. Länge St. Petersburgs von Greenwich $= 2^h 0^m 46^s,2$.

Man weiss, dass die genaue Länge $= 2^h 1^m 15^s,8$ ist, und folglich ist der Fehler unserer Bestimmung $= 29^s,6$ in Zeit; diese Abweichung wird theilweise hervorgerufen durch die Beobachtungs- und Instrumentalfehler, theilweise aber auch durch die Fehler der Mondtafeln; besonders aber dadurch, dass das eine Gestirn nahe am Horizonte war (in unserem Falle die Sonne). Dieser letztere Umstand ist für die Güte der Beobachtungen so ungünstig, dass man ihn, wenn es möglich ist, vermeiden muss; wir haben dieses Rechnungsbeispiel nur deswegen so vollständig durchgeführt, um deutlich die Anwendung aller unserer früher entwickelten Formeln auf jeden anderen Fall zu erläutern.

Allgemeine Bemerkungen. Die genaue Bestimmung der geographischen Länge eines Orts mit Hülfe von Monddistanzen hängt ab:

1) Von der Genauigkeit, mit welcher die mittlere Zeit der Beobachtung bekannt ist; und deshalb muss man ein zuverlässiges Chronometer haben, dessen Stand man gegen mittlere oder andere Zeit, immer kurz vor oder nach den Beobachtungen zu bestimmen hat.

2) Von der Genauigkeit der direct gemessenen Distanz der Ränder der Gestirne; hierzu ist es durchaus nothwendig, das Instrument genau zu berichtigen und nicht nur den Indexfehler, sondern auch andere Instrumentalfehler des gebrauchten Instruments so scharf als möglich zu bestimmen; besonders aber, wenn man einen Sextanten zur Messung dieser Distanz anwendet, darf man den Excentricitätsfehler nicht unberücksichtigt lassen.

3) Ungeachtet aller dieser Vorsichtsmassregeln wird es schwer sein, constante Fehler zu vermeiden, wesshalb man die Be-

obachtungen so einrichten muss, dass die Fehler sich grösstentheils gegenseitig aufheben. Diess erreicht man dadurch, dass man Distanzen des Mondes von Sternen beobachtet, die sich östlich und westlich in beinahe gleicher Entfernung vom Monde befinden, und ausserdem noch solche Sterne dazu wählt, deren Distanzen vom Monde sich am schnellsten ändern. Jedoch sind die Distanzen, die man zwischen Mond und Sonne beobachtet, weit genauer und auch bequemer zu messen, als diejenigen von Sternen, weil man das Berühren der Ränder mit vieler Schärfe beobachten kann, und da man ferner solche Beobachtungen zur Bestimmung der geographischen Länge meistens mit Sextanten anstellt, so muss man folglich gleiche und entgegengesetzte Monddistanzen westlich und östlich von der Sonne um die Zeit des ersten und letzten Viertels herum anstellen; das aus ihnen hergeleitete arithmetische Mittel für die Länge, wird nicht nur beinahe gänzlich von den Instrumentalfehlern unabhängig sein, sondern auch von der Ungenauigkeit der bei der Berechnung angenommenen Halbmesser der Gestirne; ebenso wird auch der Fehler der Mondtafeln, wenn auch nicht aufgehoben, doch wahrscheinlicher Weise sehr verkleinert werden, weil dieser Fehler im Laufe der Zeit sich seinem Werthe und Zeichen nach verschiedenartig verändert.

4) Man muss die Beobachtung gar zu grosser Monddistanzen sorgfältig zu vermeiden suchen, denn bei grossen Winkeln werden mehrere der constanten Instrumentalfehler des Sextanten einen merklichen Einfluss haben können.

5) Ein kleiner Fehler in den Höhen der Gestirne hat keinen merklichen Einfluss auf die Bestimmung der wahren Monddistanz aus der scheinbaren; die Parallaxen und Refractionen muss man aber so genau wie nur irgend möglich berechnen, und desshalb muss man vor dem Anfange und nach der Beendigung der Beobachtungen den Stand des Barometers und beider Thermometer sorgfältig ablesen. Da ferner in der Nähe des Horizonts das Bild eines Gestirns immer sehr unruhig ist und keine Präcision

hat, auch die entsprechende Refraction aus den Tafeln nicht genau bestimmt werden kann; so muss man solche Fälle beim Beobachten zu vermeiden suchen, wo das eine der beiden Gestirne näher an dem Horizonte als 12° ist.

6) Zuweilen misst man Monddistanzen von Planeten, und bezieht dabei die Distanz gewöhnlich nicht auf den Rand des Planeten, sondern auf die Mitte seines erleuchteten Theils, denn die Fernröhre in Reflexionsinstrumenten sind zu schwach, um die scheinbaren Planetenscheiben deutlich zu zeigen. Es ist aber leicht einzusehen, dass die Mitte des erleuchteten Theiles selten mit dem Centrum der Planetenscheibe zusammenfallen kann. Bei der Venus wird dieses Zusammenfallen sich sogar niemals ereignen und der Unterschied kann bedeutend werden; für die Planeten Mars, Jupiter und Saturn wird jedoch dieser Unterschied viel kleiner sein, und gänzlich verschwinden, wenn sie in Opposition mit der Sonne sind. In einigen astronomischen Ephemeriden wird übrigens auf diesen Umstand Rücksicht genommen, und in ihnen werden dann die Distanzen des Mondcentrums von der Mitte des sichtbaren erleuchteten Theiles des Planeten angegeben.

Der Prismenkreis von Pistor & Martins.

31. Im Jahre 1845 wurde von den Mechanikern Pistor & Martins in Berlin ein neues Reflexionsinstrument erfunden, welches ebenso bequem wie ein Sextant ist, nicht theurer ist als dieser, und dabei viele Vorzüge vor demselben hat; es wird daher nicht unnütz sein, eine kurze Beschreibung dieser Einrichtung zu geben, wie sie selbst von ihren Erfindern herrührt. Der Unterschied dieses neuen Kreises von den früheren Spiegelkreisen

besteht darin, dass bei diesem Instrumente, statt des unbeweglichen kleinen Spiegels, ein unbewegliches Glasprisma angebracht ist, in welches die vom beweglichen Spiegel reflectirten Strahlen einfallen, und darauf zweimal gebrochen und einmal vollständig im Inneren des Prismas reflectirt werden. Sie treten darauf ins Fernrohr und geben ein Bild, welches viel heller als dasjenige ist, welches von der Reflexion der Strahlen im zweiten, oder kleinen, unbeweglichen Spiegel bei Sextanten oder Spiegelkreisen hervorgebracht wird. In jeder anderen Beziehung ist das neue Instrument so ziemlich dem früheren ähnlich eingerichtet; aber es hat vor dem Sextanten folgende wesentlichen Vorzüge voraus:

1) kann man alle Winkel von 0° bis 180° damit messen;
2) werden diese Messungen ebenso bequem, aber genauer als die mit dem Sextanten sein, weil der Fehler, welcher von der Excentricität abhängt, durch das Ablesen der zwei entgegengesetzten Verniere am Kreise aufgehoben wird, wobei ferner das Instrument symmetrischer construirt und genauer zu berichtigen ist, als der Sextant;
3) sind die Bilder der Gegenstände in diesem Instrumente lichtstärker und schärfer begrenzt;
4) kann der Fehler der prismatischen Gestalt des grossen Spiegels vollständig eliminirt werden.

Auf Taf. VI, Fig. I stellt der Kreis *ABC* das Instrument vor, welches ungefähr 5 Zoll Radius hat. Mit Hülfe zweier sich diametral gegenüberliegenden Verniere, welche sich an den Enden der Alhidade *ac* befinden, kann man die Gradtheilung unmittelbar bis auf 20″, und bei einigen dieser Instrumente bis auf 10″ ablesen; durch Schätzung liest man sie noch genauer ab. Auf der Mitte der Alhidade *ac* ist ein Spiegel *de* senkrecht auf der Ebene des Kreises *ABC* befestigt; dieser Spiegel dreht sich zugleich mit der Alhidade um eine Achse herum, welche durch das Centrum des Kreises *ABC* geht und mit dessen Ebene *ABC* einen rechten Winkel bildet. In unserer Fig. I wendet der Spiegel seine reflectirende Seite gegen *B*;

f ist ein dreiseitiges, gleichschenkliges und rechtwinkliges Glasprisma, und *g* das Fernrohr. Das Prisma ist durch Schrauben ganz fest mit einem Radius des Limbuskreises verbunden, ist ungefähr um die Hälfte weniger hoch als der Spiegel, und senkrecht auf der Ebene des Kreises. Der Durchmesser des Objectivs des Fernrohrs ist weit grösser als die Höhe des Prismas, so dass, wenn man das Fernrohr auf einen entfernten Gegenstand richtet, man ihn im Fernrohre mit Hülfe derjenigen Strahlen erblickt, welche am Prisma vorbeifahrend in ersteres hineinfallen. Auf Taf. VI, Fig. I sieht man die Alhidade in derjenigen Lage, in welcher sie dem wahren Nullpunkt der Gradtheilung entspricht, d. h. wenn der Spiegel *de* der grösseren Seite des Prismas parallel ist. In diesem Falle werden die Strahlen eines sehr weit gelegenen Gegenstandes, auf welchen man das Fernrohr gerichtet hat, theilweise über die Oberfläche des Prismas hinweg ins Fernrohr treten und dadurch unmittelbar ein Bild des Gegenstandes im Gesichtsfelde desselben hervorbringen; die übrigen Strahlen aber, welche mit den ersteren parallel sind, werden auf den Spiegel *de* einfallen, von ihm zurückgeworfen werden und dann auf das Prisma einfallen, alsdann beim Eintritte in dieses gebrochen werden, darauf im Inneren des Prismas von einer längeren Seite vollständig zurückgeworfen werden, endlich noch einmal beim Austritte aus dem Prisma gebrochen werden und auf diese Weise den directen Strahlen parallel ins Fernrohr einfallen, indem sie im Gesichtsfelde dieses letzteren ein zweites Bild des Gegenstands hervorbringen, welches mit dem oben erwähnten directen Bilde des Gegenstands zusammenfällt; bei dieser Lage der Alhidade bildet der Strahl, welcher auf den Spiegel einfällt, mit diesem einen Winkel, der nahe $= 20°$ ist.

Dreht man nun die Alhidade weiter von 0° ab, nämlich nach *B* nach der Ordnung der Zunahme der Theilung, wie es in Fig. II, Taf. VI abgebildet ist, indem das Fernrohr auf den früheren Gegenstand gerichtet bleibt, so wird auf den Spiegel

de der Strahl eines anderen Gegenstands einfallen, aber dieser Gegenstand wird zur Rechten des früheren liegen. Nachdem die Strahlen dieses Gegenstands doppelt reflectirt und doppelt gebrochen worden sind, werden sie ins Fernrohr treten, und in dessen Gesichtsfelde ein Bild des zweiten beobachteten Gegenstands hervorrufen, welches mit dem Bilde des ersten direct gesehenen Gegenstands zusammenfällt; alsdann wird nun die doppelte Zahl von Graden, Minuten und Secunden, um welche man die Alhidade bewegt hat, den Winkel bestimmen, welcher zwischen beiden Gegenständen enthalten ist. Auf diese Weise kann man also Winkel 0° bis 120° ebenso, wie bei den Sextanten messen. Der letzte zur Rechten liegende Gegenstand, welchen man nach dieser Methode beobachten kann, ist derjenige, welcher eine solche Lage hat, dass seine Strahlen auf den Spiegel nahe unter einem Winkel von 85° einfallen; und dabei wird der Spiegel sich von seiner anfänglichen Lage von 0° bis 60° gedreht haben. Jedoch treten bei der Messung von Winkeln nahe an 130° und mehr, einige Hindernisse ein; in der Nähe von 130° verhindert das Prisma und das Fernrohr, sowie auch zugleich der Kopf des Beobachters, die Strahlen, die vom Gegenstande ausgehen, in den Spiegel zu gelangen. Wenn aber die Alhidade so bewegt wird, dass ihre Richtung um 90° von ihrer Lage beim wahren Nullpunkte 0° verschieden ist, so werden die vom Spiegel reflectirten aufs Prisma fallenden Strahlen, mit der Achse des Fernrohrs einen Winkel von 180° bilden, oder von einem Gegenstande ausgehen, der diametral demjenigen entgegengesetzt sein wird, welcher direct durchs Fernrohr erblickt wird, wie in Fig. III, Taf. VI deutlich zu sehen ist. Bewegt man die Alhidade weiter von 180° ab, so kann man Winkel zwischen 180° und 280°, oder mit anderen Worten Winkel, die zwischen 100° und 180° auf der entgegengesetzten Seite liegen, messen. In diesem Falle wird der Gegenstand, dessen Bild man durch Reflexion erblickt, zur Linken des Gegenstandes liegen müssen, der direct durchs Fernrohr erblickt wird, und wenn man die Winkelmessung bis 180°

in ganz derselben Ordnung wie von 0° bis 130° auszudehnen wünscht, so muss man das Instrument in die entgegengesetzte Lage bringen und folglich in diesem Falle mit der linken Hand halten. Die Winkel zwischen 80° und 130° kann man daher auf zweifache Weise messen, und wenn man beide Beobachtungen abwechselnd anstellt, so braucht man den Indexfehler nicht zu bestimmen; auch der Fehler, welcher von der prismatischen Gestalt des Spiegels abhängt, wird dadurch eliminirt.

Unter gewissen Umständen, z. B. bei der Messung grosser horizontaler Winkel, setzt man auf das Ocular des Fernrohrs ein kleines besonderes Glasprisma *E* auf (Fig. III, Taf. VI), und bei Sonnenbeobachtungen benutzt man Farbengläser, ähnlich denen des Sextanten; diese Gläser sind in der Nähe des Prismas angebracht und können in entgegengesetzten Lagen gebraucht werden. Uebrigens versteht es sich von selbst, dass alle nöthigen Schrauben zur Senkrechtstellung des Spiegels und Prismas an diesem Instrumente angebracht sind; sowie ebenfalls auch eine Vorrichtung um das Fernrohr der Ebene des Intruments parallel zu stellen, vorhanden ist; ausserdem kann man auch das Fernrohr etwas erhöhen oder erniedrigen (ohne den Parallelismus mit der Instrumentalebene zu stören), um etwa beiden Bildern nöthigenfalls, sowohl dem directen als reflectirten, gleiche Lichtstärke zu geben. Die Berichtigungen können nach ähnlichen Methoden gemacht werden, wie wir oben für den Sextanten erklärt haben.

Wir erwähnten schon vorher, dass, wenn die Alhidade dem wahren Nullpunkte der Theilung entspricht, der auf den Spiegel einfallende Strahl mit diesem einen Winkel von 20° bildet; alsdann wird das reflectirte Bild besonders schwach werden, und daher muss man den Spiegel durch die Beobachtung kleiner Winkel prüfen, und wenn man auf ähnliche Weise beobachtet, wie bei dem Sextanten, so wird man bemerken, dass, je grösser die Winkel sind, desto lichtstärker die reflectirten Bilder werden; denn alsdann werden die Strahlen immer unter grösseren Winkeln auf den Spiegel einfallen und dadurch die Reflexionen

vollständiger sein; wenn der gemessene Winkel nahe gleich 130°, so wird der Lichtstrahl mit dem Spiegel einen Winkel von sehr nahe = 85° bilden. Ganz das Gegentheil findet aber beim Sextanten statt; wenn nämlich bei diesem letzteren Instrumente die Alhidade auf 0° steht, so wird der vom grossen Spiegel reflectirte Strahl mit diesem einen Winkel von sehr nahe = 75° bilden; ist aber der beobachtete Winkel nahe an 130°, so wird der reflectirte Strahl mit dem Spiegel einen Winkel von nahe = 10° bilden. Hieraus sieht man, dass selbst der kleinste Winkel, unter welchem bei diesem Instrumente Lichtstrahlen vom beweglichen Spiegel zurückgeworfen werden können, noch einmal so gross als derjenige beim Sextanten ist. Folglich sind die reflectirten Bilder bei diesem Instrument lichtstärker als beim Sextanten; dies wird auch bei gleichen Neigungen der reflectirten Strahlen gegen den beweglichen Spiegel stattfinden, denn es ist bekannt, dass ein Spiegel immer weniger Licht reflectirt, als die innere Fläche eines Prismas, bei der die Reflexion eine totale ist.

Wir bemerken noch, dass die Richtigkeit des gemessenen Winkels von der streng rechtwinkligen und gleichschenkligen Gestalt des Prismas unabhängig ist; es ist nur erforderlich, dass die Seiten des Prismas genaue Ebenen sind, damit man deutliche und präcise Bilder des reflectirt gemessenen Gegenstandes bekommen kann.

Zweiter Anhang.

Von der Interpolation.

---

1. In den astronomischen Ephemeriden und Tafeln werden die Orte der Gestirne zu bestimmten Zeitepochen, welche von gleichen zu gleichen Zeitintervallen fortlaufen, angegeben. Will man den Ort eines Gestirns für irgend eine andere gegebene Zeit finden, so muss man sich dazu der Interpolation bedienen, unter welcher man diejenige Operation versteht, durch welche es möglich ist, mit Hülfe einiger gegebenen Grössen, die ein bestimmtes Gesetz befolgen, andere ähnliche Grössen nach beliebigen kleineren Intervallen einzuschalten. Hierbei wird vorausgesetzt, dass diese Grössen eine stetige Function einer andern unabhängigen veränderlichen Grösse bedeuten, so dass sie innerhalb entsprechender Grenzen nicht unendlich gross und nicht imaginär werden können. Die Zahlen, von denen die gegebenen Grössen Functionen sind, heissen ihre Argumente; in den astronomischen Ephemeriden ist das Argument meistentheils in Zeit.

Es seien die den Zeiten ... $T-4h$, $T-3h$, $T-2h$, $T-h$, T, $T+h$, $T+2h$, $T+3h$, $T+4h$ ... (wo h ein beliebiges nicht zu grosses Intervall bedeuten mag) entsprechen-

den gegebenen Lagen des Gestirns ... a_4, a_3, a_2, a_1, a_0, $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, $a^{(4)}$ ...; welche Symbole sowohl gerade Aufsteigungen als auch Abweichungen, oder irgend eine andere Funktion der Zeit bedeuten können, und es sei ... $a_{n-1} - a_n = b_n$; $b_{n-1} - b_n = c_n$; $c_{n-1} - c_n = d_n$; $d_{n-1} - d_n = e_n$ u. s. w.; dann würden b_n, c_n, d_n, e_n u. s. w. dasjenige ausdrücken, was man die erste (Δ^1), zweite (Δ^2), dritte (Δ^3) u. s. w. Differenz der Grössen a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3} u. s. w. nennt; dies findet sich anschaulicher in der folgenden Tafel für verschiedene Werthe dargestellt:

Zeit oder Argument	Grössen	Differenzen: erste $\Delta^{(1)}$	zweite $\Delta^{(2)}$	dritte $\Delta^{(3)}$	vierte $\Delta^{(4)}$	fünfte $\Delta^{(5)}$	sechste $\Delta^{(6)}$
$T-4h$	a_4 ...	b_4 ...					
$T-3h$	a_3 ...	b_3 ...	c_4 ...	d_4 ...			
$T-2h$	a_2 ...	b_2 ...	c_3 ...	d_3 ...	e_4 ...	f_4 ...	
$T-\ h$	a_1 ...	b_1 ...	c_2 ...	d_2 ...	e_3 ...	f_3 ...	g_4
T	a_0 ...	b_0 ...	c_1 ...	d_1 ...	e_2 ...	f_2 ...	g_3
$T+\ h$	$a^{(1)}$ ..	$b^{(1)}$ ..	c_0 ...	d_0 ...	e_1 ...	f_1 ...	g_2
$T+2h$	$a^{(2)}$ ..	$b^{(2)}$ ..	$c^{(1)}$ ..	$d^{(1)}$ ..	e_0 ...		
$T+3h$	$a^{(3)}$ ..	$b^{(3)}$ ..	$c^{(2)}$ ..				
$T+4h$	$a^{(4)}$ ..						

Die gegebenen Werthe stehen also in folgender Beziehung zu ihren Differenzen:

$$a_3 = a_4 + b_4;\quad a_2 = a_3 + b_3;\ ..\ a^{(4)} = a^{(3)} + b^{(3)}, \text{ u. s. w.}$$
$$b_3 = b_4 + c_4;\quad b_2 = b_3 + c_3;\ ..\ b^{(3)} = b^{(2)} + c^{(2)},$$
$$c_3 = c_4 + d_4;\quad c_2 = c_3 + d_3;\ ..\ c^{(2)} = c^{(1)} + d^{(1)},$$
$$d_3 = d_4 + e_4;\quad d_2 = d_3 + e_3;\ ..\ d^{(1)} = d_0 + e_0.$$

Hieraus findet man durch allmähliche Entwickelung:

$$a_3 = a_4 + b_4;\ a_2 = a_4 + 2\,b_4 + c_4,\ a_1 = a_4 + 3\,b_4 + 3\,c_4 + d_4;$$
$$a_0 = a_4 + 4\,b_4 + 6\,c_4 + 4\,d_4 + e_4 \text{ u. s. w.}$$

Man sieht leicht ein, dass die Zahlencoefficienten: 1, 1; 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1; 1, 4, 6, 4, 1 u. s. w., in den eben entwickelten Grössen a_3, a_2, a_1, a_0 nichts anderes als die *Binomial-Coefficienten,* in der Entwickelung der zweitheiligen Grössen

$(1+\beta)$ zur ersten, zweiten, dritten, vierten Potenz sind, und unser Ausdruck ist in so fern nur vom *Binomischen Lehrsatze* verschieden, als man hier statt der Potenzen β, β^2, β^3 u. s. w. in der Entwickelung von $(1+\beta)$ zu einer beliebigen Potenz, die entsprechenden ersten, zweiten, dritten u. s. w. Differenzen setzen muss. Aber ebenso wie a_0 von den ihm vorangehenden Grössen und ihren Differenzen abhängt, auf ganz ebensolche Weise wird der Werth $a^{(t)}$, welcher der t^{te} nach a_0 ist, von den Grössen a_0, b_0, c_0 u. s. w. abhängen müssen, welche in unserer Tafel mit a_0 anfangen und alsdann in einer Diagonallinie fortschreiten. Was die Coefficienten betrifft, die mit diesen Grössen zu verbinden sind, so werden sie gleich den Binomial-Coefficienten der t^{ten} Potenz von $(1+\beta)$ werden müssen, so dass also:

$$a^{(t)} = a_0 + t.b_0 + \frac{t(t-1)}{1.2}.c_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}d_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1.2.3.4}e_0 + \;.\;.\;.\;.\;.\;\; (A).$$

Dieser Ausdruck ist für positive und ganze Werthe von t streng richtig; aber wir können auch wenigstens genähert annehmen, dass er auch noch gültig ist, wenn t ein ächter Bruch wird, oder $t = \frac{z}{h}$, wo z kleiner ist als h, und alsdann das Intervall z zwischen zwei aufeinander folgenden gegebenen Werthen des Arguments in den Tafeln*) eingeschlossen ist. Wenn

*) Um zu zeigen, dass man dieses genähert wirklich annehmen kann, wollen wir die Interpolationsreihe geometrisch darstellen. Wir können nämlich (t) als die Abscisse, und die entsprechende Grösse $(a)^{(t)}$ als die Ordinate irgend einer stetig fortlaufenden Curve annehmen; da wir aber die Eigenschaften dieser Curve nicht kennen, so werden wir zu ihrer Bestimmung genöthigt sein, sie durch eine Reihe von Punkten zu legen, die von den erwähnten Abscissen und Ordinaten bestimmt werden; der Zusammenhang der Abscissen und Ordinaten wird durch die Gleichung (A) ausgedrückt, welche überhaupt eine parabolische Curve darstellt; so dass also die Abscissen von der ersten Potenz, die Ordinaten aber von höheren Potenzen sein werden; um so kleiner nun das Intervall h zwischen den Argumenten sein wird,

die wahre Relation zwischen t und $a^{(t)}$ durch eine algebraische Gleichung ausgedrückt wird, in welcher die Potenzen von t ganze und positive Zahlen sind, so wird eine gewisse Differenz in der Reihe (A) und alle ihr folgenden Differenzen höherer Ordnung in Null übergehen, so dass alsdann die rechte Seite der Gleichung sich in eine endliche Anzahl Glieder verwandeln, und ganz abgeschlossen sein wird; in anderen Fällen aber wird niemals irgend eine von den Differenzen $\Delta_{(n)}$ constant, und folglich auch nicht $\Delta_{(n+1)} = 0$ werden können; alsdann wird die Reihe (A) eine unendliche sein, und will man sie summiren, so ist es nöthig, dass sie rasch convergirt, oder dass einige wenige der ersten Glieder der Reihe immer sehr genähert den Werth der ganzen unendlichen Reihe darstellen.

Die Formel (A) geht von Werthen, die zu kleineren Argumenten gehören, auf solche Werthe über, die grösseren Argumenten entsprechen; jedoch lässt sich auch umgekehrt interpoliren. Man denke sich nämlich, dass die Argumente und die auf sie bezogenen Werthe und Differenzen, welche in unserer Tafel § 1, S. 819 gegeben sind, in entgegengesetzter Ordnung hingeschrieben wären, so dass die Tafel mit den letzten Werthen $a^{(4)}$, $a^{(3)}$ . . . anfing und mit den ersten Werthen . . . a_3, a_4 endigte; dann würden die ersten Differenzen: $a^{(3)} - a^{(4)} = -b^{(3)}$; $a^{(2)} - a^{(3)} = -b^{(2)}$ u. s. w. werden; d. h. diese Differenzen würden den entsprechenden Differenzen in der angegebenen Tafel, aber mit umgekehrten Zeichen gleich werden; ferner würden die zweiten Differenzen: $-b^{(3)} - [-b^{(4)}] = +b^{(4)} - b^{(3)} = +c^{(3)}$ u. s. w. werden; also ganz ebenso in jeder Beziehung wie vorher bleiben; die dritten Differenzen

desto näher werden die gegebenen Punkte der Curve aneinanderliegen, und desto mehr wird die parabolische Curve mit der wahren Curve übereinstimmen, und folglich sieht man, dass wenigstens genähert die Gleichung (A) ebensowohl ganzen als auch gebrochenen Werthen von t Genüge leisten wird.

$c^{(3)} - c^{(4)} = -d^{(3)}$ u. s. w. ändern ihre Zeichen, die vierten dagegen bleiben wieder unverändert; und so geht es auf ähnliche Weise fort, so dass überhaupt nur die Differenzen ungerader Ordnung das umgekehrte Zeichen erhalten. Nehmen wir nun an, dass $t = \frac{g}{h}$ ein echter Bruch ist, und dass dieser den Abstand des Gliedes $a^{(t)}$ von $a^{(1)}$ ausdrückt, so werden die entsprechenden ersten, zweiten, dritten, vierten u. s. w. Differenzen alsdann durch $-b_0$, $+c_1$, $-d_2$, $+e_3$ u. s. w. ausgedrückt werden; wodurch folglich:

$$a^{(t)} = a^{(1)} - (1-t)\,b_0 + \frac{(1-t)(1-t-1)}{2}\,c_1 + \frac{(1-t)(1-t-1)(1-t-2)}{2.3}\,d_2 + \ldots\ldots$$

$$a^{(t)} = a^{(1)} + (t-1)\,b_0 + \frac{t\,(t-1)}{2}\,c_1 + \frac{t\,(t-1)(t+1)}{2.3}\,d_2 + \frac{t\,(t-1)(t+1)(t+2)}{2.3.4}\,e_3 + \ldots\ldots \quad (B).$$

Die Formel (A) wird benutzt, wenn mehrere nachfolgende Werthe der Function und nur ein vorangehender Werth vorhanden sind; dagegen die Formel (B), wenn mehrere vorangehende Werthe der Function und nur ein nachfolgender gegeben sind.

Beide Gleichungen (A) und (B) sind nicht genau, sondern nur genähert; wenn der Fehler in dem einen Ausdrucke positiv ist, so wird er in dem anderen meistens negativ sein, und wir können daher für den andern wahren, mehr genäherten Ausdruck als Endformel die halbe Summe beider Ausdrücke (A) und (B) annehmen, so dass:

$$a^{(t)} = \frac{a_0 + a^{(1)}}{2} + t\,b_0 - \frac{b_0}{2} + \frac{t\,(t-1)}{2}\cdot\left(\frac{c_0 + c_1}{2}\right) + \frac{t\,(t-1)}{6}\left\{\frac{(t-2)\,d_0 + (t+1)\,d_2}{2}\right\} + \frac{t\,(t-1)}{24}\left\{\frac{(t-2)(t-3)\,e_0 + (t+1)(t+2)\,e_3}{2}\right\}.$$

Nun ist aber $a(^1) - b_0 = a_0$, und folglich $\frac{a_0 + a(^1)}{2} - \frac{b_0}{2} = a_0$; ferner: $d_0 = d_1 + e_1$, $d_2 = d_1 - e_2$; $e_0 = e_1 + f_1$; $e_3 = e_2 - f_3$ u. s. w.

Setzt man daher in dem eben entwickelten Ausdrucke statt d_0, d_2, e_0, e_3 u. s. w. ihre entsprechenden Werthe, und ordnet alsdann nach den zunehmenden Differenzen, so erhält man endlich (Bessel'sche Formel):

$$a^{(t)} = a_0 + t b_0 + \frac{t(t-1)}{1.2}\left(\frac{c_0 + c_1}{2}\right) + \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{1.2.3} d_1 +$$
$$+ \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1.2.3.4.}\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right) + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)(t-\frac{1}{2})}{1.2.3.4.5} f_2$$
$$+ \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)(t-3)}{1.2.3.4.5.6}\left(\frac{g_2 + g_3}{2}\right) + \ldots\ldots \quad (C).$$

Da nun t ein echter Bruch ist, d. h. zwischen 0 und 1 enthalten, so sieht man leicht ein, dass die Coefficienten bei den dritten, vierten, fünften u. s. w. Differenzen, in der Formel (C) kleinere Werthe als in den Formeln (A) und (B) haben werden. Vergleicht man die drei Formeln (A), (B) und (C) untereinander, so bemerkt man, dass bei der Formel (A) die ersten, zweiten, dritten u. s. w. Differenzen, bei der Anordnung unserer Tafel § 1, S. 819 in der Diagonale liegen, welche ihren Lauf von dem Intervalle zwischen a_0 und $a(^1)$ anfängt, und nach unten geht; die Differenzen bei der Formel (B) dagegen laufen alsdann in einer Diagonale nach oben fort; und in der Gleichung (C) endlich werden unmittelbar nur die Differenzen ungerader Ordnung von einer geraden Linie durchschnitten, welche horizontal in der Mitte des Intervalls zwischen a_0 und $a(^1)$ fortläuft, anstatt der geraden Differenzen aber, braucht man bei dieser Formel die halben Summen derjenigen geraden Differenzen, von denen immer eine höher, und die andere niedriger, als die genannte horizontale Linie liegt.

In den allgemeinen Wrangel'schen Hülfstafeln findet man eine besondere Tafel XXII zur Erleichterung der Rechnung

nach der Formel (C) angegeben; sie ist diesem Werke einverleibt worden, und giebt die Werthe der Logarithmen der Coefficienten, welche der ersten Differenz, der halben Summe der zweiten Differenzen, der dritten Differenz, der halben Summe der vierten Differenzen und der fünften Differenz entsprechen, für die Argumente $t = \frac{1}{144}$, $\frac{2}{144}$ u. s. w. bis $t = 1$ ganz genau an; bezeichnet man daher diese Coefficienten durch B, C, D, E und F, wo nämlich:

$$B = t;\ C = \frac{t(t-1)}{1.2};\ D = \frac{t(t-1)(t-\frac{1}{2})}{1.2.3}$$

$$E = \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1.2.3.4};\ F = \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)(t-\frac{1}{2})}{1.2.3.4.5}$$

u. s. w. gesetzt worden ist, so erhält man endlich:

$$a^{(t)} = a_0 + B.b + C.c + D.d + E.e + Ff + \ldots\ (C^*),$$

wo

$$b = b_0;\ c = \frac{c_0 + c_1}{2},\ d = d_1;\ e = \frac{e_1 + e_2}{2},\ f = f_2;\ldots$$

Wenn die Lage des Gestirns von 12 zu 12 Stunden gegeben ist, so wird h ein Intervall von 12 Stunden Zeit ausdrücken, und aus der Gleichung $t = \frac{z}{h}$ findet man alsdann, dass für $h = 12^h$ und $t = \frac{1}{144}$, $z = 5^m$ Zeit werden wird, so dass man also mit Hülfe dieser Tafel von 5 zu 5 Minuten in Zeit interpoliren kann. Wenn die Orte des Gestirns von 3 zu 3 Stunden gegeben sind, so wird $h = 3^h$, und alsdann findet man für $t = \frac{1}{144}$ ohne Weiteres $z = 1^m 15^s$; wünscht man in diesem Falle ebenfalls von 5 zu 5 Minuten in Zeit zu interpoliren, und will man die hier gegebene Tafel ohne Aenderung anwenden, so muss man die Differenz zwischen dem gegebenen Zeitmomente und dem nächst vorangehenden Zeitmomente der Ephemeride mit 4 multipliciren und dieses neue Zeitintervall als Argument zur Auffindung von $lg B$, $lg C$, $lg D$ u. s. w. aus der Tafel auf S. 826—829 anwenden. Wenn $h = 3^h$ ist, so braucht man selten höhere Differenzen als die zweiten.

Beispiel. Man wünscht die gerade Aufsteigung des Mondes für $8^h 0^m 0^s$ mittlere Berliner Zeit für den 1. August 1830 zu wissen. Hierzu kann man nun das Berliner Astronomische Jahrbuch für 1830 anwenden, indem man die diesem Zeitmomente vorangehenden und nachfolgenden drei Mondorte ausschreibt und ihre Differenzen nimmt, wie es in folgender Tafel gezeigt ist:

1830. Mittlere Berliner Zeit.	Gerade Aufsteigung des Mondes.	1. Diff. $= \Delta'$	2. Diff. $= \Delta''$	3. Diff. $= \Delta'''$	4. Diff. $= \Delta^{IV}$	5. Diff. $= \Delta^{V}$
31. Juli 0h	257°17′20″,3					
		6°34′36″,4				
12h	263 51 56 ,7		6′49″,7			
		6 41 26 ,1		−45″,2		
1. Aug. 0h	270 33 22 ,8		6 4 ,5		−12″,9	
		6 47 30 ,6		−58 ,1		+0″,5
12h	277 20 53 ,4		5 6 ,4		−12 ,4	
		6 52 37 ,0		−70 ,5		
2. Aug. 0h	284 13 30 ,4		3 55 ,9			
		6 56 32 ,9				
12h	291 10 8 ,3					

Für das in dieser Tafel enthaltene nächst kleinere Moment, nämlich für den 1. August 1830 um 0^h findet man:

$$a_0 = 270°33'22'',8;\ b = 6°47'30'',6 = 24450'',6;$$
$$c_1 = 6'4'',5;\ c_0 = 5'6'',4;\ d = -58'',1;$$
$$e_2 = -12'',9;\ e_1 = -12'',4;\ f = +0'',5;$$
$$c = \tfrac{1}{2}(c_0 + c_1) = 5'35'',45;\ e = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2) = -12'',65.$$

Der Unterschied zwischen der gegebenen Zeit und dem 1. August 1830 um 0^h ist $= 8^h$, und nun findet man mit dem Argumente $z = 8^h$ aus der folgenden Tafel auf S. 828, und mit den eben gegebenen Werthen von b, c, d, e, f:

$lg B = 9{,}8239087 - 10$	$lg b = 4{,}3882895$
$lg C = 9{,}04576_n - 10$	$lg c = 2{,}52563$
$lg D = 7{,}79048_n - 10$	$lg d = 1{,}76418_n$
$lg E = 8{,}31336 - 10$	$lg e = 1{,}10209_n$
$lg F = 6{,}83624 - 10$	$lg f = 9{,}69897 - 10.$

Das angehängte Zeichen $_n$ bedeutet, dass die Werthe C und D, d und e negativ sind.

Mit diesen Grössen findet man nach der Formel (C^*):

$$
\begin{aligned}
Bb &= +4^\circ 31' 40'',40 \\
Cc &= \quad -37\ ,27 \\
Dd &= \quad +\ 0\ ,36 \\
Ee &= \quad -\ 0\ ,26 \\
Ff &= \quad +\ 0\ ,00 \\
\hline
Bb+Cc+Dd+Ee+Ff &= +4^\circ 31'\ 3'',23 \\
a_0 &= 270\ 33\ 22\ ,80 \\
\end{aligned}
$$

Gesuchte gerade Aufsteigung des Mondes $= 275^\circ\ 4' 26'',03$.

Wenn $t = \frac{1}{2}$, so ist alsdann:

$$a^{(t)} = \tfrac{1}{2}[a_0 + a(^1)] - \tfrac{1}{8}c + \tfrac{3}{128}e - \tfrac{5}{1024}g + \ .\ .\ . \quad (D).$$

Diese Formel wird benutzt, um in die Mitte des Intervalls hinein zu interpoliren.

Tafel: enthaltend die Werthe $lg B$, $lg C$, $lg D$, $lg E$, $lg F$.

z	lg B	lg C	lg D	lg E	lg F
h m					
0 0	— ∞	— ∞	— ∞	— ∞	— ∞
5	7.8416375	7.53758n	6.75336	6.76092	5.75485n
10	8.1426675	7.83556n	7.04518	7.06038	6.04814n
15	8.3187588	8.00859n	7.21195	7.23484	6.21636n
20	8.4436975	8.13043n	7.32746	7.35811	6.33328n
25	8.5406075	8.22423n	7.41482	7.45330	6.42204n
30	8.6197888	8.30028n	7.48434	7.53071	6.49292n
35	8.6867355	8.36406n	7.54149	7.59584	6.55142n
40	8.7447275	8.41887n	7.58957	7.65197	6.60082n
45	8.7958800	8.46682n	7.63068	7.70121	6.64322n
50	8.8416375	8.50935n	7.66626	7.74501	6.68007n
55	8.8830302	8.54749n	7.69734	7.78439	6.71239n
1 0	8.9208188	8.58200n	7.72467	7.82013	6.74095n
5	8.9555809	8.61346n	7.74883	7.85279	6.76631n
10	8.9877655	8.64232n	7.77026	7.88282	6.78891n
15	9.0177288	8.66893n	7.78932	7.91058	6.80912n
20	9.0457575	8.69358n	7.80628	7.93636	6.82721n
25	9.0720864	8.71650n	7.82138	7.96039	6.84342n
30	9.0969100	8.73789n	7.83480	7.98286	6.85792n
35	9.1203911	8.75791n	7.84670	8.00394	6.87089n
40	9.1426675	8.77670n	7.85722	8.02377	6.88244n
45	9.1638568	8.79437n	7.86646	8.04246	6.89270n
50	9.1840602	8.81103n	7.87451	8.06011	6.90175n
55	9.2033653	8.82676n	7.88147	8.07681	6.90968n
2 0	9.2218487	8.84164n	7.88739	8.09264	6.91655n

Tafel: enthaltend die Werthe *lg B*, *lg C*, *lg D*, *lg E*, *lg F*.

z	lg B	lg C	lg D	lg E	lg F
h m					
2 0	9.2218487	8.84164n	7.88739	8.09264	6.91655n
5	9.2395775	8.85573n	7.89235	8.10766	6.92243n
10	9.2566109	8.86910n	7.89637	8.12194	6.92737n
15	9.2730013	8.88179n	7.89952	8.13553	6.93141n
20	9.2887955	8.89386n	7.90183	8.14846	6.93458n
25	9.3040355	8.90534n	7.90333	8.16078	6.93692n
30	9.3187588	8.91627n	7.90404	8.17253	6.93845n
35	9.3329992	8.92669n	7.90399	8.18375	6.93920n
40	9.3467875	8.93661n	7.90319	8.19446	6.93919n
45	9.3601514	8.94608n	7.90166	8.20469	6.93842n
50	9.3731164	8.95512n	7.89942	8.21446	6.93692n
55	9.3857055	8.96374n	7.89646	8.22381	6.93468n
3 0	9.3979400	8.97197n	7.89279	8.23274	6.93171n
5	9.4098392	8.97983n	7.88841	8.24128	6.92801n
10	9.4214211	8.98733n	7.88333	8.24944	6.92359n
15	9.4327021	8.99450n	7.87753	8.25724	6.91842n
20	9.4436975	9.00134n	7.87100	8.26470	6.91252n
25	9.4544214	9.00787n	7.86374	8.27183	6.90586n
30	9.4648868	9.01409n	7.85573	8.27864	6.89843n
35	9.4751060	9.02003n	7.84695	8.28514	6.89020n
40	9.4850902	9.02570n	7.83737	8.29134	6.88116n
45	9.4948500	9.03109n	7.82697	8.29725	6.87129n
50	9.5043953	9.03623n	7.81572	8.30289	6.86053n
55	9.5137354	9.04111n	7.80357	8.30826	6.84887n
4 0	9.5228787	9.04576n	7.79048	8.31336	6.83624n
5	9.5318336	9.05016n	7.77641	8.31821	6.82261n
10	9.5406075	9.05434n	7.76128	8.32282	6.80791n
15	9.5492077	9.05830n	7.74503	8.32718	6.79206n
20	9.5576409	9.06204n	7.72758	8.33130	6.77500n
25	9.5659134	9.06556n	7.70883	8.33519	6.75661n
30	9.5740313	9.06888n	7.68867	8.33886	6.73680n
35	9.5820002	9.07200n	7.66696	8.34230	6.71542n
40	9.5898255	9.07492n	7.64355	8.34553	6.69232n
45	9.5975124	9.07764n	7.61825	8.34854	6.66730n
50	9.6050655	9.08017n	7.59082	8.35134	6.64014n
55	9.6124895	9.08252n	7.56098	8.35394	6.61055n
5 0	9.6197887	9.08468n	7.52837	8.35633	6.57818n
5	9.6269674	9.08665n	7.49256	8.35853	6.54259n
10	9.6340292	9.08845n	7.45297	8.36052	6.50319n
15	9.6409781	9.09007n	7.40883	8.36232	6.45923n
20	9.6478175	9.09152n	7.35912	8.36392	6.40968n
25	9.6545509	9.09279n	7.30240	8.36533	6.35310n
30	9.6611814	9.09388n	7.23655	8.36655	6.28737n
35	9.6677123	9.09481n	7.15830	8.36758	6.20922n
40	9.6741464	9.09557n	7.06214	8.36842	6.11315n
45	9.6804866	9.09616n	6.93779	8.36907	5.98886n
50	9.6867355	9.09657n	6.76212	8.36954	5.81324n
55	9.6928959	9.09683n	6.46134	8.36982	5.51249n
6 0	9.6989700	9.09691n	− ∞	8.36991	− ∞

Tafel: enthaltend die Werthe *lgB*, *lgC*, *lgD*, *lgE*, *lgF*.

z	*lgB*	*lgC*	*lgD*	*lgE*	*lgF*
h m					
6 0	9.6989700	9.09691n	— ∞	8.36991	— ∞
5	9.7049604	9.09683n	6.46134n	8.36982	5.51249
10	9.7108692	9.09657n	6.76212n	8.36954	5.81324
15	9.7166988	9.09616n	6.93779n	8.36907	5.98886
20	9.7224511	9.09557n	7.06214n	8.36842	6.11315
25	9.7281282	9.09481n	7.15880n	8.36758	6.20922
30	9.7337321	9.09388n	7.23655n	8.36655	6.28737
35	9.7392646	9.09279n	7.30240n	8.36533	6.35310
40	9.7447275	9.09152n	7.35912n	8.36392	6.40968
45	9.7501225	9.09007n	7.40883n	8.36232	6.45923
50	9.7554514	9.08845n	7.45297n	8.36052	6.50319
55	9.7607156	9.08665n	7.49256n	8.35853	6.54259
7 0	9.7659167	9.08468n	7.52837n	8.35633	6.57818
5	9.7710564	9.08252n	7.56098n	8.35394	6.61055
10	9.7761360	9.08017n	7.59082n	8.35134	6.64014
15	9.7811568	9.07764n	7.61825n	8.34854	6.66730
20	9.7861202	9.07492n	7.64355n	8.34553	6.69232
25	9.7910275	9.07200n	7.66696n	8.34230	6.71542
30	9.7958800	9.06888n	7.68867n	8.33886	6.73680
35	9.8006789	9.06556n	7.70883n	8.33519	6.75661
40	9.8054253	9.06204n	7.72758n	8.33130	6.77500
45	9.8101205	9.05830n	7.74503n	8.32718	6.79206
50	9.8147654	9.05434n	7.76128n	8.32282	6.80791
55	9.8193611	9.05016n	7.77641n	8.31821	6.82261
8 0	9.8239087	9.04576n	7.79048n	8.31336	6.83624
5	9.8284092	9.04111n	7.80357n	8.30826	6.84887
10	9.8328636	9.03623n	7.81572n	8.30289	6.86053
15	9.8372727	9.03109n	7.82697n	8.29725	6.87129
20	9.8416375	9.02570n	7.83737n	8.29134	6.88116
25	9.8459589	9.02003n	7.84695n	8.28514	6.89020
30	9.8502377	9.01409n	7.85573n	8.27864	6.89843
35	9.8544747	9.00787n	7.86374n	8.27183	6.90586
40	9.8586709	9.00134n	7.87100n	8.26470	6.91252
45	9.8628268	8.99450n	7.87753n	8.25724	6.91842
50	9.8669434	8.98733n	7.88333n	8.24944	6.92359
55	9.8710213	8.97983n	7.88841n	8.24128	6.92801
9 0	9.8750613	8.97197n	7.89279n	8.23274	6.93171
5	9.8790640	8.96374n	7.89646n	8.22381	6.93468
10	9.8830302	8.95512n	7.89942n	8.21446	6.93692
15	9.8869605	8.94608n	7.90166n	8.20469	6.93842
20	9.8908555	8.93661n	7.90319n	8.19446	6.93919
25	9.8947160	8.92669n	7.90399n	8.18375	6.93920
30	9.8985424	8.91627n	7.90404n	8.17253	6.93845
35	9.9023354	8.90534n	7.90333n	8.16078	6.93692
40	9.9060955	8.89386n	7.90183n	8.14846	6.93458
45	9.9098234	8.88179n	7.89952n	8.13553	6.93141
50	9.9135195	8.86910n	7.89637n	8.12194	6.92737
55	9.9171845	8.85573n	7.89235n	8.10766	6.92243
10 0	9.9208187	8.84164n	7.88739n	8.09264	6.91655

Tafel: enthaltend die Werthe $lg B$, $lg C$, $lg D$, $lg E$, $lg F$.

z	$lg B$	$lg C$	$lg D$	$lg E$	$lg F$
h m					
10 0	9.9208187	8.84164n	7.88739n	8.09264	6.91655
5	8.9244229	8.82676n	7.88147n	8.07681	6.90968
10	9.9279973	8.81108n	7.87451n	8.06011	6.90175
15	9.9315426	8.79437n	7.86646n	8.04246	6.89270
20	9.9350592	8.77670n	7.85722n	8.02377	6.88244
25	9.9385475	8.75791n	7.84670n	8.00394	6.87089
30	9.9420080	8.73789n	7.83480n	7.98286	6.85792
35	9.9454412	8.71650n	7.82138n	7.96039	6,84342
40	9.9488475	8.69358n	7.80628n	7.93636	6.82721
45	9.9522272	8.66893n	7.78932n	7.91058	6.80912
50	9.9555809	8.64232n	7.77026n	7.88282	6.78891
55	9.9589088	8.61346n	7.74883n	7.85279	6.76631
11 0	9.9622115	8.58200n	7.72467n	7.82013	6.74095
5	9.9654892	8.54749n	7.69734n	7.78439	6.71239
10	9.9687423	8.50935n	7.66626n	7.74501	6.68007
15	9.9719713	8.46682n	7.63068n	7.70121	6.64322
20	9.9751764	8.41887n	7.58957n	7.65197	6.60082
25	9.9783581	8.36406n	7.54149n	7.59584	6.55142
30	9.9815166	8.30028n	7.48434n	7.53071	6.49292
35	9.9846523	8.22423n	7.41482n	7.45330	6.42204
40	9.9877655	8.13043n	7.32746n	7.35811	6.33328
45	9.9908566	8.00859n	7.21195n	7.23484	6.21636
50	9.9939258	7.83556n	7.04518n	7.06038	6.04814
55	9.9969736	7.53758n	6.75336n	6.76092	5.75485
12 0	0.0000000	— ∞	— ∞	— ∞	— ∞

Von den verschiedenen Interpolationsformeln wird am häufigsten die nachfolgende (Hansen'sche) angewandt. Es seien:

für die Zeiten	Werthe der Function	Differenzen 1ste,	2te,	3te,	4te,	5te,	6te
$T-1.h$ ...	a'	Δ'		$\Delta'^{(3)}$		$\Delta'^{(5)}$	
T	a_0		$\Delta_0^{(2)}$		$\Delta_0^{(4)}$		$\Delta_0^{(6)}$
$T+1.h$ ...	$a_,$	$\Delta_,$		$\Delta_,^{(3)}$		$\Delta_,^{(5)}$	

Setzt man $\frac{z}{h} = t$ und nennt $a_{(t)}$ den Werth der Function für das Argument $T+t.h$, so erhält man für die Zeit $T+z$:

$$a_{(t)0} = a_0 + \left\{\frac{(\Delta' + \Delta_,)}{2} - \frac{1}{6}\frac{(\Delta'^{(3)} + \Delta_,^{(3)})}{2} + \frac{1}{30}\frac{(\Delta'^{(5)} + \Delta_,^{(5)})}{2} - \,.\,.\right\}t$$
$$+ \left\{\frac{\Delta_0^{(2)}}{2} - \frac{\Delta_0^{(4)}}{24} + \frac{\Delta^{(6)}}{180} - \,.\,.\,.\right\}t^2$$
$$+ \left\{\frac{1}{6}\frac{(\Delta'^{(3)} + \Delta_,^{(3)})}{2} - \frac{1}{24}\frac{(\Delta'^{(5)} + \Delta_,^{(5)})}{2} + \,.\,.\,.\right\}t^3$$
$$+ \left\{\frac{\Delta_0^{(4)}}{24} - \frac{1}{144}.\Delta_0^{(6)} + \ldots\right\}t^4 + \left\{\frac{1}{120}\frac{(\Delta'^{(5)} + \Delta_,^{(5)})}{2} - \ldots\right\}t^5$$
$$+ \left\{\frac{\Delta^{(6)}}{720} - \,.\,.\,.\right\}t^6 + \,.\,.\,.\,.$$

Um diese Formel herzuleiten, betrachten wir folgende Reihe der Argumente, der ihnen entsprechenden Werthe der Function und ihrer Differenzen:

Argumente:	Werthe:	Differenzen: 1ste,	2te,	3te,	4te,	5te,	(6)
$T-3.h$	a'''	b'''					
$T-2.h$	a''	b''	c''	d''			
$T-1.h$	a'	b'	c'	d'	e'	f'	
T	a_0		c_0		e_0		g_0 u. s. w.
$T+1.h$	$a_,$	$b_,$	$c_,$	$d_,$	$e_,$	$f_,$	
$T+2.h$	$a_{,,}$	$b_{,,}$	$c_{,,}$	$d_{,,}$			
$T+3.h$	$a_{,,,}$	$b_{,,,}$					

Wenn die 7te und höhere Differenzen vernachlässigt werden, so kann man

$$a_{(t)} = a_0 + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + Gt^6$$

annehmen; um die Coefficienten B, C . . . . . zu bestimmen, werden wir nach und nach -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, $+3$ statt t setzen; dadurch geht $a_{(t)}$ über in a''', a'', a', a_0, $a_,$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$; wir bekommen also

$$\begin{aligned}
a''' &= a_0 - 3B + 9C - 27D + 81E - 243F + 729G \\
a'' &= a_0 - 2B + 4C - 8D + 16E - 32F + 64G \\
a' &= a_0 - B + C - D + E - F + G \\
a_0 &= a_0 \\
a_, &= a_0 + B + C + D + E + F + G \\
a_{,,} &= a_0 + 2B + 4C + 8D + 16E + 32F + 64G \\
a_{,,,} &= a_0 + 3B + 9C + 27D + 81E + 243F + 729G.
\end{aligned}$$

Zieht man, der Reihe nach, diese Gleichungen von einander ab; werden ferner die Differenzen von derselben Ordnung auch von einander abgezogen, so entstehen folgende Ausdrücke:

$$b''' = B - 5C + 19D - 65E + 211F - 665G$$
$$b'' = B - 3C + 7D - 15E + 31F - 63G$$
$$b' = B - C + D - E + F - G$$
$$b_{,} = B + C + D + E + F + G$$
$$b_{,,} = B + 3C + 7D + 15E + 31F + 63G$$
$$b_{,,,} = B + 5C + 19D + 65E + 211F + 665G$$

$$c'' = 2C - 12D + 50E - 180F + 602G$$
$$c' = 2C - 6D + 14E - 30F + 62G$$
$$c_0 = 2C + 2E + 2G$$
$$c_{,} = 2C + 6D + 14E + 30F + 62G$$
$$c_{,,} = 2C + 12D + 50E + 180F + 602G$$

$$d'' = 6D - 36E + 150F - 540G$$
$$d' = 6D - 12E + 30F - 60G$$
$$d_{,} = 6D + 12E + 30F + 60G$$
$$d_{,,} = 6D + 36E + 150F + 540G$$

$$e' = 24E - 120E + 480G$$
$$e_0 = 24E + 120G$$
$$e_{,} = 24E + 120F + 480G$$

$$f' = 120F - 360G$$
$$f_{,} = 120F + 360G$$

$$g_0 = 720G.$$

Man hat also:

$$G = \tfrac{1}{720} \cdot g_0,$$

$$F = \tfrac{1}{120} \cdot \frac{(f' + f_{,})}{2};$$

$$E = \tfrac{1}{24} e_0 - \tfrac{120}{24} G = \tfrac{1}{24} e_0 - \tfrac{1}{144} G_0$$

$$D = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{(d' + d_{,})}{2} - 5F = \tfrac{1}{6} \frac{(d' + d_{,})}{2} - \tfrac{1}{24} \frac{(f' + f_{,})}{2}$$

$$C = \tfrac{1}{2}c_0 - E - G = \tfrac{1}{2}c_0 - \tfrac{1}{24}.e_0 + \tfrac{1}{180}.g_0$$
$$B = \frac{b'+b_{,}}{2} - D - F = \frac{b'+b_{,}}{2} - \tfrac{1}{6}\frac{(d'+d_{,})}{2} + \tfrac{1}{24}\frac{(f'+f_{,})}{2}.$$

Werden diese Werthe der Coefficienten B, C . . . in den Ausdruck von $a_{(t)}$ eingesetzt, so entsteht die Hansen'sche Formel, welche für die Rechnung am bequemsten ist, wenn man besondere Interpolationstafeln nicht zur Hand hat. Aus dieser Formel lässt sich die Newton'sche ableiten:

$$a_{(t)} = a_0 + \frac{(b'+b_{,})}{2}t + \tfrac{1}{2}c_0 t^2 + \frac{(d'+d_{,})}{2}.\frac{t(t^2-1)}{2.3} + e_0.\frac{t^2(t^2-1)}{2.3.4}$$
$$+ \frac{(f'+f_{,})}{2}\frac{t(t^2-1)(t^2-4)}{2.3.4.5} + g_0.\frac{t^2(t^2-1)(t^2-4)}{2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Ueberhaupt unterscheiden sich die verschiedenen Interpolationsformeln nur nach ihrer Gestalt von einander und können eine in die andere verwandelt werden. So z. B. lässt sich aus der Hansen'schen Formel leicht die Bessel'sche ableiten; man hat nämlich

$$\frac{\Delta'+\Delta_{,}}{2} = \Delta_{,} - \tfrac{1}{2}\Delta_0^{(2)}; \quad \Delta_0^{(2)} = \frac{\Delta_0^{(2)}+\Delta_{,}^{(2)}}{2} - \tfrac{1}{2}\Delta_{,}^{(3)},$$
$$\frac{\Delta'^{(3)}+\Delta_{,}^{(3)}}{2} = \Delta_{,}^{(3)} - \tfrac{1}{2}\Delta_0^{(4)}; \quad \Delta_0^{(4)} = \frac{\Delta_0^{(4)}+\Delta_{,}^{(4)}}{2} - \tfrac{1}{2}\Delta_{,}^{(5)}$$
$$\frac{\Delta'^{(5)}+\Delta_{,}^{(5)}}{2} = \Delta_{,}^{(5)} - \tfrac{1}{2}\Delta_0^{(6)} \text{ u. s. w.}$$

Wenn diese Ausdrücke in der Hansen'schen Formel substituirt werden, so erhält man nach der Reduction die Bessel'sche Formel, in welcher die halben Summen der Differenzen der geraden Ordnungen vorkommen; sie ist besonders bequem, wenn t nahe gleich $\tfrac{1}{2}$ ist.

Wenn die dritten Differenzen so klein sind, dass sie vernachlässigt werden können, so kann man annehmen, dass:

$$a^{(t)} = a_0 + \tfrac{1}{2}(b_{,} + b')t + \tfrac{1}{2}c_0.t^2,$$

woraus man ersehen kann, dass, wenn man auch die zweite Differenz vernachlässigen will, man stets anstatt der ersten Differenz den Werth $\frac{1}{2}(b_{,}+b')$ annehmen muss.

Mittelst der eben gegebenen Formeln kann man leicht die umgekehrte Aufgabe auflösen, nämlich das Argument t zu finden, welches dem gegebenen Werthe $a^{(t)} = a$ entspricht. Wir wollen z. B. annehmen, dass man zur geraden Aufsteigung des Mondes $= 275° 6' 40'',8 = a$, welche sich am 1. August 1830 ereignete, die genaue mittlere Berliner Zeit zu suchen hätte. Aus der vorhergehenden Tafel (§ 1, S. 825) ersieht man, dass diese Zeit zwischen 0^h und 12^h eingeschlossen sein muss; für die Mitte der Zeit zwischen dem 31. Juli um 12^h und dem 1. August um 12^h findet man die Bewegung des Mondes in $12^h = + 6° 44' 28'',3$. Die an der gegebenen zunächstliegende vorhergehende gerade Aufsteigung des Mondes ist $a_0 = 270° 33' 22'',8$ um 0^h am 1. August; wäre nun die Bewegung des Mondes gleichförmig, so liesse sich die Proportion ansetzen:

$$12^h : \tau = 6° 44' 28'',3 : a - a_0, \text{ wo } a - a_0 = 4° 33' 18'',0,$$

und dann würde τ die seit dem 1. August um 0^h verflossene Zeit sein, welche man zu 1830 August 1. $0^h 0^m 0^s$ zulegen musste, um die gesuchte Zeit zu erhalten, als die $AR☾ = 275° 6' 40'',8 = a$ war; nun wird in diesem Falle $\tau = 8^h,1$ oder $8^h 6^m$ werden; und daher hat man nach der genauen Interpolationsformel (C^*), mittelst der Tafel auf S. 828:

um $8^h\ 0^m\ 0^s$ gerade Aufst. des ☾:	$a' = 275°\ 4' 26'',03$	Aenderung in 10 Zeitminuten
„ 8 10 0 „ „ „ „	$a'' = 275\ 10\ 6\ ,42$	$= 0° 5' 40'',39$.

Nun kann man aber in 10 Zeitminuten, oder 600″ in Zeit, die Bewegung des Mondes ohne irgend merklichen Fehler als gleichförmig annehmen; folglich hat man: $600'' : \tau' = 0° 5' 40'',39 : a - a'$, wo $a - a' = 0° 2' 14'',77$; hieraus findet man nun $\tau' = 0^h 3^m 57^s,55$, welches man zu $8^h 0^m 0^s$ zulegen muss, um den gesuchten Moment ganz genau zu erhalten, für welchen man dann selbst den Werth

$8^h\,3^m\,57^s,55$ findet, zu welcher Zeit also der Mond die gegebene gerade Aufsteigung $= 275°\,6'\,40'',8$ hatte.

Diese Aufgabe kann man auch etwas anders lösen. Man nehme an, dass $\beta = \frac{1}{2}[(b'+b_{,}) - \frac{1}{6}(d'+d_{,})\ldots]$; $\gamma = \frac{1}{2}e_0 - \frac{1}{24}e_0\cdot$; $\delta = \frac{1}{12}(d'+d_{,})\ldots$ u. s. w.; so wird $a^{(t)} = a = a_0 + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \ldots$, und

$$t = \frac{a - a_0}{\beta + \gamma t + \delta t^2 + \ldots};$$

vernachlässigt man zuerst im Nenner die kleinen Glieder γt, δt^2 u. s. w., so erhält man den Werth von t genähert; und darauf berechnet man mit diesem t die vernachlässigten Glieder, wodurch man alsdann einen genaueren Werth von t finden wird; sollte dieser letztere aber von dem ersten genäherten Werthe von t gar zu sehr abweichen, so muss man die Berechnung noch einmal wiederholen.

3. Die stündliche Bewegung des Gestirns lässt sich leicht aus den vorhergehenden Formeln ableiten. Behält man nämlich die frühere Bezeichnung bei, und nimmt an, dass die Bewegung in der Zwischenzeit von t bis $t + \delta t$ gleichförmig bleibt, wo δt eine kleine Zunahme im Werthe von t bezeichnet, so folgt, dass die Geschwindigkeit der Bewegung zur Zeit $t + \frac{1}{2}\delta t$, durch $\frac{\delta[a^{(t)}]}{\delta t}$ ausgedrückt wird; differenziirt man daher die Formel (C) § 1, S. 823 in Bezug auf t, so erhält man folgenden, zuerst von Bessel angegebenen Ausdruck für die Geschwindigkeit der stündlichen Bewegung:

$$b + \frac{2t-1}{1.2}c + \frac{3t^2 - 3t + \frac{1}{2}}{1.2.3}d + \ldots.$$

Wenn die Intervalle, für welche die Orte des Gestirns in den Tafeln angegeben werden, 12 Stunden betragen, und man nimmt $t = 0, = \frac{1}{12}, = \frac{2}{12}, \ldots = \frac{11}{12}$, $t = 1$ an, so wird man die stündlichen Geschwindigkeiten finden, welche den verschiedenen Stunden des Intervalls entsprechen, auf welchen sich

b, c, d . . . beziehen. Zur Erleichterung der Rechnung kann man sich der allgemeinen Hülfstafeln auf S. 836—838 bedienen, in welchen die Coefficienten von e, d, ... für $t = \frac{1}{12}$, $t = \frac{2}{12}$ . . . u. s. w., oder für jede 5 Minuten Zeit angegeben werden, wenn das Intervall zwischen den Beobachtungen 12 Stunden beträgt. Bezeichnet man nämlich die Coefficienten von c, d, e u. s. w. durch C', D', E' u. s. w., wo also:

$$C' = \frac{2t-1}{1.2}; \qquad D' = \frac{3t^2-3t+\frac{1}{2}}{1.2.3}$$

$$E' = \frac{4t^3-6t^2-2t+2}{1.2.3.4}; \quad F' = \frac{5t^4-10t^3+5t-1}{1.2.3.4.5}$$

u. s. w. gesetzt worden ist, so wird:

$$v = \frac{1}{h}(b + C'.c + D'.d + E'.e + F'.f + \ldots),$$

wo v die stündliche Bewegung bezeichnet, und h die Anzahl von Stunden, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Argumenten enthalten ist. Die Logarithmen der Werthe C', D', E', F' findet man in den Tafeln auf S. 836—838 ebenso angegeben, wie in der Tafel XXIII der allgemeinen Wrangel'schen Hülfstafeln.

Beispiel. Man verlangt die stündliche Bewegung des Mondes in gerader Aufsteigung für $8^h 0^m 0^s$ mittlere Berliner Zeit am 1. August 1830.

Mit Hülfe der auf S. 825 gegebenen Tafel hat man zuerst $b = 6°47'30'',60$ und alsdann nach S. 825:

$lg\,e = 2{,}52563$; $lg\,d = 1{,}76418_n$; $lg\,e = 1{,}10209_n$; $lg\,f = 9{,}69897$.

Man findet ferner aus der Tafel auf S. 838:

$lg\,C' = 9{,}22185$; $lg\,D' = 8{,}44370_n$; $lg\,E' = 8{,}53085_n$;
$lg\,F' = 7{,}47473$.

Hiermit wird:

$C'c = +55'',91$; $D'd = +1'',61$; $E'e = +0'',43$; $F'f = +0'',00$

$12\,v = b + C'c + D'd + E'e + F'f = 6°48'28'',55$

und damit endlich:

Stündliche Bewegung in AR ☾ $= v = 0°34'2'',38$.

Tafel: enthaltend die Werthe von $lg\,C'$, $lg\,D'$, $lg\,E'$, $lg\,F'$.

z h m	lg C'	lg D'	lg E'	lg F'
0 0	9.69897n	8.92082	8.92082	7.92082n
5	9.69290n	8.90247	8.91773	7.90547n
10	9.68674n	8.88358	8.91449	7.88957n
15	9.68049n	8.86412	8.91111	7.87309n
20	9.67415n	8.84404	8.90757	7.85598n
25	9.66771n	8.82331	8.90388	7.83822n
30	9.66118n	8.80187	8.90003	7.81975n
35	9.65455n	8.77966	8.89603	7.80053n
40	9.64782n	8.75663	8.89188	7.78049n
45	9.64098n	8.73269	8.88756	7.75958n
50	9.63403n	8.70776	8,88307	7.73773n
55	9.62697n	8.68175	8.87842	7.71485n
1 0	9.61979n	8.65455	8.87361	7.69085n
5	9.61249n	8.62603	8.86862	7.66561n
10	9.60507n	8.59603	8.86345	7.63901n
15	9.59751n	8.56437	8.85811	7.61091n
20	9.58983n	8.53085	8.85258	7.58111n
25	9.58200n	8.49519	8.84686	7.54942n
30	9.57403n	8.45706	8.84096	7.51555n
35	9.56591n	8.41607	8.83486	7.47921n
40	9.55764n	8.37169	8.82855	7.43997n
45	9.54921n	8.32326	8.82204	7.39734n
50	9.54061n	8.26986	8.81532	7.35065n
55	9.53183n	8.21026	8.80838	7.29900n
2 0	9.52288n	8.14267	8.80121	7.24118n
5	9.51374n	8.06439	8.79381	7.17544n
10	9.50440n	7.97108	8.78617	7.09913n
15	9.49485n	7.85500	8.77828	7.00803n
20	9.48509n	7.70031	8.77014	6.89463n
25	9.47511n	7.46503	8.76172	6.74370n
30	9.46489n	6.93855	8.75304	6.51562n
35	9.45442n	7.05434n	8.74406	6.02262n
40	9.44370n	7.48946n	8.73478	6.05324
45	9.43270n	7.69822n	8.72520	6.51490
50	9.42142n	7.83556n	8.71529	6.73025
55	9.40984n	7.93734n	8.70503	6.87089
3 0	9.39794n	8.01773n	8.69442	6.97498
5	9.38571n	8.08381n	8.68344	7.05716
10	9.37312n	8.13964n	8.67206	7.12474
15	9.36015n	8.18775n	8.66027	7.18187
20	9.34679n	8.22982n	8.64804	7.23114
25	9.33300n	8.26704n	8.63535	7.27426
30	9.31876n	8.30028n	8.62217	7.31246
35	9.30404n	8.33017n	8.60847	7.34659
40	9.28880n	8.35722n	8.59422	7.37731
45	9.27300n	8.38181n	8.57937	7.40513
50	9.25661n	8.40426n	8.56389	7.43044
55	9.23958n	8.42482n	8.54774	7.45356
4 0	9.22185n	8.44370n	8.53085	7.47473

Tafel: enthaltend die Werthe *lg C'*, *lg D'*, *lg E'*, *lg F'*.

z h	z m	lg C'	lg D'	lg E'	lg F'
4	0	9.22185n	8.44370n	8.53085	7.47473
	5	9.20337n	8.46106n	8.51317	7.49418
	10	9.18406n	8.47707n	8.49463	7.51207
	15	9.16386n	8.49182n	8.47516	7.52855
	20	9.14267n	8.50544n	8.45467	7.54374
	25	9.12039n	8.51801n	8.43306	7.55775
	30	9.09691n	8.52961n	8.41021	7.57067
	35	9.07209n	8.54031n	8.38598	7.58258
	40	9.04576n	8.55015n	8.36021	7.59353
	45	9.01773n	8.55920n	8.33270	7.60360
	50	8.98777n	8.56750n	8.30323	7.61283
	55	8.95558n	8.57509n	8.27150	7.62127
5	0	8.92082n	8.58200n	8.23716	7.62895
	5	8.88303n	8.58826n	8.19976	7.63591
	10	8.84164n	8.59390n	8.15872	7.64217
	15	8.79588n	8.59894n	8.11328	7.64777
	20	8.74473n	8.60340n	8.06241	7.65273
	25	8.68674n	8.60730n	8.00467	7.65706
	30	8.61979n	8.61065n	7.93794	7.66078
	35	8.54061n	8.61346n	7.85895	7.66391
	40	8.44370n	8.61575n	7.76219	7.66645
	45	8.31876n	8.61752n	7.63737	7.66842
	50	8.14267n	8.61878n	7.46136	7.66982
	55	7.84164n	8.61954n	7.16038	7.67066
6	0	— ∞	8.61979n	— ∞	7.67094
	5	7.84164	8.61954n	7.16038n	7.67066
	10	8.14267	8.61878n	7.46136n	7.66982
	15	8.31876	8.61752n	7.63737n	7.66842
	20	8.44370	8.61575n	7.76219n	7.66645
	25	8.54061	8.61346n	7.85895n	7.66391
	30	8.61979	8.61065n	7.93794n	7.66078
	35	8.68674	8.60730n	8.00467n	7.65706
	40	8.74473	8.60340n	8.06241n	7.65273
	45	8.79588	8.59894n	8.11328n	7.64777
	50	8.84164	8.59390n	8.15872n	7.64217
	55	8.88303	8.58826n	8.19976n	7.63591
7	0	8.92082	8.58200n	8.23716n	7.62895
	5	8.95558	8.57509n	8.27150n	7.62127
	10	8.98777	8.56750n	8.30323n	7.61283
	15	9.01773	8.55920n	8.33270n	7.60360
	20	9.04576	8.55015n	8.36021n	7.59353
	25	9.07209	8.54031n	8.38598n	7.58258
	30	9.09691	8.52961n	8.41021n	7.57067
	35	9.12039	8.51801n	8.43306n	7.55775
	40	9.14267	8.50544n	8.45467n	7.54374
	45	9.16386	8.49182n	8.47516n	7.52855
	50	9.18406	8.47707n	8.49463n	7.51207
	55	9.20337	8.46106n	8.51317n	7.49418
8	0	9.22185	8.44370n	8.53085n	7.47473

Tafel: enthaltend die Werthe $lg\,C'$, $lg\,D'$, $lg\,E'$, $lg\,F'$.

z h	z m	lg C'	lg D'	lg E'	lg F'
8	0	9.22185	8.44370n	8.53085n	7.47473
	5	9.23958	8.42482n	8.54774n	7.45356
	10	9.25661	8.40426n	8.56389n	7.43044
	15	9.27300	8.38181n	8.57937n	7.40513
	20	9.28880	8.35722n	8.59422n	7.37731
	25	9.30404	8.33017n	8.60847n	7.34659
	30	9.31876	8.30028n	8.62217n	7.31246
	35	9.33300	8.26704n	8.63535n	7.27426
	40	9.34679	8.22982n	8.64804n	7·23114
	45	9.36015	8.18775n	8.66027n	7.18187
	50	9.37312	8.13964n	8.67206n	7.12474
	55	9.38571	8.08381n	8.68344n	7.05716
9	0	9.39794	8.01773n	8.69442n	6.97498
	5	9.40984	7.93734n	8.70503n	6.87089
	10	9.42142	7.83556n	8.71529n	6.73015
	15	9.43270	7.69822n	8.72520n	6.51490
	20	9.44370	7.48946n	8.73478n	6.05324
	25	9.45442	7.05434n	8.74406n	6.02262n
	30	9.46489	6.93855	8.75304n	6.51562n
	35	9.47511	7.46503	8.76172n	6.74370n
	40	9.48509	7.70031	8.77014n	6.89463n
	45	9.49485	7.85500	8.77828n	7.00803n
	50	9.50440	7.97108	8.78617n	7.09913n
	55	9.51374	8.06439	8.79381n	7.17544n
10	0	9.52288	8.14267	8.80121n	7.24118n
	5	9.53183	8.21026	8.80838n	7.29900n
	10	9.54061	8.26986	8.81532n	7.35065n
	15	9.54921	8.32326	8.82204n	7.39734n
	20	9.55764	8.37169	8.82855n	7.43997n
	25	9.56591	8.41607	8.83486n	7.47921n
	30	9.57403	8.45706	8.84096n	7.51555n
	35	9.58200	8.49519	8.84686n	7.54942n
	40	9.58983	8.53085	8.85258n	7.58111n
	45	9.59751	8.56437	8.85811n	7.61091n
	50	9.60507	8.59603	8.86345n	7.63901n
	55	9.61249	8.62603	8.86862n	7.66561n
11	0	9.61979	8.65455	8.87361n	7.69085n
	5	9.62697	8.68175	8.87842n	7.71485n
	10	9.63403	8.70776	8.88307n	7.73773n
	15	9.64098	8.73269	8.88756n	7.75958n
	20	9.64782	8.75663	8.89188n	7.78049n
	25	9.65455	8 77966	8.89603n	7.80053n
	30	9.66118	8.80187	8.90003n	7.81975n
	35	9.66771	8.82331	8.90388n	7.83822n
	40	9.67415	8.84404	8.90757n	7.85598n
	45	9.68049	8.86412	8.91111n	7.87309n
	50	9.68674	8.88358	8.91449n	7.88957n
	55	9.69290	8.90247	8.91773n	7.90547n
12	0	9.69897	8.92082	8.92082n	7.92082n

Interpolation mit zwei Argumenten.

4. Man findet häufig Tafeln mit doppelten Eingängen, welche die numerischen Werthe einer von zwei Argumenten abhängigen Function enthalten, und meistens ausgedehnt genug sind, um ohne Berücksichtigung der Differenzen dritter und höherer Ordnungen, die intermediären Werthe der Function sicher durch die Interpolation finden zu können.

Es sei $Z = F(T, U)$ die in der Tafel gegebene Function zweier von einander unabhängigen, veränderlichen Grössen T und U; es wird vorausgesetzt, dass Z eine stetige Function bedeutet, so dass sie innerhalb der Grenzen der Tafel nicht unendlich gross und nicht imaginär werden kann. Die numerischen Werthe dieser Function: a, b, c, a', b' u. s. w., die den verschiedenen Argumenten gehören, findet man in der Tafel von folgender Gestalt

Argument T.	Argument U.			
	$U-1.k$	U	$U+1.k$	. . .
$T-1.h$	. . . $Z = a$	$Z = a'$	$Z = a''$	. . .
T. . . .	. . . . b	b'	b''	. . .
$T+1.h$	 c	c'	c''	. . .
⋮	⋮	⋮	⋮	

h und k bezeichnen die bei der Verfertigung der Tafel angenommenen Intervalle der Argumente T und U. Sucht man den Werth von Z, welcher den Argumenten von $T+x.h$ und $U+y.k$ entspricht, wo x und y kleiner als 1 sind, so kann man überhaupt Z durch die Formel

$$Z = b' + Bx + Cy + Dx^2 + Ex.y + Fy^2 + \dots$$

ausdrücken, und dabei desto genauer je kleiner die Coefficienten der Glieder dritter, vierter . . . Ordnungen sind. Die Coefficienten B, C, D, E, F . . . lassen sich vermittelst der Differenzen bestimmen.

Setzt man . . . so kommt

$x = -1,\ y = 0 \ldots Z = a' = b' - B + D$
$x = +1,\ y = 0 \ldots Z = c' = b' + B + D$

$x = 0,\ y = -1 \ldots Z = b = b' - C + F$
$x = 0,\ y = +1 \ldots Z = b'' = b' + C + F$

$x = -1,\ y = +1 \ldots Z = a'' = b' - B + C + D - E + F$
$x = +1,\ y = -1 \ldots Z = c = b' + B - C + D - E + F$
$x = -1,\ y = -1 \ldots Z = a = b' - B - C + D + E + F$
$x = +1,\ y = +1 \ldots Z = c'' = b' + B + C + D + E + F$

Es folgt daraus:

$$B = \frac{c' - b'}{2} + \frac{b' - a'}{2};\quad D = \frac{c' - b'}{2} - \frac{b' - a'}{2}$$
$$C = \frac{b'' - b'}{2} + \frac{b' - b}{2};\quad F = \frac{b'' - b'}{2} - \frac{b' - b}{2}$$
$$E = \tfrac{1}{4}\{c'' - c - (a'' - a)\} \ldots$$

Sind dann die echten Brüche x und y gegeben, so kann man leicht den correspondirenden Werth von Z berechnen.

Interpolation bei ungleichen Intervallen des Arguments.

5. Es seien a', $a'' \ldots a^{(n)}$ bekannte Werthe einer continuirlichen Function, die den gegebenen und nicht zu weit von einander abstehenden Argumenten T', $T'' \ldots T^{(n)}$ gehören. Wenn wir

$$T^{(m)} = \frac{T' + T'' + \ldots T^{(n)}}{n}$$

setzen und annehmen, dass t sich zwischen den Grenzen T' und $T^{(n)}$ befindet, so kann der dem Argumente $T^{(m)} + t$ entsprechende Werth a der Function durch die Formel

$$a = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + \ldots$$

ausgedrückt werden. Machen wir

$$t' = T' - T^{(m)},\ t'' = T'' - T^{(m)} \ldots t^{(n)} = T^{(n)} - T^{(m)},$$

so werden zur Bestimmung von A, B, C, D, E . . . folgende Gleichungen dienen:

$$\begin{aligned} a' &= A + Bt' + Ct'^2 + Dt'^3 + Et'^4 + \ldots \\ a'' &= A + Bt'' + Ct''^2 + Dt''^3 + Et''^4 + \ldots \\ &\vdots \\ a^{(n)} &= A + Bt^{(n)} + Ct^{(n)2} + Dt^{(n)3} + Et^{(n)4} + \ldots \end{aligned}$$

Addiren wir alle diese Gleichungen zusammen und bemerken dabei, dass

$$t' + t'' + \ldots + t^{(n)} = 0$$

ist, so kommt, unabhängig von B,

$$A = \frac{a' + a'' \ldots + a^{(n)}}{n} - \frac{C}{n} \cdot \Sigma(t^2) - \frac{D}{n}\Sigma(t^3) - \frac{E}{n}\Sigma(t^4) - \ldots,$$

wo

$$\begin{aligned} \Sigma(t^2) &= t'^2 + t''^2 + \ldots t^{(n)2} \\ \Sigma(t^3) &= t'^3 + t''^3 + \ldots + t^{(n)3} \\ \Sigma(t^4) &= t'^4 + t''^4 + \ldots + t^{(n)4} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Rechnen wir weiter:

$$b' = \frac{a'' - a'}{t'' - t'},\ b'' + \frac{a''' - a''}{t''' - t''} \ldots b^{(n-1)} = \frac{a^{(n)} - a^{(n-1)}}{t^{(n)} - t^{(n-1)}}$$

und ausserdem noch

$$\beta = \frac{a^{(n)} - a'}{t^{(n)} - t'},$$

so entstehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} b' &= B + C(t'' + t') + D(t''^2 + t'^2 + t't'') + E.P' \\ b'' &= B + C(t''' + t'') + D(t'''^2 + t''^2 + t''t''') + EP'' \\ &\vdots \\ b^{(n-1)} &= B + C(t^{(n)} + t^{(n-1)}) + D(t^{(n)2} t^{(n-1)2} t^{(n)} t^{(n-1)}) + EP^{(n)} \\ \beta &= B + C(t^{(n)} + t') + D(t^{(n)2} + t'^2 + t^{(n)}t') - EP. \end{aligned}$$

Es sind hier:

$$P' = t''^3 + t''^2.t' + t'^2.t'' + t'^3$$
$$P'' = t'''^3 + t'''^2.t' + t''^2.t''' + t''^3$$
$$\vdots$$
$$P^{(n)} = t^{(n)3} + t^{(n)2}.t^{(n-1)} + t^{(n-1)2}.t^{(n)} + t^{(n-1)3}$$
$$P = t^{(n)3} + t^{(n)2}t' + t'^2.t^{(n)} + t'^3.$$

Aus der Summe b', b'' ... $b^{(n)}$ und β folgt der Ausdruck (unabhängig von C):

$$B = \frac{b' + b'' + \ldots b^{(n-1)} + \beta}{n} - \frac{D}{n}(2\Sigma(t^2) + \Pi)$$
$$- \frac{E}{n}(P' + P'' \ldots + P^{(n)} + P) - \ldots,$$

wo $\Pi = t't'' + t''t''' + \ldots + t^{(n-1)}.t^{(n)} + t'.t^{(n)}$ ist und man hat

$$P' + P'' + \ldots + P^{(n)} + P = 2\Sigma t^3 + t't''(t' + t'')$$
$$+ t''t'''(t'' + t''') + \ldots + t^{(n-1)}.t^{(n)}(t^{(n-1)} + t^{(n)}) + t't^{(n)}(t' + t^{(n)}).$$

Es werden dann

$$c' = \frac{b'' - b'}{t''' - t'},\quad c'' = \frac{b''' - b''}{t^{IV} - t''},\ \ldots\ c^{(n-2)} = \frac{b^{(n-1)}b^{(n-2)}}{t^{(n)} - t^{(n-2)}},$$
$$\gamma' = \frac{\beta - b'}{t^{(n)} - t''},\quad \gamma'' = \frac{b^{(n-1)} - \beta}{t^{(n-1)} - t'}$$

berechnet und man erhält

$$c' = C + D(t''' + t'' + t') + E(t'''^2 + t''^2 + t'^2 + t'''t''$$
$$+ t'''.t' + t''t')$$
$$\vdots$$
$$c^{(n-2)} = C + D(t^{(n)} + t^{(n-1)} + t^{(n-2)}) + E(t^{(n)2} + t^{(n-1)2}t^{(n-2)2}$$
$$+ t^{(n)}t^{(n-1)} + t^{(n)}t^{(n-2)}) + t^{(n-1)}.t^{(n-2)})$$
$$\gamma' = C + D(t^{(n)} + t'' + t') + E(t^{(n)2} + t''^2 + t'^2 + t^{(n)}t''$$
$$+ t^{(n)}t' + t''t')$$
$$\gamma'' = C + D(t^{(n)}t^{(n-1)} + t') + E(t^{(n)2} + t^{(n-1)2} + t'^2$$
$$+ t^{(n)}.t^{(n-1)} + t^{(n)}t' + t^{(n-1)}t').$$

Die Summe dieser Gleichungen giebt C unabhängig von D:

$$C = \frac{c' + c'' + \ldots + c^{(n-2)} + \gamma' + \gamma''}{n} - \frac{E}{n}\cdot(3\Sigma^{(t)2} + Q) - \ldots$$

$$Q = 2(t't''+t''t'''+\ldots = t^{(n)}t^{(n-1)}) + 2t't^{(n)} + t't''' + t''t^{IV} + \ldots + t^{(n-2)}.t^{(n)} + t^{(n)}t'' + t^{(n-1)}t'.$$

Berechnet man noch

$$d' = \frac{c''-c'}{t^{IV}-t'},\; d'' = \frac{c'''-c''}{t^{V}-t''},\; \ldots\; d^{(n-3)} = \frac{c^{(n-2)}-c^{(n-3)}}{t^{(n)}-t^{(n-3)}},$$

$$\delta' = \frac{\gamma'-c'}{t^{(n)}-t'''},\; \delta'' = \frac{\gamma''-\gamma'}{t^{(n)}-t''},\; \delta''' = \frac{c^{(n-2)}-\gamma''}{t^{(n-2)}-t'},$$

so entstehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
d' &= D+E(t^{IV}+t'''+t''+t') \\
d'' &= D+E(t^{V}+t^{IV}+t'''+t'') \\
&\vdots \\
d^{(n-3)} &= D+E(t^{(n)}+t^{(n-1)}+t^{(n-2)}+t^{(n-3)}) \\
\delta' &= D+E(t^{(n)}+t'''+t''+t') \\
\delta'' &= D+E(t^{(n)}+t^{(n-1)}+t''+t') \\
\delta''' &= D+E(t^{(n)}+t^{(n-1)}+t^{(n-2)}+t')\ldots
\end{aligned}$$

Die Summe dieser Gleichungen giebt D unabhängig von E:

$$D = \frac{d'+d''+\ldots+d^{(n-3)}+\delta'+\delta''+\delta'''}{n}.$$

Vernachlässigt man die Glieder fünfter Ordnung, so ist

$$E = \frac{d''-d'}{t^{V}-t'} = \frac{d'''-d''}{t^{VI}-t''} \text{ u. s. w.}$$

Die Rechnung ist bequem, wenn die Glieder vierter Ordnung oder die vierte Differenz vernachlässigt werden.

Verzeichniss der mittleren Orte von achtundvierzig nördlichen Circumpolarsternen, mit den nöthigen Constanten zur Reduction auf den scheinbaren Ort nach der Bessel'schen Methode.

Bei vielen Untersuchungen muss der Beobachter sich der Circumpolarsterne bedienen, und da in den meisten astronomi-

schen Ephemeriden deren nur wenige angegeben sind, so haben wir es nicht für überflüssig gehalten, die mittleren Orte mehrerer Circumpolarsterne auf solche Weise diesem Werke beizufügen, dass man mit Hülfe des Berliner Jahrbuchs oder des Nautical Almanac sehr leicht ihre scheinbaren Orte berechnen kann. Das angehängte Sternverzeichniss ist aus den „Tables to facilitate the Reduction of Places of the Fixed Stars, prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac“ (Washington, Bureau of Navigation, 1869) entnommen. Die scheinbaren Orte aller aufgenommenen Sterne sind in „The American Ephemeris and Nautical Almanac“ von zehn zu zehn Tagen gegeben.

Um nun zu zeigen, auf welche Weise man das Verzeichniss der mittleren Orte der Sterne brauchen muss, wollen wir zuerst die Bessel'schen Formeln, zur Reduction des mittleren Orts auf den scheinbaren, oder auch umgekehrt, angeben. Es sei daher:

t ... der Zeitraum in Jahresbruch ausgedrückt, der seit dem Anfange des Jahres und demjenigen Tage verflossen ist, für welchen man den scheinbaren Ort des Sternes suchen will.

<table>
<tr><td>$\odot$ ... die wahre Länge der Sonne
☾ ... die wahre Länge des Mondes
☊ .. die mittlere Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn
ε ... die scheinbare Schiefe der Ecliptik</td><td>für die Zeit, für welche man den scheinbaren Ort des Sternes finden will.</td></tr>
<tr><td>α ... die mittlere gerade Aufsteigung des Sternes in Bogen
δ ... die mittlere Abweichung des Sternes</td><td>für den Anfang von 1880.</td></tr>
</table>

m ... die jährliche eigene Bewegung des Sterns in gerader Aufsteigung.

m'... die jährliche eigene Bewegung des Sterns in Abweichung.

τ ... die Anzahl von Jahren, welche vom 1. Januar 1880 bis zum 1. Januar des gegebenen Jahres verflossen sind.

P... die jährliche Präcession in AR für das Jahr 1880.

p ... die jährliche Aenderung des Werthes P.

Q ... die jährliche Präcession in Declination für 1880.
q ... die jährliche Aenderung des Werthes Q.
α' ... die scheinbare gerade Aufsteigung des Sterns
δ' ... die scheinbare Abweichung des Sterns
} für die gegebene Zeit: $1880 + \tau + t$.

Berechnet man sich nun die blos von der Zeit abhängigen Werthe:

$$A = t - 0'',025 \sin 2\odot + 0'',003 \sin(\odot + 82^\circ 12') - 0''342 \sin \Omega + 0'',004 \sin 2\Omega - 0'',004 \sin 2 ☾$$

$$B = -0'',551 \cos 2\odot - 0'',009 \cos(\odot + 280^\circ 52') - 9'',224.\cos\Omega + 0'',090.\cos 2\Omega - 0'',090 \cos 2 ☾$$

$$C = -20'',445.\cos E \cos\odot$$

$$D = -20''445.\sin\odot$$

$$E = -0'',004 \sin 2\odot - 0'',050 \sin\Omega + 0'',002 \sin 2\Omega$$

sowie ferner die von dem Orte des Sterns abhängigen Constanten:

$a = 46'',0684 + 20'',0518 tg\,\delta \sin\alpha$	$a' = 20'',0518 \cos\alpha$
$b = tg\,\delta \cos\alpha$	$b' = -\sin\alpha$
$c = \sec\delta \cos\alpha$	$c' = tg\,\varepsilon \cos\delta - \sin\delta \sin\alpha$
$d = \sec\delta \sin\alpha$	$d' = \sin\delta \cos\alpha.$

Setzt man ferner:

$$A.20'',0518 = g.\cos G \qquad C = h \sin H$$
$$B = g.\sin G \qquad D = h \cos H$$
$$A.46'',0684 + E = f \qquad C tg\,\varepsilon = i,$$

so erhält man:

$$\alpha' = \alpha + (P + \tfrac{1}{2} p.\tau + m)\tau + f + tm + g \sin(G + \alpha) tg\,\delta + h \sin(H + \alpha) \sec\delta,$$

$$\delta' = \delta + (Q + \tfrac{1}{2} q.\tau + m')\tau + i \cos\delta + tm' + g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin\delta.$$

Die Grössen f, $\log g$, G, $\log h$, H, $\log i$ findet man für jeden Tag im Jahre im Berliner Jahrbuche und dem Nautical Almanac.

	Bezeichnung der Sterne.	Grösse.	α oder mittlere *AR* für den Anfang von 1880.	*P* oder jährliche Präcession in *AR* für 1880.	*p* oder jährliche Veränderung von *P*.	*m* oder jährliche eigene Bewegung in *AR*.	δ oder mittlere Decl. für den Anfang von 1880.	*Q* oder jährliche Präcession in Decl. für 1880.	*q* oder jährliche Veränderung von *Q*.	*m'* oder jährl. eigene Beweg. in Decl.
1.	21 Cassiopeae	6	0h 37m 44s,7	+ 3s,842	+0s,002	−0s,001	74° 19′ 52″	+19″,72	0″,00	−0″,06
2.	α Ursae minoris	2	1 14 46,4	+21,642	+0,155	+0,117	88 40 9	+19,01	−0,01	0,00
3.	38 Cassiopeae	6	1 22 19,2	+ 4,364	+0,001	+0,025	69 38 46	+18,70	0,00	−0,08
4.	50 Cassiopeae	4	1 53 12,8	+ 4,993	+0,002	−0,011	71 50 21	+17,66	0,00	0,00
5.	ι Cassiopeae	4	2 19 11,6	+ 4,850	+0,001	−0,008	66 51 40	+16,45	0,00	−0,02
6.	48 Cephei (Hevel.)	6	3 5 8,8	+ 7,374	+0,004	+0,016	77 17 27	+13,80	−0,01	−0,06
7.	9 Camelopardalis	4	4 42 7,6	+ 5,919	+0,001	−0,003	66 8 11	+ 6,69	−0,01	+0,01
8.	Groombridge 966	6. 7	5 23 41,6	+ 7,995	+0,001	+0,008	74 57 38	+ 3,16	−0,01	0,00
9.	22 Camelopardalis (Hevel.)	5. 4	6 5 37,0	+ 6,618	0,000	−0,002	69 21 33	− 0,60	−0,01	−0,11
10.	51 Cephei (Hevel.)	5	6 43 45,3	+30,124	−0,018	−0,070	87 13 46	− 3,84	−0,04	−0,05
11.	Piazzi VII. 67	6	7 18 23,0	+ 6,307	−0,001	+0,003	68 42 28	− 6,80	−0,01	−0,07
12.	3 Ursae maj. (Hevel.)	6	8 0 51,3	+ 6,060	−0,001	+0,006	68 49 29	−10,10	−0,01	−0,01
13.	σ^2 Ursae maj.	5	8 59 48,9	+ 5,368	−0,001	−0,002	67 37 10	−14,26	−0,01	−0,10
14.	1 Draconis (Hevel.)	4. 5	9 19 51,4	+ 9,073	−0,008	−0,008	81 51 17	−15,35	−0,01	+0,01
15.	*d* Ursae majoris	5. 4	9 23 50,6	+ 5,417	−0,002	−0,015	70 21 22	−15,53	0,00	0,00
16.	32 Ursae majoris	6	10 9 18,2	+ 4,431	−0,001	−0,016	65 42 21	−17,79	0,00	−0,03
17.	9 Draconis (Hevel.)	5. 4	10 24 51,5	+ 5,290	−0,003	0,000	76 19 48	−18,38	0,00	0,00
18.	λ Draconis	3. 4	11 24 15,7	+ 3,632	−0,001	−0,011	69 59 34	−19,87	0,00	−0,06
19.	4 Draconis (Hevel.)	5. 4	12 6 33,9	+ 2,897	−0,001	+0,010	78 16 57	−20,05	0,00	−0,01
20.	κ Draconis	3. 4	12 28 21,3	+ 2,597	−0,001	−0,011	70 26 58	−19,92	0,00	−0,02
21.	32 Camelopardalis (Hevel.)	5. 4	12 48 15,6	+ 0,372	+0,002	−0,012	84 3 53	−19,63	0,00	−0,02
22.	α Draconis	3. 4	14 1 8,5	+ 1,623	0,000	−0,007	64 56 57	−17,85	0,00	−0,03
23.	5 Ursae minoris	5. 4	14 27 47,8	− 0,201	+0,001	+0,005	76 13 44	−16,05	0,00	−0,02
24.	β Ursae minoris	2	14 51 4,2	− 0,240	+0,001	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

26.	ζ Ursae minoris	4.5	15	48	22,5	− 2,270	+0,002	+0,013	78	9	46	−10,90	0,00	0,00
27.	Groombridge 2320	6.5	16	5	59,8	+ 0,136	0,000	−0,010	68	7	35	− 9,50	0,00	+0,07
28.	*A* Draconis	5	16	28	13,5	− 0,139	0,000	+0,001	69	1	40	− 7,78	0,00	+0,03
29.	ε Ursae minoris	4.5	16	58	19,1	− 6,362	+0,003	+0,015	82	13	56	− 5,33	−0,01	0,00
30.	ω Draconis	5	17	37	39,3	− 0,356	0,000	+0,006	68	48	46	− 1,66	0,00	+0,29
31.	ψ' Draconis	4.5	17	44	4,5	− 1,081	0,000	+0,002	72	12	27	− 1,65	0,00	−0,26
32.	δ Ursae minoris	4.5	18	11	2,2	−19,436	−0,005	+0,029	86	36	33	+ 1,04	−0,03	+0,04
33.	50 Draconis	6	18	50	14,1	− 1,903	−0,001	−0,004	75	17	29	+ 4,42	0,00	+0,06
34.	δ Draconis	3	19	12	31,4	+ 0,032	0,000	+0,019	67	27	1	+ 6,31	0,00	+0,07
35.	τ Draconis	5	19	17	51,2	− 1,111	−0,001	−0,026	73	7	55	+ 6,78	0,00	+0,10
36.	λ Ursae minoris	6.7	19	44	10,8	−62,137	−0,303	−0,073	88	56	36	+ 8,81	−0,08	0,00
37.	ε Draconis	4	19	48	34,2	− 0,175	0,000	+0,014	69	57	43	+ 9,15	0,00	0,00
38.	κ Cephei	4.5	20	12	54,1	− 1,907	−0,002	+0,002	77	20	56	+10,99	0,00	0,00
39.	Groombridge 3241	6.7	20	30	30,8	− 0,213	−0,002	−0,066	72	7	30	+12,22	0,00	−0,02
40.	12 Year-Cat. 1879	6	20	53	59,0	− 2,519	−0,003	−0,012	80	6	4	+13,69	0,00	−0,05
41.	β Cephei	3	21	27	6,4	+ 0,797	0,000	+0,002	70	2	1	+15,72	0,00	−0,04
42.	11 Cephei	5	21	40	9,6	+ 0,904	0,000	+0,026	70	45	32	+16,51	0,00	+0,07
43.	79 Draconis	6.7	21	51	22,3	+ 0,734	0,000	+0,008	73	8	4	+16,97	0,00	−0,01
44.	226 Cephei (Bode)	5.6	22	30	9,8	+ 1,081	0,000	−0,001	75	36	28	+18,52	0,00	−0,01
45.	ι Cephei	4.3	22	45	24,6	+ 2,120	0,000	−0,012	65	34	10	+18,86	0,00	−0,14
46.	ο Cephei	6.5	23	13	42,2	+ 2,440	0,000	+0,014	67	27	17	+19,63	0,00	−0,02
47.	γ Cephei	3.4	23	34	25,8	+ 2,408	+0,001	−0,021	76	57	46	+20,08	0,00	+0,15
48.	Groombridge 4163	7	23	49	0,6	+ 2,856	+0,001	+0,004	73	44	32	+20,00	0,00	−0,03

Die mittlere *AR* eines dieser Sterne für irgend eine andere Epoche $1880+\tau$ wird

$$= \alpha + (P + \tfrac{1}{2}p.\tau + m).\tau.$$

Die mittlere Declination eines dieser Sterne für irgend eine andere Epoche $1880+\tau$ wird

$$= \delta + (Q + \tfrac{1}{2}q.\tau + m').\tau.$$

Beispiel. Man verlangt den scheinbaren Ort von β Cephei für den 28. Juni 1881 um Mitternacht für Greenwich. Geht man in das umstehende Verzeichniss Nr. 41 ein, so findet man:

$\alpha = 21^h 27^m 6^s,4$; $P = +0^s,797$; $p = 0^s,000$; $m = +0^s,002$;
$\delta = +70^\circ 2' 1''$; $Q = +15'',72$; $q = 0'',00$; $m' = -0'',04$.

Wir erhalten also, da $\tau = 1881 - 1880 = +1$ ist,

$$(P + \tfrac{1}{2} p.\tau + m).\tau = +0^s,799$$
$$(Q + \tfrac{1}{2} q.\tau + m').\tau = +15'',68.$$

Es wird daher der mittlere Ort dieses Sterns für den Anfang von 1881

in $AR = 21^h 27^m 6^s,4 + 0^s,799 = 21^h 27^m 7^s,2$
in Decl. $= +70^\circ 2' 1'' + 15'',68 = 70^\circ 2' 17''$.

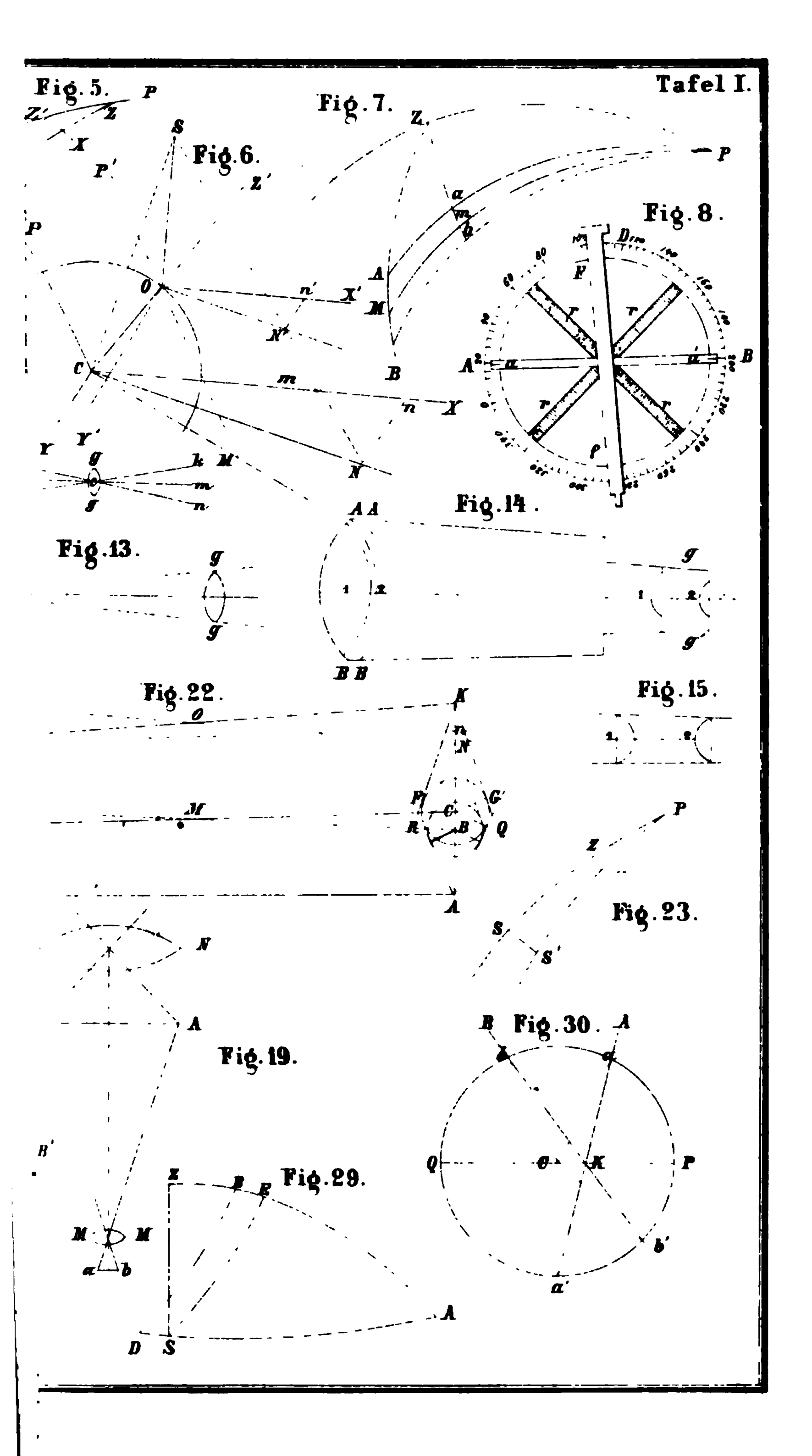
Um nun die Reduction auf den scheinbaren Ort zu berechnen, nimmt man aus dem Nautical Almanac S. 306 für den 28. Juni die Grössen:

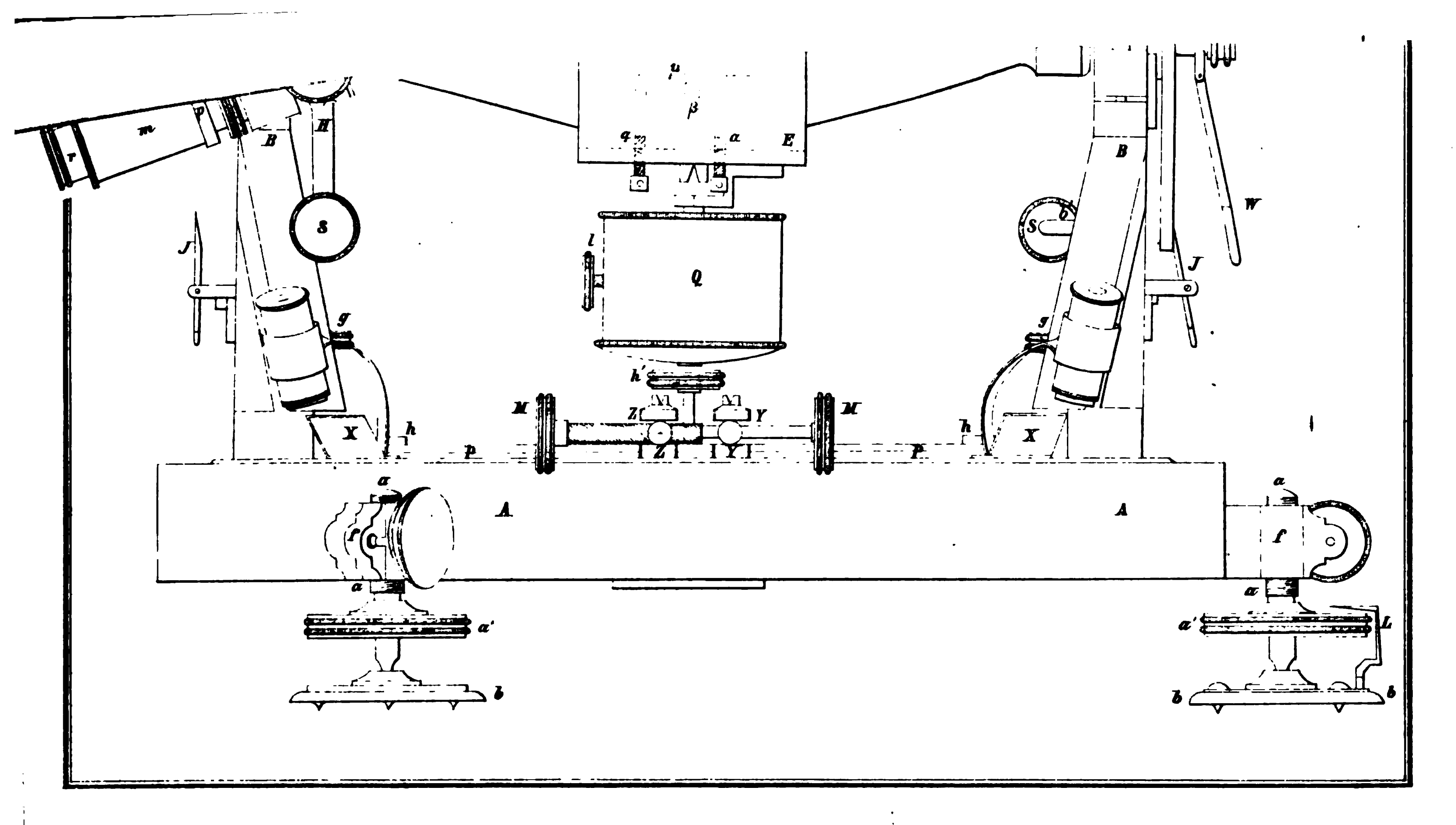
$f = +38''45$; $\log g = 1,2283$; $G = 8^\circ 31'$; $\log h = 1,3101$;
$H = 173^\circ 15'$; $\log i = 0,0169$.

Wir haben nun α in Bogen $= 321^\circ 47'$, folglich $G + \alpha = 330^\circ 18'$, $H + \alpha = 135^\circ 2'$, und erhalten:

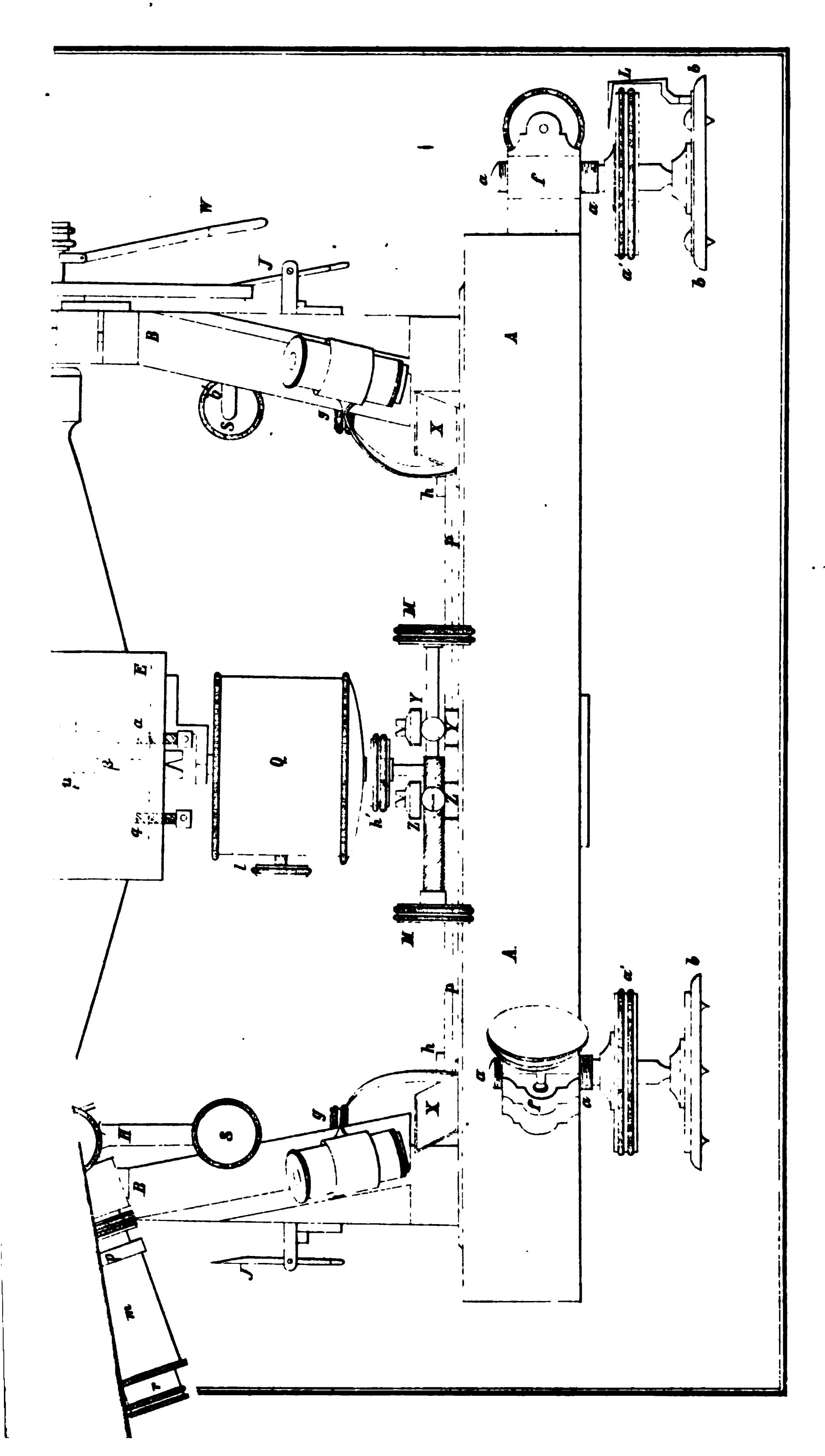
$f =$	$+38'',45$	$i \cos\delta =$	$+\ 0'',36$
$tm =$	$+\ 0\ ,01$	$tm' =$	$-\ 0\ ,02$
$g.\sin(G+\alpha) tg\delta =$	$-23\ ,06$	$g \cos(G+\alpha) =$	$+14\ ,69$
$h.\sin(H+\alpha) \sec\delta =$	$+42\ ,26$	$h \cos(H+\alpha) \sin\delta =$	$-13\ ,58$
Summe $=$	$+57'',66$	Summe $=$	$+\ 1\ ,45$
$=$	$+3^s,844$	Mittlere Decl. $=$	$+70^\circ 2' 17''$
Mittl. $AR =$	$21^h 27^m\ 7^s,2$	Scheinb. Decl. $=$	$+70^\circ 2' 18''$
Scheinb. $AR =$	$21^h 27^m 11^s,0$		

Druck von Friedr. Andr. Perthes in Gotha.


Tafel I.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 19.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 29.
Fig. 30.



r
m
p
B
H
u
β
q
a
E
B
W
S
S
J
J
l
Q
g
g
h'
M
Z
Y
M
X
h
p
h
X
A
A
a
f
f
a
a
a'
a'
L
b
b
b



Tafel IV.

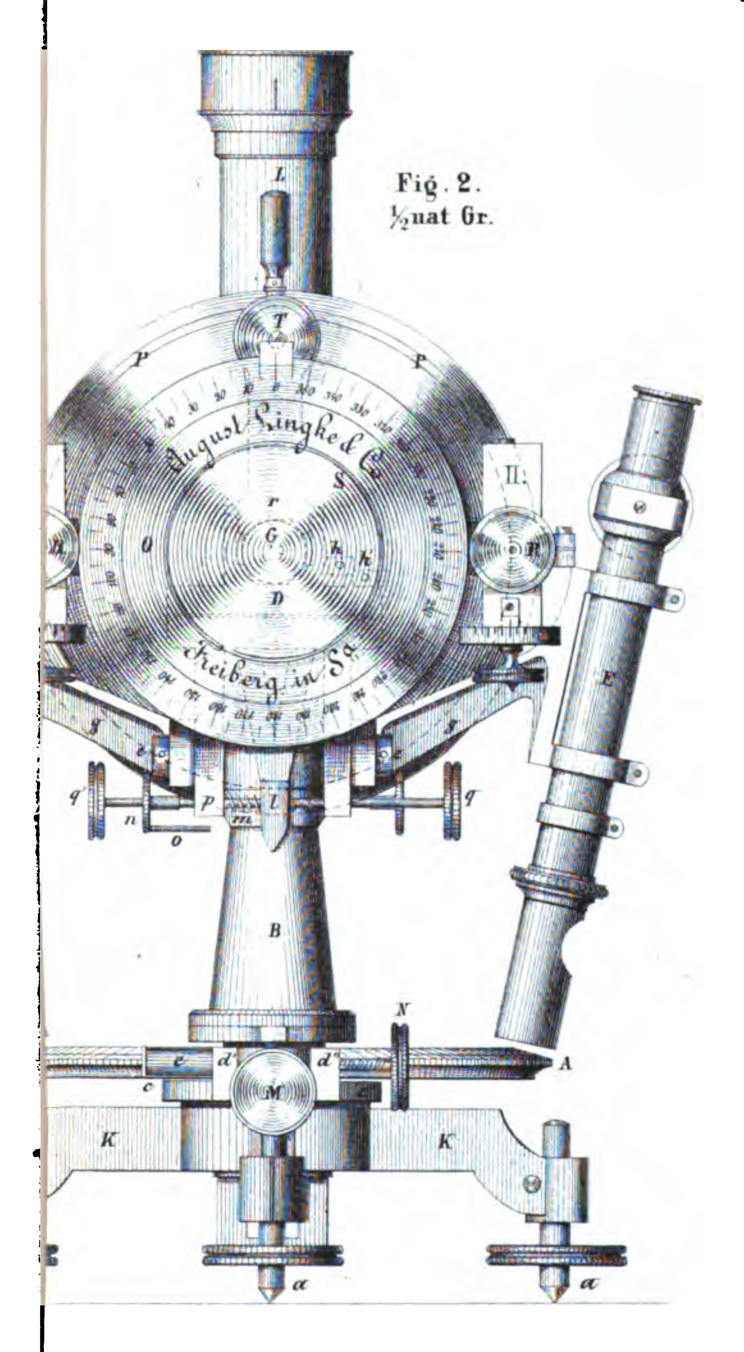
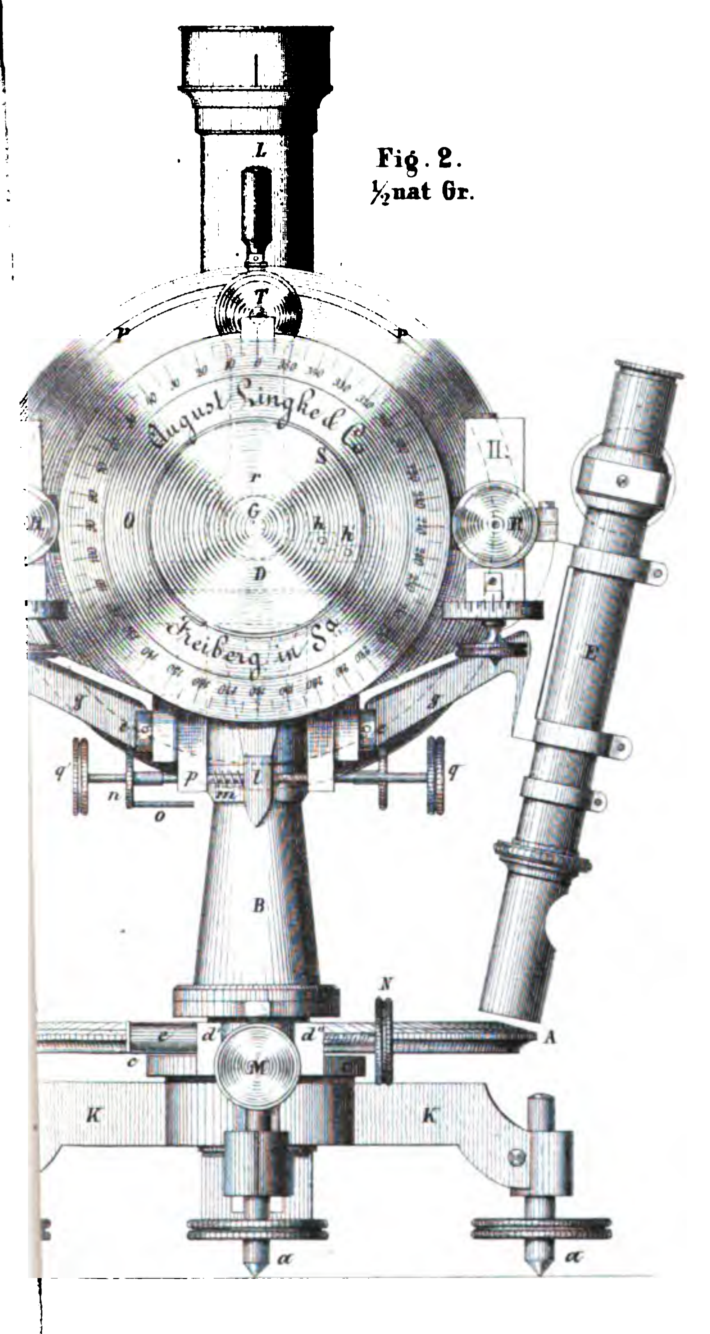
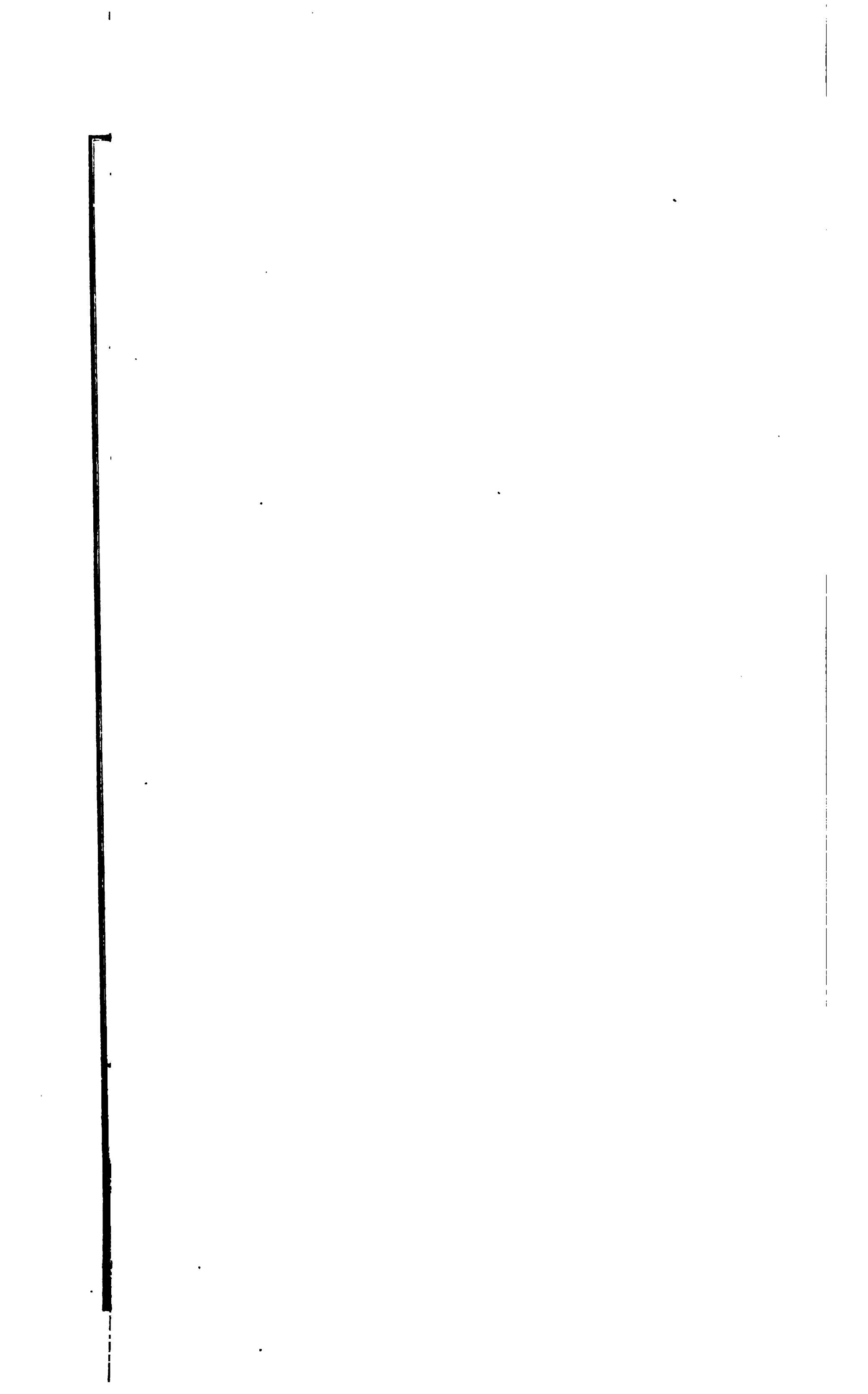
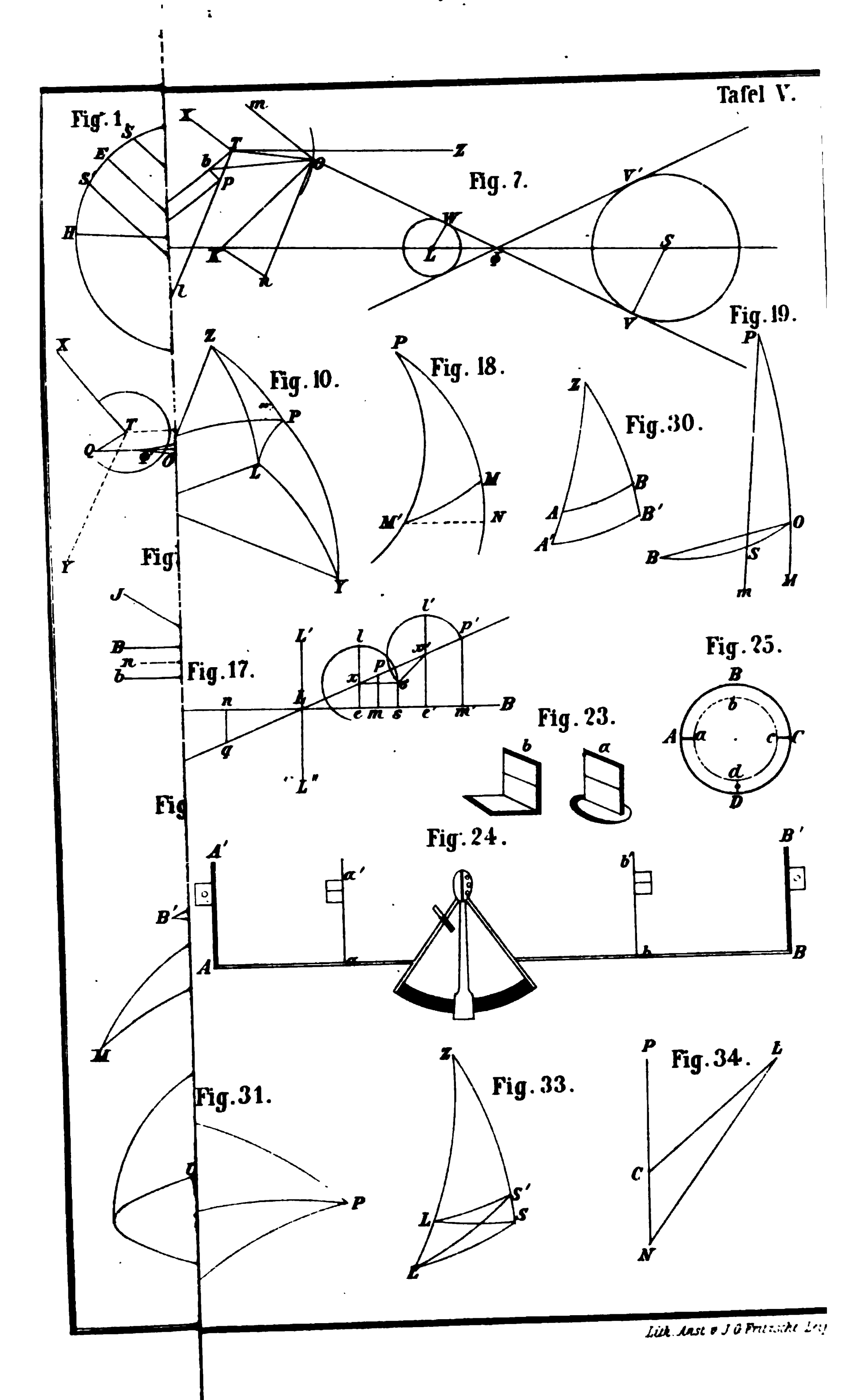

Fig. 2.
½ nat Gr.
August Lingke & Co
Freiberg in Sa.
L
T
P
P
S
r
G
O
D
h
h
II.
E
B
A
N
M
K
K
a
a
q
q
p
l
m
n
o
c
e
d
d

Fig. 2.
½ nat Gr.


L
T
P
P
August Lingke & Co
Freiberg in Sa.
S
r
G
O
h
h
D
II.
R
R
E
q
q
q'
q
p
l
m
n
o
B
N
A
e
d'
d''
c
M
K
K
α
α





Tafel V.
Fig. 1
Fig. 7.
Fig. 10.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 30.
Fig. 17.
Fig. 23.
Fig. 25.
Fig. 24.
Fig. 31.
Fig. 33.
Fig. 34.
Lith. Anst. v. J. G. Fritzsche Leip

